Universidade de São Paulo
Instituto de Física

FÍSICA MODERNA I

AULA 20 - REVISÃO

Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 114
rizzutto@if.usp.br

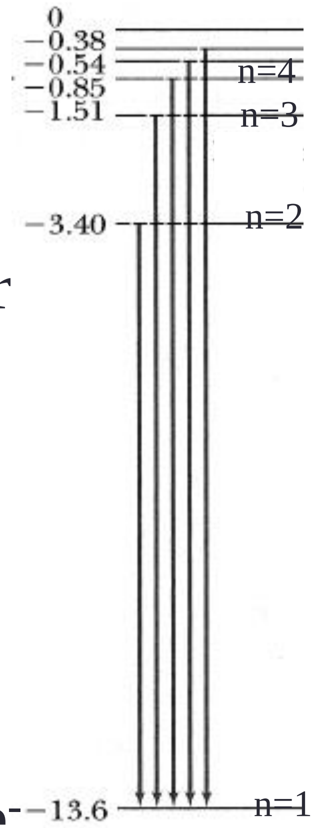
1o. Semestre de 2014
Monitor: Gabriel M. de Souza Santos

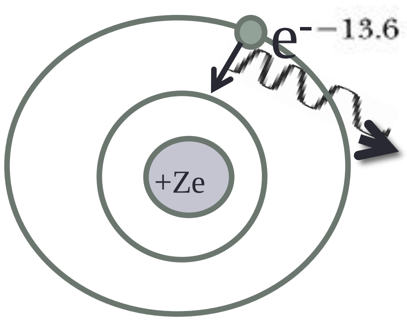
Página do curso:
http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=2905

16/05/2014

Postulados do Modelo de Bohr

- A quantização do momento angular orbital do elétron implica na quantização da energia
- n=1 estado fundamental – menor energia
  Hidrogênio (energia de ionização) $E_n = -\dfrac{13{,}6}{n^2}$
- Níveis discretos de energia
- Os elétrons se movem em certas órbitas sem irradiar energia
- átomo só pode existir em “estados estacionários” com energias quantizadas, E_n, definidas
- Átomos irradiam quando um elétron sofre uma transição de um estado estacionário para outro.
- A frequência da radiação emitida esta relacionadas às energias das órbitas: $h\upsilon = E_{ni} - E_{nf}$





Correção de massa

- O valor da constante de Rydberg obtido por Bohr foi muito próximo do valor experimental

$$R = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{m_e e^4}{4\pi c\hbar^3}$$

- Para haver o acordo entre os valores há necessidade de uma pequena correção
- Na suposição de Bohr o núcleo estava imóvel (significa que sua massa era considerada infinita)
- Mas na realidade ambos, o elétron o núcleo orbitam em torno de seu centro comum de massa, correção de massa, uso massa reduzida no lugar da massa do elétron:

$m = m_e = 9{,}109\times10^{-31}$ kg e
$M = m_p = 1{,}673\times10^{-27}$ kg

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

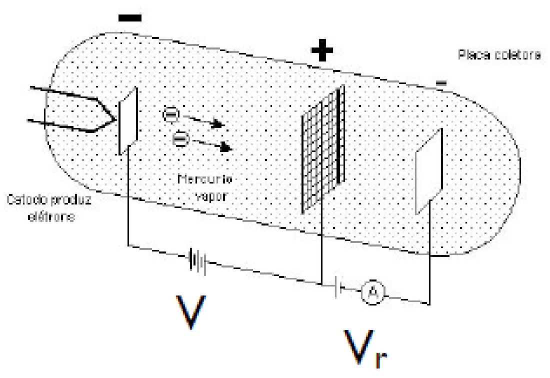
- $L = m_e v r = n\hbar$
- energia

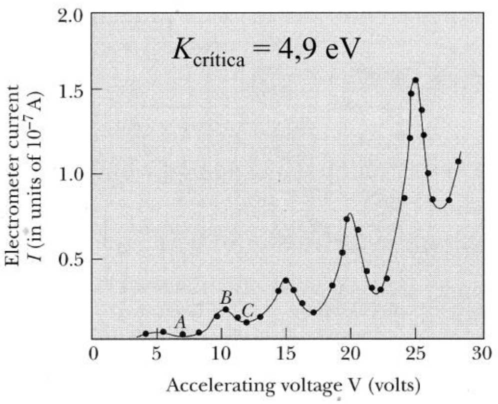
$$E_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{e^4 m_e}{\hbar^2 n^2}$$

Experimento de Frank – Hertz

- Franck e Hertz em 1914 realizaram um experimento que confirmou a hipótese de Bohr que os estados de energia interna de um átomo são quantizados.

- Ampola de vidro com gás a baixa pressão (gás de átomos para investigar).
- Catodo aquecido que produz elétrons.
- Elétrons são acelerados por um potencial V e atraídos pela grade polarizada positiva.
- Os elétrons que passam pela grade só chegam a placa P se tiverem energia suficiente para vencer o potencial retardador Vr.





$eV=E_2-E_1$ = 4,9eV (gráfico mostra primeiro pico).

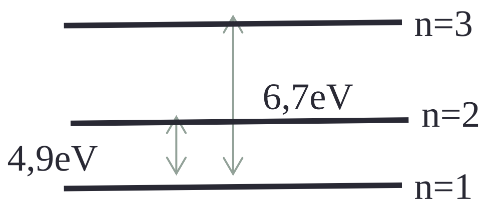
- Se eV>=4,9eV, o elétron incidente poderá transferir 4,9eV ao elétron do gás (fazer o elétron ir para o estado excitado), o espalhamento é inelástico e o elétron perde toda a sua energia e não consegue vencer o potencia Vr e a corrente cai.

