

## Introdução a análise numérica de Sinais

Prof. Sérgio S Furuié  
LEB/PTC/EPUSP

Abordagem: motivação – intuição – formalização - prática



## Resumindo: sinais digitais

- Sinais digitais são séries numéricas, uniformemente amostradas ou não.
- Para quantificação adequada
  - informações temporais e calibração da amplitude são necessárias

Séries numéricas de ECG => valores no mundo real (mV e s)?  
ECG=[0 2 4 4 2 0 -2 12 45 166 50 33 -2 0 ...]<sup>T</sup>

1 unidade na amplitude: 1/100 mV  
Frequencia de amostragem: 100 Hz

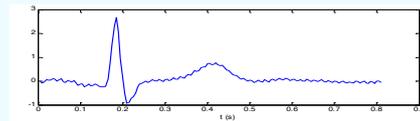


Revisão de alguns conceitos de cálculo numérico



## Praticando: exercícios

- Dado um sinal digital temporal,
- $s[n]$ ,  $n=0, N$ 
  - Calcular a área considerando valores positivos e negativos
  - Calcular a maior taxa de variação em módulo



Dada uma série numérica,  
como estimar numericamente áreas e derivadas ?



## Área

$s[n]=[2 \ 0 \ -2 \ 10 \ 40 \ 150 \ -50 \ 30 \ -2 \ 0]$   $N=9$   
Valores em mV. Frequência de amostragem = 100 Hz

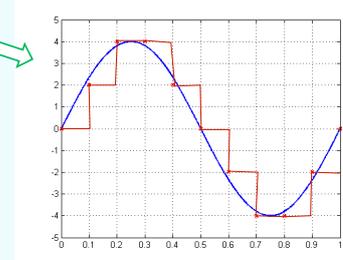
- Estimativa da integral – cálculo numérico
  - Soma acumulada (interpolação de ordem 0)
  - Trapezoidal ou linear (ordem 1)
  - Simpson 1/3 (ordem 2)
  - Simpson 3/8 (ordem 3)



## Área por soma acumulada

- Ordem 0

$$area = \Delta T \cdot \sum_{n=0}^N s_n$$



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

### Trapezoidal / Interpolação linear

$area_{0,1} = h \cdot \frac{(s_0 + s_1)}{2}$   
 $area_{total} = \frac{h}{2} \cdot (s_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} s_k + s_N)$   
 $erro = O(h^2)$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 7

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

### Simpson 1/3

$area_{0,2} = h \cdot \frac{(s_0 + 4s_1 + s_2)}{3}$   
 $area_{total} = \frac{h}{3} \cdot (s_0 + 4 \sum_{k=1}^{N/2} s_{2k-1} + 2 \sum_{k=1}^{N/2-1} s_{2k} + s_N)$   
 $erro = O(h^4)$

Origem dos algoritmos:  
 • Expansão polinomial de Gregory-Newton  
 • Integração analítica do polinômio (Newton-Cotes)  
 • Substituição dos valores amostrados

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 8

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

### Expansão polinomial de Gregory-Newton

$s(x_i)$ , espaçamento uniforme igual a  $h$   
 $i = 0, \dots, N-1$   
 $s(x) = s(x_0) + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_N(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{N-1})$

Substituindo-se, sequencialmente, os valores conhecidos  $s(x_i)$ , tem-se  $a_i$ :

$s(x_1) = s(x_0) + a_1(x_1 - x_0) + 0$   
 $\therefore a_1 = \frac{s(x_1) - s(x_0)}{h}$   
 $s(x_2) = s(x_0) + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) + 0$   
 $\therefore a_2 = \frac{s(x_2) - 2s(x_1) + s(x_0)}{2h^2}$   
 ...

truncando p/ precisão desejada, obtém-se analiticamente:  $I = \int_{x_0}^{x_N} s(x) \cdot dx$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 9

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

### Obtendo o algoritmo trapezoidal

$s(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$   
 $s(x) = s_0 + a_1(x-x_0) + R(h^2)$   
 no qual:  
 $a_1 = \frac{s_1 - s_0}{h}$   
 $area_{0,1} = \int_{x_0}^{x_1} s(x) \cdot dx = \int_{x_0}^{x_1} [s_0 + a_1(x-x_0) + R(h^2)] \cdot dx$   
 $= [(s_0 + a_1(-x_0))x]_{x_0}^{x_1} + [a_1 \frac{x^2}{2}]_{x_0}^{x_1}$   
 considerando:  $h = x_1 - x_0$ , e substituindo, resulta:  
 $area_{0,1} = \frac{(s_0 + s_1)h}{2}$

O trapezoidal usa os 2 primeiros Termos da expansão polinomial, Portanto vamos integrar de 2 em 2 pontos:  $s_0, s_1$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 10

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

### Exercício

- Obter o algoritmo de integração numérica de Simpson 1/3
- Dica: integrar de 3 em 3 pontos usando a expansão com os primeiros 3 termos (interpolação de ordem 2)

