

Vimos anteriormente que o campo magnético em meios materiais é modificado pela magnetização do meio, ou seja pelo efeito de dipolos magnéticos induzidos (ou permanentes) no meio. Definimos o campo \vec{H} , intensidade de campo magnético, como o campo criado somente pelas correntes de condução nais no meio, ou seja,

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c,$$

onde \vec{j}_c são as correntes nais. O campo indução magnética \vec{B} é dado por uma constante (μ_0) vezes a soma do campo \vec{H} com o campo magnético \vec{M} , ou seja

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Portanto, se a magnetização do meio for contrária a \vec{H} , o campo \vec{B} diminui com relação a seu valor no vácuo. Este efeito é denominado diamagnetismo. Por outro lado, se \vec{M} estiver no mesmo sentido de \vec{H} , o campo \vec{B} será maior que seu valor no vácuo. Este efeito é denominado paramagnetismo.

Uma outra forma de caracterizar os efeitos diamagnético e paramagnético é através da susceptibilidade magnética. Nós vimos que para materiais lineares, podemos escrever ^{uma} relação entre \vec{M} e \vec{H} da forma

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H},$$

onde χ_m é a susceptibilidade magnética do meio. Lembrando que \vec{M} é simplesmente a densidade de dipolos magnéticos no meio, isto é,

$$\vec{M} = N \vec{m},$$

onde N é a densidade de moléculas (átomos) no meio e \vec{m} o momento do dipolo

7\Ub[YXk]h 'h Y89AC'J9FG=CB'cZ758!?5G'D8 : !9X]cf'fl Hd.#k k k 'WUX_Ug'Wa L"

7\Ub[YXk]h 'h Y89AC'J9FG=CB'cZ758!?5G'D8 : !9X]cf'fl Hd.#k k k 'WUX_Ug'Wa L"

7\Ub[YXk]h 'h Y89AC'J9FG=CB'cZ758!?5G'D8 : !9X]cf'fl Hd.#k k k 'WUX_Ug'Wa L"

2.

magnético médio das moléculas, temos que a relação linear entre \vec{B} e \vec{H} simplesmente significa que os dipolos das moléculas tendem a se orientar com \vec{H} de forma que o momento médio aumenta. Substituindo esta relação linear na expressão para \vec{B} , temos

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m).$$

Esta relação entre \vec{B} e \vec{H} é denominada relação constitutiva do meio.

Na tabela abaixo (Tabela 9.1 do Reitz, Milford & Christy) é dada a susceptibilidade magnética de vários materiais, na temperatura ambiente.

OBS: estes valores estão em CGS; para obter em MKS multiplique χ_m por 4π

Material	χ_m	χ_m , massa, m^3/kg
Alumínio	$2,1 \times 10^{-5}$	$0,77 \times 10^{-8}$
Bismuto	$-16,4 \times 10^{-5}$	$-1,68 \times 10^{-8}$
Cobre	$-0,98 \times 10^{-5}$	$-0,11 \times 10^{-8}$
Diamante	$-2,2 \times 10^{-5}$	$-0,62 \times 10^{-8}$
Cloreto de Gadolíneo (GdCl_3)	$-603,0 \times 10^{-5}$	$133,3 \times 10^{-8}$
Ouro	$-3,5 \times 10^{-5}$	$-0,18 \times 10^{-8}$
Magnésio	$1,2 \times 10^{-5}$	$0,68 \times 10^{-8}$
Mercúrio	$-2,8 \times 10^{-5}$	$-0,21 \times 10^{-8}$
Prata	$-2,4 \times 10^{-5}$	$-0,23 \times 10^{-8}$
Sódio	$0,84 \times 10^{-5}$	$0,87 \times 10^{-8}$
Titânio	$18,0 \times 10^{-5}$	$4,01 \times 10^{-8}$
Tungstênio	$7,6 \times 10^{-5}$	$0,40 \times 10^{-8}$
Dióxido de carbono (1 atm)	$-1,19 \times 10^{-6}$	$-0,60 \times 10^{-8}$
Hidrogênio (1 atm)	$-0,22 \times 10^{-6}$	$-2,48 \times 10^{-8}$
Nitrogênio (1 atm)	$-0,67 \times 10^{-6}$	$-0,54 \times 10^{-8}$
Oxigênio (1 atm)	$193,5 \times 10^{-6}$	$135,4 \times 10^{-8}$

Dois características importantes dos materiais listados nesta tabela são importantes realçar. Primeiro, para alguns materiais $\chi_m < 0$, ou seja, o campo magnético no meio é menor que no vácuo. Estes materiais são denominados materiais diamagnéticos. Para outros materiais $\chi_m > 0$, ou seja, o campo magnético no meio é maior que no vácuo. Estes materiais são denominados paramagnéticos. Na realidade, o efeito diamagnético é uma consequência direta da lei de indução de Faraday (incluindo a lei de Lenz) e está presente em todos os materiais. Nas matérias tais que $\chi_m > 0$, o efeito paramagnético domina o efeito diamagnético.