Experimento de Franck - Hertz

- O primeiro estado excitado do Hg (mercúrio) tem energia 4,9 eV acima do estado fundamental

$$\frac{hc}{\lambda} = 4{,}9 \quad \lambda = 2536\dot{A} = 253{,}6nm$$

- Experimentalmente temos uma linha espectral do mercúrio com este comprimento de onda
- E Excitações múltiplas causadas pelo mesmo elétron 2x4,9=9,8V (metade do caminho até a grade)
- Na configuração usual apenas as excitações múltiplas para o primeiro estado excitado são observadas, de modo que as quedas de corrente acontecem a cada 4,9V



Hipóteses de de Broglie

- A hipótese de de Broglie em sua tese de doutorado de 1924, era que o comportamento dual (onda-partícula) da radiação eletromagnética poderia ser aplicado a matéria
- Vimos que podemos associar a um fóton uma frequência de uma onda luminosa que governa seu movimento $E = h\nu$
- E um momento do fóton é relacionado ao comprimento de onda

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

- Então segundo de Broglie se ondas de luz tem propriedades de partículas, partículas devem ter propriedades de onda. E propôs que ambas as relações cima são validas também para partículas.
- Deste modo, o comprimento de onda (não relativístico) associado a partícula d emassa m e velocidade v é:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

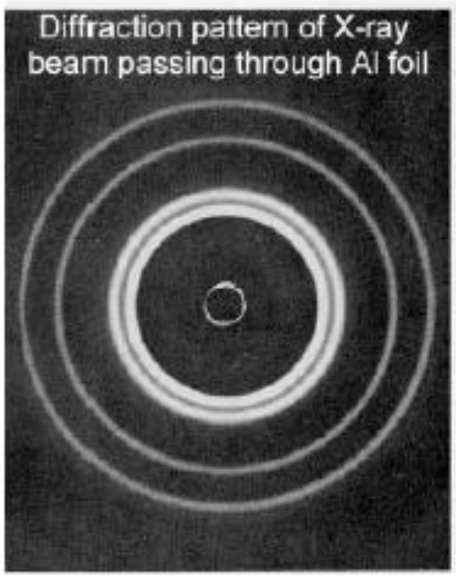
Difração de RX

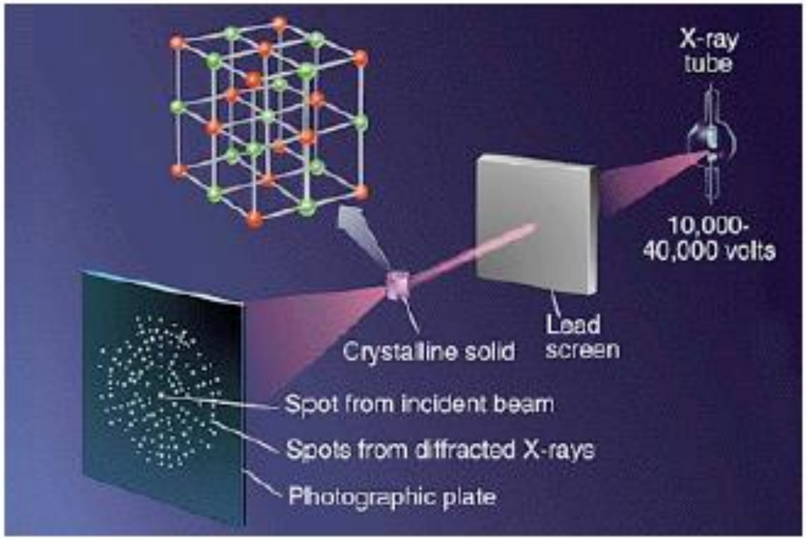
•O pequeno alargamento sofrido por um feixe de raios X ao passar por uma fenda de alguns milésimos de milímetros de largura indicava que

$$\lambda \sim 10^{-10} m = 0{,}1 nm$$

•Bragg em 1912 estudou a difração de raios X em várias famílias de planos paralelos de átomos

•As ondas difratadas com o mesmo ângulo por átomos situados em planos diferentes estarão em fase (interferência construtiva) se a diferença entre os dois percursos foi igual ao um numero inteiro de comprimento de onda $$2dsen\theta = n\lambda$$





Difração de elétrons

Temos que :

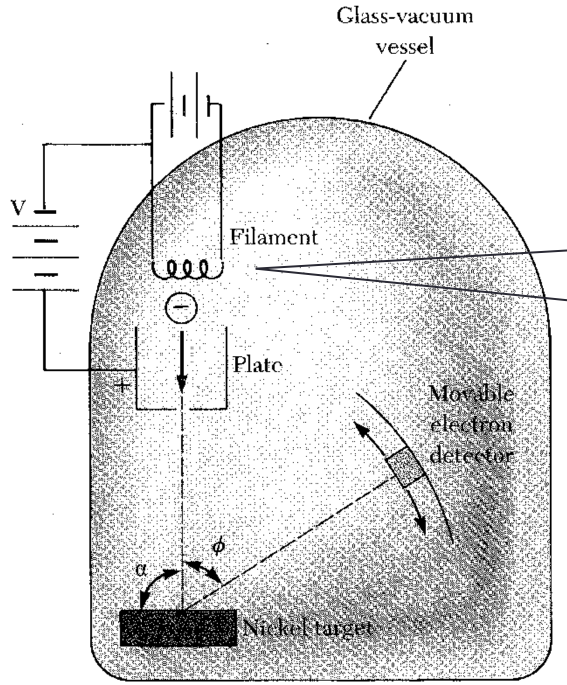
Elétron para este caso podemos associar um comprimento de onda (por exemplo para energia cinética de 100 eV) – De Broglie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E}} = \frac{1{,}24keVnm}{\sqrt{2.5.10^5.100(eV)^2}} = 1{,}2x10^{-10}m$$

Testes experimentais da hipótese de de Broglie

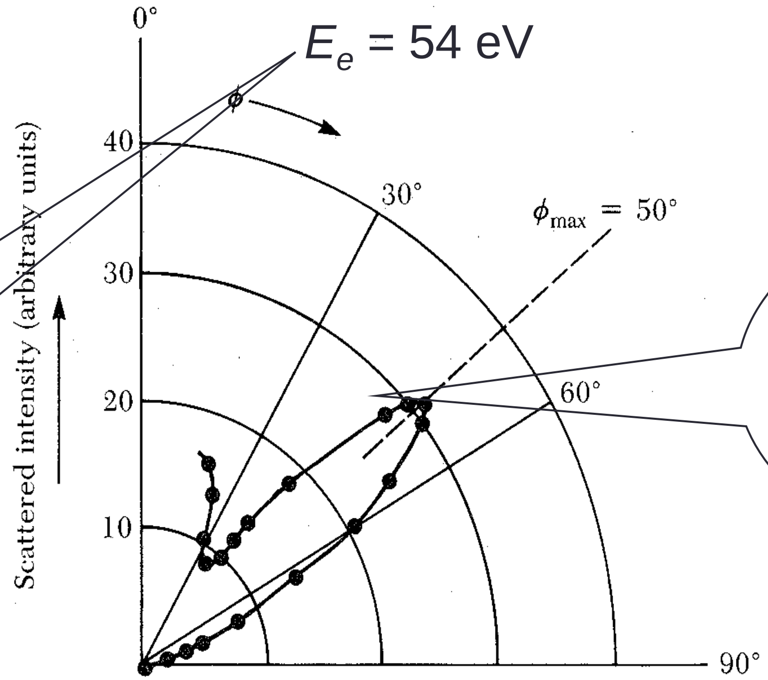
1927 Davisson e Germer (USA) e G. Thomson (Escócia):