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 11

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

### Simpson 3/8

$area_{0,3} = \frac{3h}{8} (s_0 + 3s_1 + 3s_2 + s_3)$   
 $area_{total} = \frac{3h}{8} \cdot (s[0] + 3 \sum_{k=1}^{N/3} (s[3k-2] + s[3k-1]) + 2 \sum_{k=1}^{N/3-1} s[3k] + s[N])$   
 $erro = O(h^4)$

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 12

## Taxa de variação (derivada)

$s[n]=[2 \ 0 \ -2 \ 10 \ 40 \ 150 \ -50 \ 30 \ -2 \ 0]$   $N=9$   
Valores em mV. Frequência de amostragem = 100 Hz

- Estimativa da derivada dada uma série

- Pela diferença finita central
- Pela diferença finita *backward*
- Pela diferença finita *forward*

$$\delta s_i = s_{i+\frac{1}{2}} - s_{i-\frac{1}{2}}$$

$$\nabla s_i = s_i - s_{i-1}$$

$$\Delta s_i = s_{i+1} - s_i$$

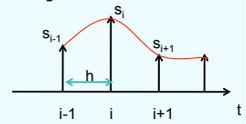
Origem dos algoritmos:

- Expansão em série de Taylor
- Truncamento na precisão desejada
- Substituição dos valores amostrados



## Derivada baseada em Diferença Finita Central

Algoritmo depende da precisão desejada



$$\frac{ds_i}{dx} = \frac{1}{2h}(s_{i+1} - s_{i-1}) + O(h^2)$$

$$\frac{d^2s_i}{dx^2} = \frac{1}{h^2}(s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1}) + O(h^2)$$

Com erro menor :

$$\frac{ds_i}{dx} = \frac{1}{12h}(-s_{i+2} + 8s_{i+1} - 8s_{i-1} + s_{i-2}) + O(h^4)$$

$$\frac{d^2s_i}{dx^2} = \dots$$



## Obtenção do algoritmo: derivada

$f(x_i)$ , espaçamento uniforme igual a  $h$

$i = 0, \dots, N$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R^{k+1}$$

Aplicando Taylor em  $f(x_{i+1})$  e  $f(x_{i-1})$  e considerando  $h = x_{i+1} - x_i$

$$f_{i+1} = f_i + f'_i h + \frac{f''_i}{2} h^2 + \frac{f'''_i}{6} h^3 + R^4$$

$$f_{i-1} = f_i + f'_i(-h) + \frac{f''_i}{2} h^2 + \frac{f'''_i}{6}(-h^3) + R^4$$

$$\Rightarrow f_{i+1} - f_{i-1} = 2hf'_i + \frac{f'''_i}{3} h^3 + R^5$$

$$\therefore f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + O(h^2)$$



## Exercício em aula

- Obter a derivada de  $s[n]$ , para  $n=2$

$s[n]=[2 \ 0 \ -2 \ 10 \ 40 \ 150 \ -50 \ 30 \ -2 \ 0]$   $N=9$   
Valores em mV. Frequência de amostragem = 100 Hz

$$\frac{ds_i}{dx} = \frac{1}{2h}(s_{i+1} - s_{i-1})$$

E se  $n=0$  ou  $n=9$  ?



## Plano de aula

- Motivação
- Exemplos em sinais e imagens
- Tipos e características de ADCs
- Efeito no domínio da frequência
- Interpolação



## Transformada de Fourier

- O que é?
- Para que serve?
- Base complexa. Por que?
- O que representa o módulo e a fase?
- Por que a distinção entre contínuo e discreto?



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

Domínio do tempo	Domínio da frequência
Contínuo, aperiódico $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w) \cdot e^{j\omega t} dw$	Contínuo, aperiódico $X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$ $w=2\pi f$
Contínuo, periódico(T) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{jk\omega_0 t}$	Discreto( $2\pi/T$ ), aperiódico $w_0 = \frac{2\pi}{T}$ $a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot e^{-j\omega_0 k t} dt$
Discreto ( $n\Delta$ ), aperiódico $x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\Omega) \cdot e^{j\Omega n} d\Omega$ $f_s = 1/\Delta$	Contínuo, periódico( $2\pi/\Delta$ ) $\Omega = 2\pi f/f_s$ $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}$
Discreto( $n\Delta$ ), periódico(T) $x[n] = \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_k \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$	Discreto( $2\pi/T$ ), periódico( $2\pi/\Delta$ ) $a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} x[n] \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$

InCor/EPUSP SF 20

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos

### Bibliografia

- Apostila de Processamento de Sinais de Tempo Discreto. C Itiki, V H Nascimento
- Biomedical Signal Analysis. R.M. Rangayyan. Wiley Interscience, 2002
- Signals and Systems (2nd Edition) A.V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab Hardcover: 957 pages. Publisher: Prentice Hall; 1996. ISBN-10: 0138147574.
- Biosignal and Medical Image Processing. John L. Semmlow. CRC Press, 2009

EPUSP PTC/LEB - S.Furule 21