3

Uma segunda característica importante é que o valor absoluto de χ_m é muito pequeno, ou seja, os efeitos diamagnético e paramagnético são muito fracos. O efeito diamagnético é ~~praticamente~~ ^{praticamente} independente da temperatura; no entanto, o efeito paramagnético aumenta com o decréscimo da temperatura. Por isso, na tabela acima reforcam que os valores são válidos na temperatura ambiente. Alguns materiais diamagnéticos podem se tornar paramagnéticos quando esfriados.

Naturalmente existe um caso extremo de forte diamagnetismo, correspondente a $\chi_m = -1$; são os supercondutores. Para estes materiais $B=0$ dentro do material, correspondendo a uma blindagem magnética perfeita. O efeito de exclusão do campo B é conhecido como Efeito Meissner.

Vimos também que existem materiais para os quais $\mu \gg \mu_0$ e é uma função não linear de H . Estes são os materiais ferromagnéticos. Nos materiais ferromagnéticos um pequeno campo magnético externo produz uma magnetização tão forte que praticamente supera em ordens de grandeza o campo magnético externo. O efeito ferromagnético, que é observado em materiais como ferro e Níquel é devido o momento de dipolo magnético dos elétrons nas camadas internas dos átomos.

Neste capítulo vamos fazer uma descrição sucinta da teoria microscópica dos efeitos magnéticos na matéria, como fitores para dielétricos. Porém esta teoria é bem mais complicada no caso do magnetismo, como já suspeitamos pela existência de três efeitos distintos. Em essência, os três efeitos são causados pelos momentos magnéticos devido ao movimento orbital dos elétrons em torno dos núcleos e ao momento angular intrínseco, ou spin, dos elétrons. No entanto, os mecanismos responsáveis pelos diferentes efeitos são distintos e, na realidade, só podem ser apropriadamente descritos utilizando-se a Mecânica Quântica. Nós vamos fazer uma descrição clássica mas mencionaremos as correções necessárias calculadas quanticamente.

Exercício: Uma das características de materiais lineares, ou seja, que satisfazem a relação $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$, com χ_m constante, é que só existe corrente volumétrica de polarização \vec{j}_m no material se a corrente real de cargas livres não for nula, isto é, $\vec{j}_c \neq 0$. Esta propriedade nem sempre é percebida mas é importante. Utilizando a definição de \vec{j}_m , $\vec{j}_m = \nabla \times \vec{M}$ e as equações $\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c$, $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H}$, mostra que

$$\vec{j}_m = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{j}_c.$$

Portanto $\vec{j}_m = 0$ quando $\vec{j}_c = 0$. Este resultado só se aplica ao caso de correntes estacionárias e, naturalmente, para materiais não ferromagnéticos

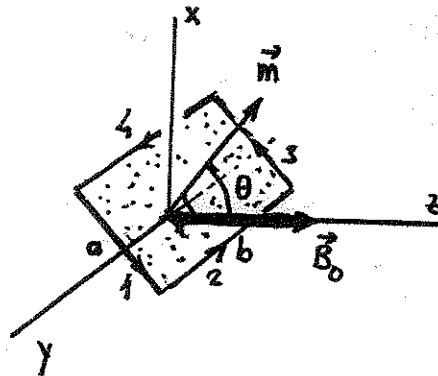
Energia Potencial de Um Dipolo Magnético num Campo Magnético

Externo

Vamos agora derivar um resultado que precisaremos mais tarde no estudo do paramagnetismo. Numa série de exercícios anterior, calculamos o torque sobre uma espira de corrente num campo magnético externo. Vamos refazer este problema para auxiliar aqueles que não o fizeram corretamente.

Consideremos uma espira retangular de lados a e b , na qual circula uma corrente I , inclinada com relação a um campo magnético externo, conforme mostra a figura. O problema é calcular o torque resultante sobre a espira.