- **Estudaram a quantidade de elétrons que eram espalhados em uma superfície de Ni em função do ângulo de espalhamento**



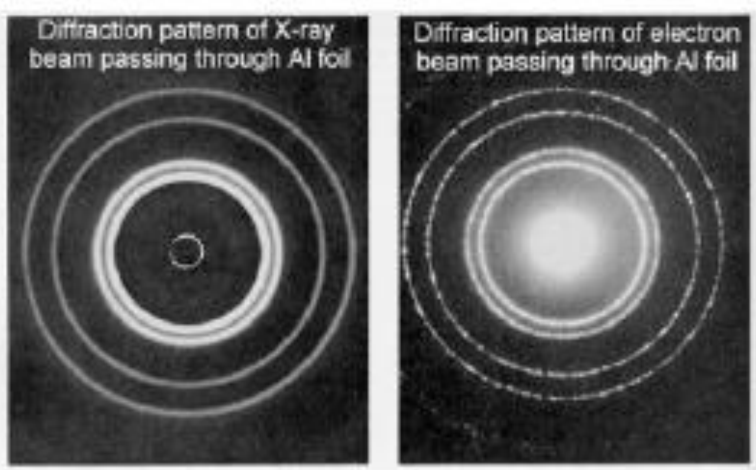
Potencial faz com que os e$^-$ sejam emitidos com E (eV)

Difração de elétrons

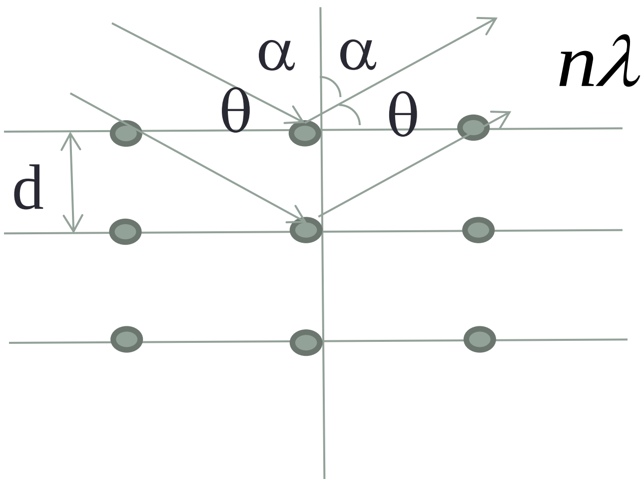


E a energia que tem corrente máxima no detector

A existência deste pico em 50º mostra qualitativamente o postulado de de Broglie pois só pode ser explicado com uma interferência construtiva de ondas espalhadas



Difração de elétrons

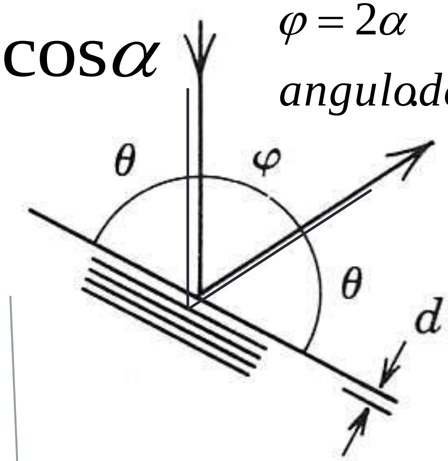


$$n\lambda = 2dsen\theta = 2d\cos\alpha$$

Máximo $\Rightarrow$

$\varphi = 2\alpha$

$angulo.de.espalhamento$



d é a distância entre os planos de Bragg esta relacionada a distância interatômica D através da relação: $d = Dsen\alpha$

$$n\lambda = 2Dsen\alpha\cos\alpha$$

$$n\lambda = Dsen2\alpha = Dsen\phi$$

Medidas de difração de RX revelaram que D=0,215nm para o Ni.

O comprimento de onda então calculado para n=1

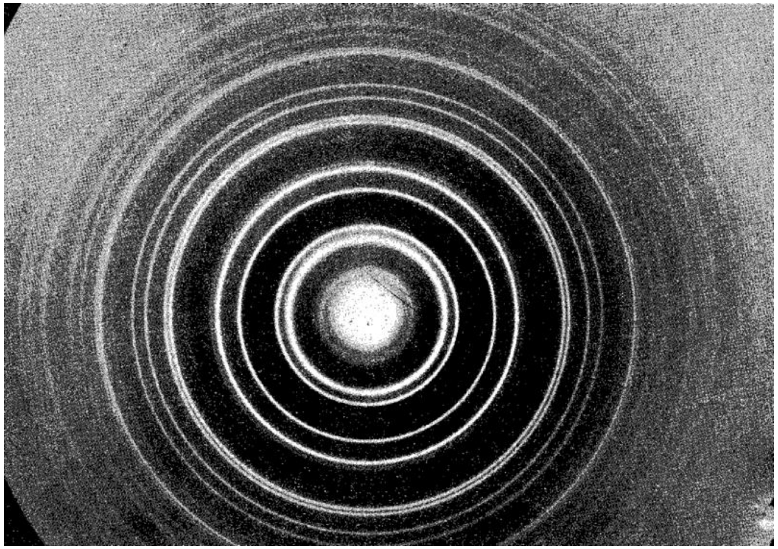
$$\lambda = 0{,}215sen50 = 0{,}165nm$$

Ou usando a distância Interplanar:
Medidas com raios-X ⇒ d = 0,091 nm
Máximo em φ = 50º⇒λ= 2$d$cosφ/2 = 2x0,091x0,906 = 0,165 nm

Calculado por De Broglie para elétrons de 54eV e´:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2E}} = \frac{1{,}24keVnm}{\sqrt{2.5.10^5.54(eV)^2}} \approx 0{,}168nm$$

G.P. Thomson Nobel em 1937



Difração de feixe de elétrons

Semelhantes experimentos com feixes de prótons, nêutrons e mesmo átomos apresentam o mesmo fenômeno de difração mostrando que as relações de de Broglie são universais.

O pai G. Thomson ganhou o Nobel por ter descoberto e^- e ter caracterizando-o como partícula. E o filho ganhou o Nobel por mostrar que o e^- é uma onda

Caso relativístico

- Para se determinar uma expressão equivalente que se aplique tanto as partículas relativísticas como não-relativísticas:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

$$mc^2 = E_0$$

Energia de repouso da partícula

$$(E_0 + E_K)^2 = (pc)^2 + (E_0)^2$$

Energia total

$$E = E_0 + E_K$$

$$p = \frac{(2E_0E_K + E_K^2)^{1/2}}{c}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{(2E_0E_K + E_K^2)^{1/2}}$$

Aplicável a qualquer partícula com qualquer energia

Regras de quantização de Wilson e Sommerfeld

- Em 1916, Wilson e Sommerfeld enunciaram um conjunto de regra de quantização:
- “Para qualquer sistema físico no qual as coordenadas são funções periódica do tempo existe uma condição quântica para cada coordenada”

$$\oint P_q dq = n_q h$$

q é uma coordenada, p_q é o momento associado a esta coordenada e ,
n_q é o número quântico que toma apenas valores inteiros.

$\oint$ significa que a integração é tomada sobre um período da coordenada q.

Exemplo:

No caso do átomo de H o elétron se movendo em uma órbita de raio r tem momento angular constante L=mvr.

A coordenada θ é uma função periódica do tempo (0 a 2π)

$$\oint L d\theta = nh$$

$$L\int_0^{2\pi} d\theta = nh$$

$$L 2\pi = nh \Rightarrow L = n\hbar$$

Regras de quantização de Wilson e Sommerfeld

- Uma interpretação física da regra de quantização de Bohr foi dada em 1924 por de Broglie

$$L = mvr = n\hbar$$

$$pr = \frac{nh}{2\pi}$$

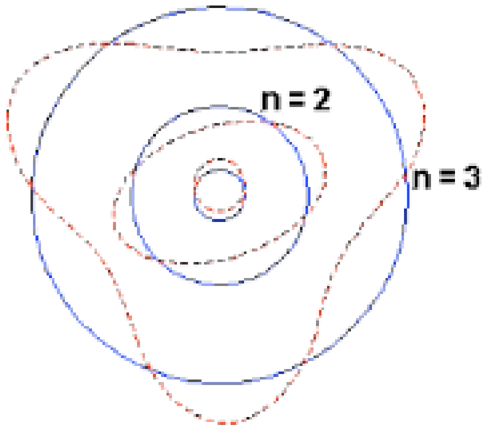
$$p = \frac{h}{\lambda}$$

$$\frac{h}{\lambda} r = \frac{nh}{2\pi}$$

$$2\pi r = n\lambda$$

Momento do elétron em uma órbita possível de raio r,

As órbitas possíveis são aquelas nas quais as circunferências podem conter exatamente um número inteiro de comprimentos de onda de de Broglie



Sommerfield trabalhou com órbitas elípticas para o átomo de H e também levou em conta as correções relativísticas para a energia do elétron. Usou isto como tentativa de explicar a estrutura fina do hidrogênio (**Estrutura fina é uma separação das linhas espectrais em várias componentes diferentes).**

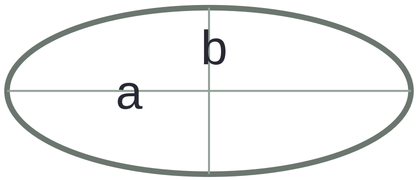
Órbitas elípticas de Sommerfeld

Número quântico azimutal

Usou coordenadas polares

$$\oint L d\theta = n_\theta h$$

$$\oint P_r dr = n_r h$$



As várias órbitas caracterizadas por um mesmo valor de n são ditas degeneradas

1) A primeira condição dá a mesma restrição para o momento angular orbital

$$L = n_\theta \hbar \qquad n_\theta = 1,2,3....$$

Que era obtida para a teoria da órbita circular

2) A segunda condição (que não era aplicável a órbita puramente circular)

$$L(a/b - 1) = n_r \hbar \qquad n_r = 0,1,2,3....$$

Que era obtida para a teoria da órbita circular

Órbitas elípticas de Sommerfeld

Sommerfeld calculou os valores dos semi-eixos maior (a) e menor (b) que dão a forma e o tamanho das órbitas elípticas e a energia total E do elétron nessa órbita

$$a = \frac{4\pi\varepsilon_o n^2 \hbar^2}{\mu Z e^2}$$

$$b = a\frac{n_\theta}{n}$$

$$E = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2 \frac{\mu Z^2 e^4}{2n\hbar^2}$$

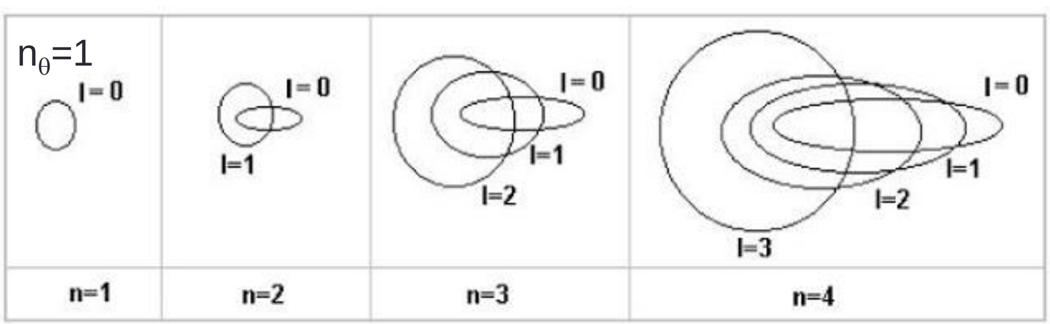
μ é a massa reduzida

n é o número quântico:

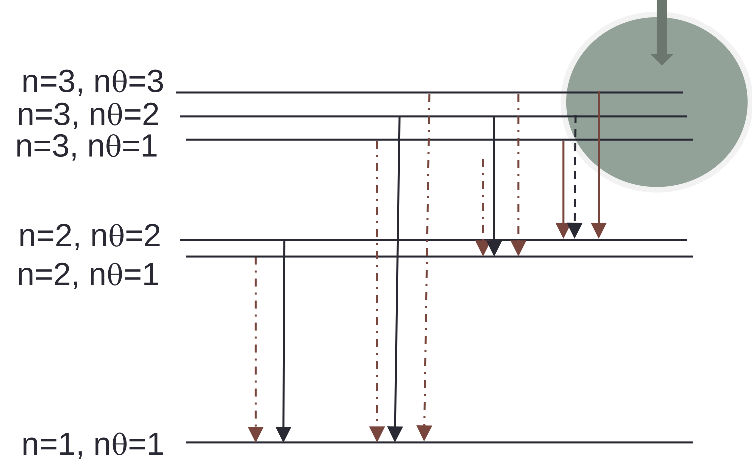
$$n \equiv n_\theta + n_r \qquad n_\theta = 1,2,3.... \qquad n_r = 0,1,2,3....$$

$$n = 1,2,3....$$

As energia são degeneradas



$E = E_1$ $E = E_2$ $E = E_3$ $E = E_4$



Órbitas elípticas de Sommerfeld tratadas relativisticamente

O tamanho real da correção depende da velocidade média do elétron que por sua vez depende da excentricidade da órbita, correções da ordem de v^2/c^2, era provável que a maior correção fosse na órbita muito excêntrica, porque v aumenta à medida que o elétron se aproxima do núcleo

k

$$v = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{\hbar}{mr} (n=1)$$

$$E = -\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\right)^2 \frac{\mu Z^2 e^4}{2n\hbar^2}\left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n}\left(\frac{1}{n_\theta} - \frac{3}{4n}\right)\right]$$

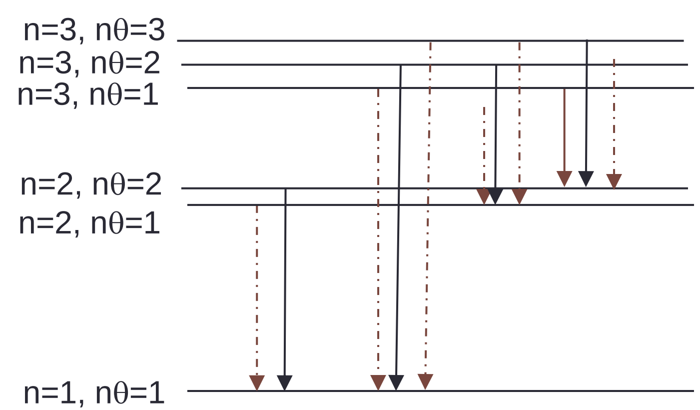
$$r_1 = a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_o \hbar^2}{me^2} = \frac{\hbar^2}{mke^2}$$

α é chamada de "*constante de estrutura fina*"

$$v = \frac{\hbar}{mr_1} = \frac{\hbar}{m\left(\frac{\hbar^2}{mke^2}\right)} = \frac{ke^2}{\hbar}$$

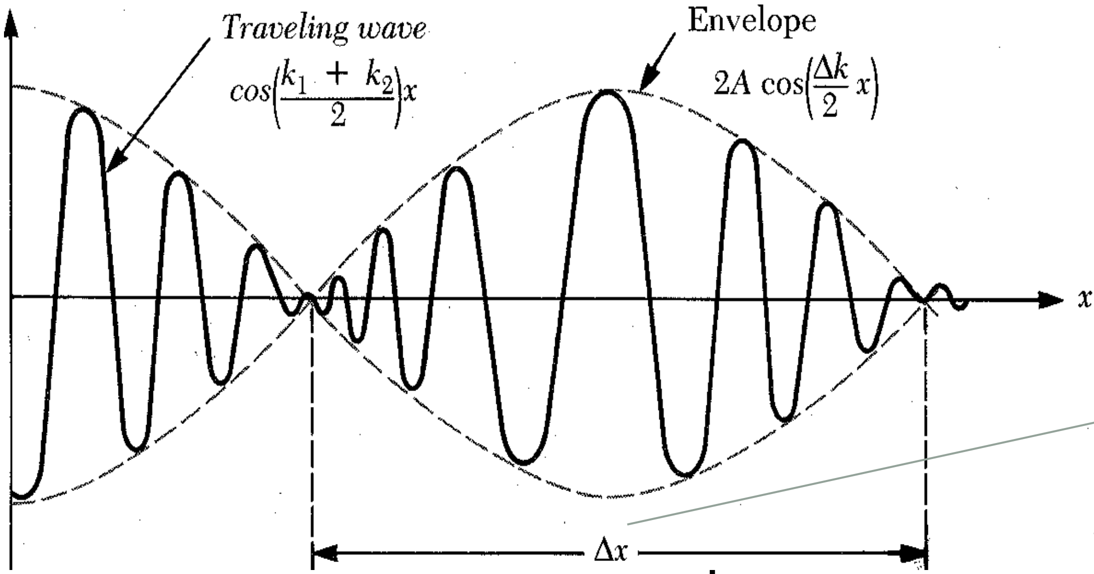
$$\alpha = \frac{ke^2}{\hbar c} \cong \frac{1}{137}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{ke^2}{\hbar c} = \frac{1{,}44ev.nm}{197{,}3ev.nm}$$



As linhas tracejadas não foram observadas nos espectros e estas transições não ocorrem (regras de seleção): $n_{\theta_i} - n_{\theta_f} = \pm 1$

Superposição de duas Ondas



Podemos interpretar a onda soma como sendo um envelope que modula lentamente uma onda com k e w médios

Δx é a largura do envoltório e é inversamente proporcional ao número de onda

$$\Psi(x,t) = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A\cos\frac{1}{2}(\Delta k x - \Delta\omega t)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

amplitude (envelope)

A velocidade de propagação das ondas individuais v_f=w/k

$$\frac{1}{2}(\Delta k x - \Delta\omega t) = \frac{1}{2}\Delta k\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right) = \frac{1}{2}\Delta k(x - v_g t)$$

velocidade de grupo

A velocidade de propagação do grupo (que é a velocidade do envoltório)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Em contraste com o pulso a combinação de ondas não é localizada no espaço

Ondas harmônicas que compõem um pacote de ondas. A velocidade é dada por:

$$v_f = \lambda f \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad \omega = 2\pi f$$

Velocidade de fase

$$v_f = \left(\frac{2\pi}{k}\right)\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$v_f = \left(\frac{\omega}{k}\right)$$

$$v_f.k = \omega$$

A velocidade de grupo esta relacionada a velocidade de fase por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

- A velocidade v_g pode ser > ou < que v_f

- Para o postulado de de Broglie

$$E = h\nu = \hbar\omega \qquad \mathrm{p} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \qquad \mathrm{E} = \frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}}$$

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{\hbar}\frac{\hbar}{p} = \frac{p^2}{2mp} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$

- A velocidade de fase não corresponde a velocidade da partícula

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v$$

- O pacote de onda se propaga com velocidade do elétron

O princípio da incerteza

Princípio de incerteza de Heisenberg, diz:
que é impossível determinar (fazer medidas) simultaneamente da posição e momento de uma partícula) (x e p_x, por exemplo) apresentam uma relação entre suas incertezas dada por

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{p}{h} = \frac{p}{\hbar}$$

Quanto mais bem definida a posição de uma partícula (pacote de onda mais estreito), menos definido será o momento dessa partícula (uma combinação maior de comprimentos de onda, e portanto de momentos será necessário)

O princípio de incerteza também pode ser enunciado em termos da energia e do tempo:
Das propriedades do pacote de onda, tem-se que:

$$\Delta \omega . \Delta t \geq \frac{1}{2}$$

$$E = h\nu = h\frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega$$

$$\Delta E . \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Probabilidade

Em 1925-1926 Max Born propôs como relacionar a Ψ (função de onda) com o comportamento das partículas que ela descreve:

A probabilidade que a partícula seja encontrada no instante t em uma coordenada entre x e x+dx é :

$$P(x)dx = \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx$$

$$P(x)dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$$

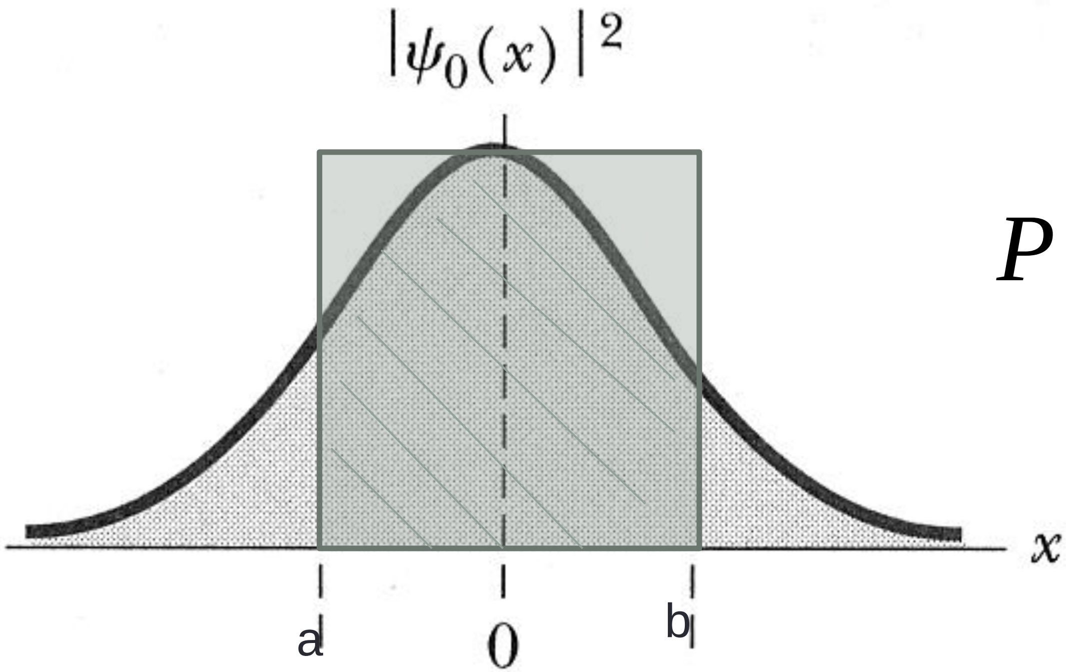
Ψ não é uma quantidade mensurável, mas o seu módulo ao quadrado é mensurável e é justamente a probabilidade por unidade de comprimento ou densidade de probabilidade P(x) para encontrar a partícula no ponto x no tempo t.

Já que a partícula deve ser encontrada em algum lugar ao longo do eixo x, a soma das probabilidade sobre todos os valores de x deve ser 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx = 1$$

Qualquer função que satisfaz esta equação é dita normalizada

A probabilidade de uma partícula estar no intervalo a=<x<=b esta relacionado área embaixo da curva de a até b de uma função densidade de probabilidade $\left|\Psi(x,t)\right|^2$



$$P = \int_{a}^{b} \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx =$$

o área embaixo da curva entre a e b

OBSERVÁVEIS:

Ψ não é uma quantidade mensurável

MAS como podemos relacionar a função de onda com grandezas observáveis????

COMO podemos obter a posição, o momento ou a energia de uma partícula a partir da função de onda (de maneira exata no mundo quântico)?????

VALORES ESPERADOS:

USANDO a interpretação probabilística de Bohr, podemos obter apenas os valores médios ou valores esperados das grandezas

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)dx$$

OPERADORES – OBSERVÁVEIS RESUMIDAMENTE

1- no caso da posição o operador é o próprio valor da posição:

$$\hat{x} \Leftrightarrow x$$

2 - no caso do momento, operador é dado por:

$$\hat{p} \Leftrightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\overline{p} =< p >= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x,t)dx$$

3 - no caso da energia, operador é dado por:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\overline{E} =< E >= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi(x,t)dx$$

OBSERVÁVEIS - VALOR ESPERADO

Temos então que o valor esperado de qualquer grandeza que depende da posição, do momento, da energia pode ser determinado através de:

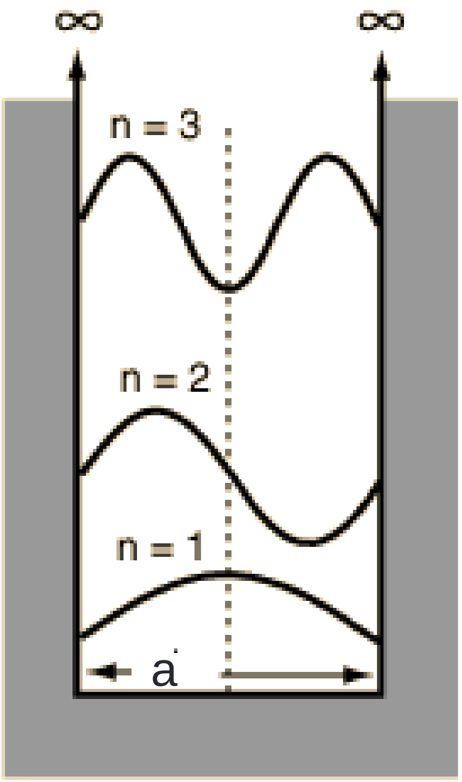
$$\bar{f}(x,p,E)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x,t)\,\hat{f}\left(x,-i\hbar\frac{\partial}{\partial x},i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)\Psi(x,t)dx$$

O valor médio de uma grandeza em mecânica quântica é normalmente chamado de valor esperado, que é o valor que se espera obter de uma medida daquela grandeza.

Observe que não esperamos necessariamente que o valor de uma medida que tenha uma alta probabilidade seja igual ao valor esperado.

Elétron em uma caixa

Podemos associar a probabilidade de localizar a partícula em um estado com menor energia usando uma função de onda para o elétron (associar ao elétron uma onda cossenoidal)



Função de onda

$$\Psi(x) = A\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}, n = 1,2,3...$$

A probabilidade que a partícula seja encontrada em um ponto na coordenada x entre –a/2 e a/2 é :

$$P(x) = |\Psi(x)|^2 dx$$

$$P(x) = \Psi^*(x)\Psi(x)dx$$

$$\Psi_n^2(x) = A^2\cos^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

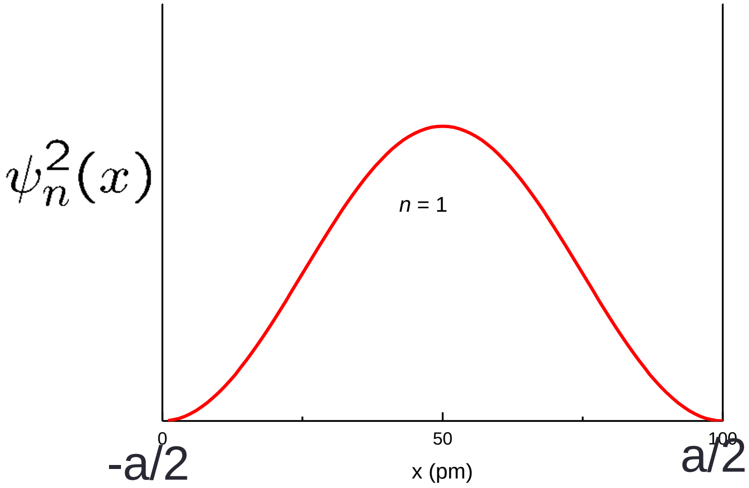
$$P(x) = \int_{-a/2}^{+a/2} A^2\cos^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

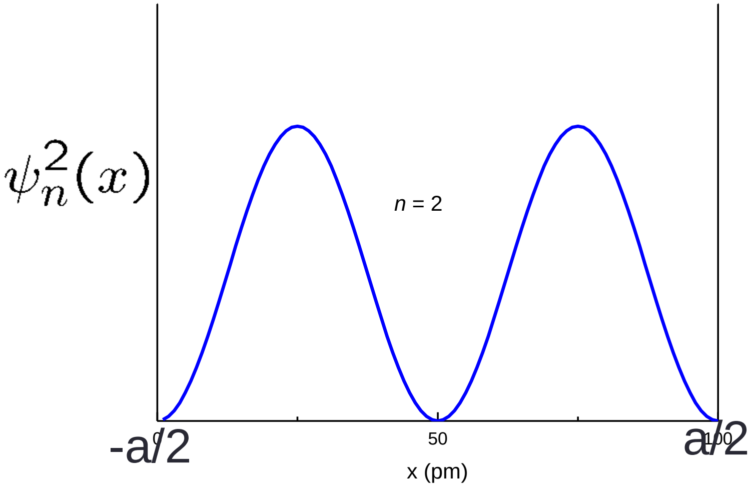
Onda fixa nas ponta separada por uma distância a, terá λ/2 comprimentos de onda:

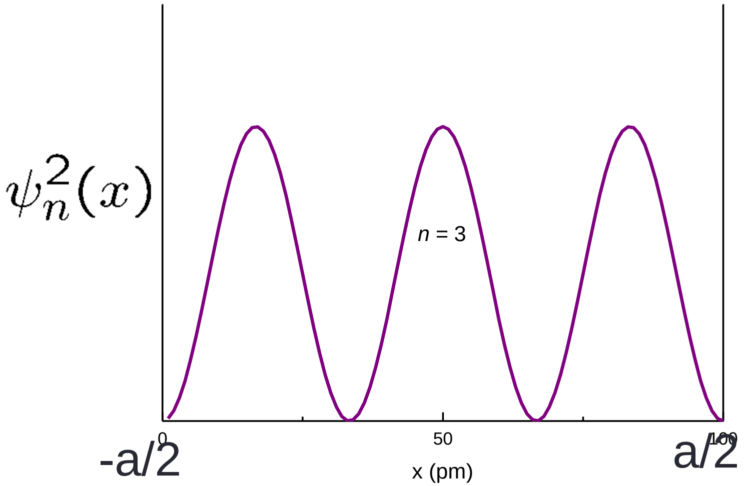
$$a = \frac{n\lambda}{2}$$

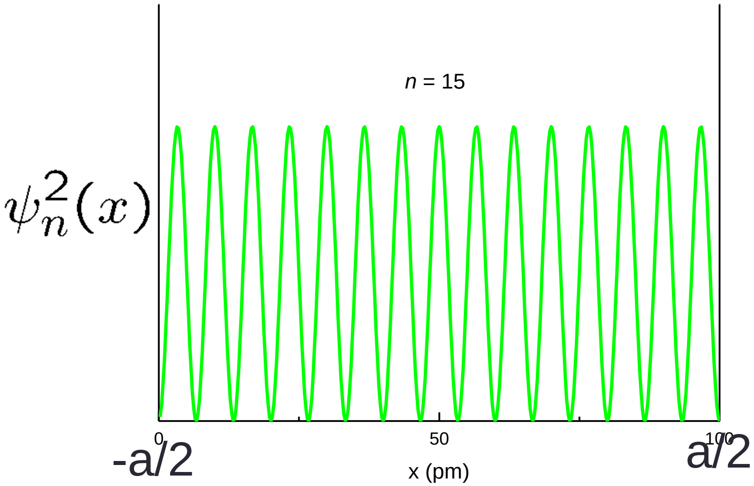
Elétron em uma caixa

$$\Psi_n^2(x) = A^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right), n = 1,2,3...$$









Já que a partícula deve ser encontrada em algum lugar ao longo do eixo x, a soma das probabilidade sobre todos os valores de x deve ser 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x)|^2 \, dx = 1$$

Qualquer função que satisfaz esta equação é dita normalizada

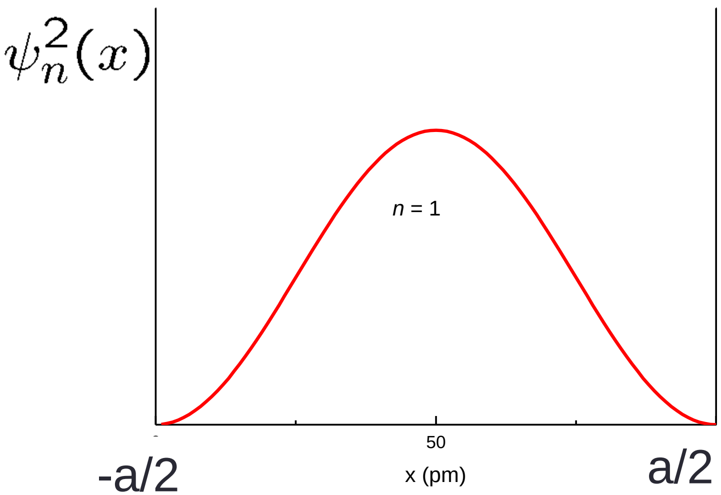
No nosso caso:

$$P(x) = \int_{-a/2}^{+a/2} A^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{a} x\right) dx = 1$$

Mudança de variável

$$\theta = \frac{\pi}{a} x$$

$$d\theta = \frac{\pi}{a} dx$$



$$P(x) = A^2 \frac{a}{\pi} \int_{-a/2}^{+a/2} \cos^2 \theta \, d\theta = 1$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$A^2 \frac{a}{\pi} \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{2}{a}}}$$

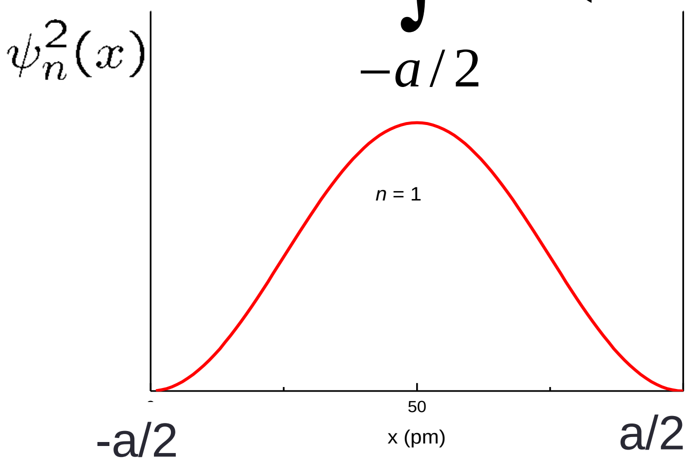
Constante de normalização

Qual o valor médio do momento para a função de onda do estado fundamental da partícula dentro desta caixa:

$$\Psi(x) = A\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, n = 1,2,3...$$

$$\bar{x} = \int_{-a/2}^{+a/2} xP(x,t)dx = \int_{-a/2}^{+a/2} \Psi^{*}(x,t)x\Psi(x,t)dx$$



$$\bar{x} = \frac{2}{a}\int_{-a/2}^{+a/2} x\cos^2\left(\frac{\pi}{a}x\right)dx$$

Função ímpar

Função par

Como a integral é sobre um valor ímpar em uma região simétrica a integral é nula

$$\boxed{\bar{x} = \langle x \rangle = 0}$$

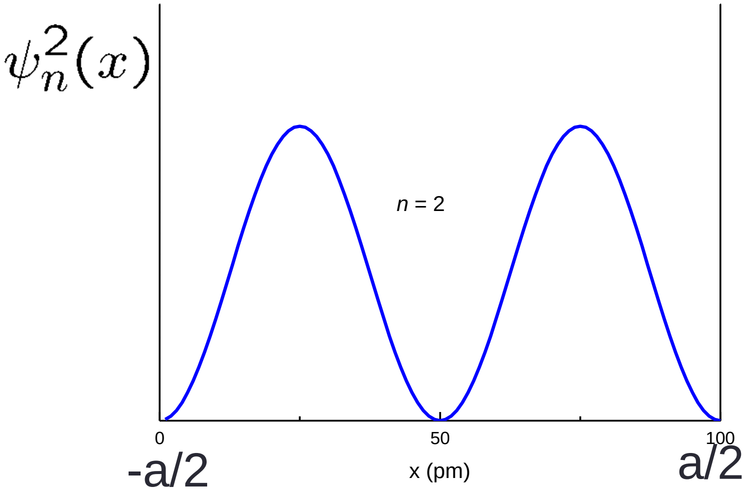
O valor médio da posição do elétron na caixa no estado n=1 é em x=0

O valor mais provável de x, é dado pelo valor de x onde P(x) é máxima:

$$x_{mp} = \frac{L}{2}$$

Elétron em uma caixa

$$\Psi_n^2(x) = A^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{a}x\right), n = 1,2,3...$$



$$\bar{x} = A^2 \int_{-a/2}^{+a/2} x \cos^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right) dx$$

Função ímpar Função par

Como a integral é sobre um valor ímpar em uma região simétrica a integral é nula

$$x_{mp} = -\frac{a}{4} e \frac{a}{4}$$

$$\bar{x} = < x > = 0$$

O valor médio da posição do elétron na caixa no estado n=2 é em x=0

Observe que não esperamos necessariamente que o valor de uma medida que tenha uma alta probabilidade seja igual ao valor esperado.

Qual o valor médio do momento ao quadrado da posição da partícula dentro desta caixa:

$$\Psi(x) = A\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

$$-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}, n = 1,2,3...$$

Sabemos que:

$$\hat{p} \Leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \qquad \hat{p}^2 \Leftrightarrow \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi = -\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = -\hbar^2\left(-\frac{\pi^2}{a^2}\right)\psi$$

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \hbar^2\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \int_{-a/2}^{+a/2}\psi^*\psi dx$$

vale 1

$$\boxed{\left\langle p^2 \right\rangle = \hbar^2\frac{\pi^2}{a^2}}$$

O momento médio quadrático:

$$\boxed{\sqrt{< p^2 >} = \frac{\hbar\pi}{a}}$$

Que é uma medida das flutuações em torno da média, pois a partícula pode ser encontrada com momento

$$p = +\sqrt{2mE}$$

ou

$$p = -\sqrt{2mE}$$

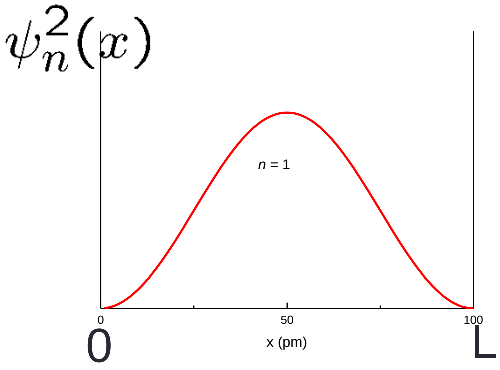
Exercício:

Uma partícula dentro da caixa
De tamanho L

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} sen\left(\frac{\pi}{L}x\right), 0 \le x \le L,$$

A densidade de probabilidade é dado por:

$$P(x) = \left|\Psi_n^2(x)\right|$$



$$\bar{x} = \langle x \rangle = \frac{L}{2}$$

Qual a probabilidade de encontrar a partícula em um pequeno intervalo ente x e x+ΔX

$$P(entre.xex + \Delta x) \approx \left|\psi(x)\right|^2 \Delta x$$

$$P(0.50L \le x \le 0.51L) \approx \left|\psi(0.50L)\right|^2 \Delta x \approx$$

$$\frac{2}{L} sen^2\left(\frac{\pi}{2}\right) x0{,}01L = 0.02 = 2\%$$

$$P(0.75L \le x \le 0.76L) \approx$$

$$\frac{2}{L} sen^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) x0{,}01L \approx 0.01 = 1\%$$