O torque sobre cada lado da espira é dado por



$$\Delta \vec{r} = \vec{r} \times \Delta \vec{F}$$

onde $\Delta \vec{F}$ é a força devida à interação com o campo magnético:

$$\Delta \vec{F} = I (\Delta \vec{l} \times \vec{B}_0)$$

Vamos considerar a espira suficientemente pequena de forma que possamos considerar \vec{r} , no cálculo de $\Delta \vec{r}$ para cada lado como constante e igual ao vetor posição ao ponto médio de cada lado. Assim, para o lado 1 temos:

$$\vec{r} = \frac{b}{2} \hat{a}_y$$

$$\Delta \vec{l} = -a \cos \theta \hat{a}_x + a \mu \sin \theta \hat{a}_z$$

Então:

$$\Delta \vec{r}_1 = I \frac{b}{2} \hat{a}_y \times [(-a \cos \theta \hat{a}_x + a \mu \sin \theta \hat{a}_z) \times B_0 \hat{a}_z]$$

$$= \frac{I ab B_0}{2} \underbrace{\cos \theta \hat{a}_y \times (\hat{a}_x \times \hat{a}_z)}_{=0}$$

$$\therefore \Delta \vec{r}_1 = 0$$

Da mesma forma podemos mostrar que $\Delta \vec{r}_3 = 0$ (para o lado 3, só mudam o sentido de \vec{r} e de $\Delta \vec{l}$ com relação ao lado 1, tal que o resultado fica o mesmo)

Para o lado 2 temos:

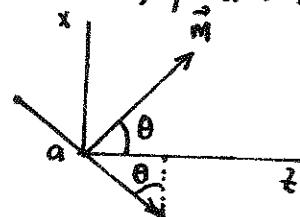
$$\vec{r} = \frac{a}{2} (-\cos \theta \hat{a}_x + \mu \sin \theta \hat{a}_z)$$

$$\Delta \vec{l} = -b \hat{a}_y$$

Então

$$\Delta \vec{r}_2 = I \frac{a}{2} (-\cos \theta \hat{a}_x + \mu \sin \theta \hat{a}_z) \times (-b \hat{a}_y \times B_0 \hat{a}_z)$$

$$\therefore \Delta \vec{r}_2 = -\frac{I ab B_0}{2} \mu \sin \theta \hat{a}_y$$



O resultado será o mesmo para o lado 4, porque a única diferença com relação ao lado 2 é a mudança dos sentidos de \vec{r} e $\vec{\theta}$. Assim

$$\Delta \vec{\tau} = \Delta \vec{\tau}_2 + \Delta \vec{\tau}_4 = - I(ab) B_0 \mu \omega \hat{a}_y$$

Como $I(ab) = |\vec{m}|$, este resultado pode ser escrito na forma geral

$$\boxed{\Delta \vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0}$$

Embora tenha sido obtido para o caso particular de uma espiga retangular, este resultado é geral.

Este torque atua no sentido de alinhar \vec{m} com \vec{B}_0 . Assim, se \vec{m} não estiver alinhado com \vec{B}_0 , existe uma energia potencial no sistema que pode ser convertida em trabalho (isto, aliás, é o princípio de funcionamento de um motor elétrico). Para calcular esta energia potencial é igual a menos o trabalho realizado pelo torque, ou seja

$$dU = - \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$$

$$d\vec{\theta} = d\theta \hat{a}_y$$

$$dU = - (\vec{m} \times \vec{B}_0) \cdot d\theta \hat{a}_y = - (m B_0 \mu \omega \hat{a}_y) \cdot d\theta \hat{a}_y$$

$$dU = m B_0 \mu \omega d\theta$$

$$\Delta U = U(\theta) - U(0) = \int_0^\theta m B_0 \mu \omega d\theta = - m B_0 \omega \theta + m B_0$$

Então

$$U = - m B_0 \omega \theta$$

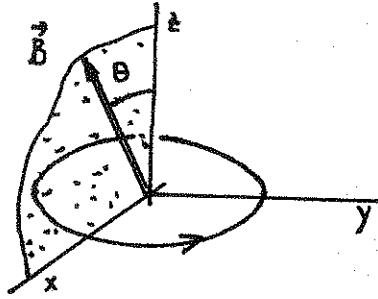
ou, escrevendo numa forma geral

$$\boxed{U = - \vec{m} \cdot \vec{B}_0}$$

Exercício: Mostre que o resultado que obtivemos para o torque sobre uma espira retangular num campo magnético externo, isto é,

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0,$$

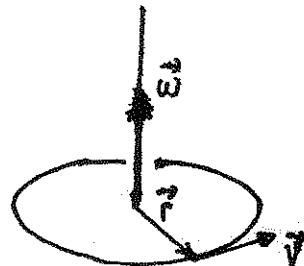
é válido também para uma espira circular de corrente. Neste caso, é mais conveniente considerar a espira no plano xy e o campo \vec{B} inclinado com relação ao eixo z , conforme mostra a figura.



Relação entre Torque e Momento Angular no Caso de Rotação com Velocidade Angular Constante.

Vamos agora relembrar uma relação da mecânica que será importante para descrever o efeito paramagnético. Consideremos um corpo girando com velocidade angular $\vec{\omega}$ constante em torno de um eixo. A relação entre a velocidade angular e a velocidade tangencial \vec{v} de um ponto l dada por

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$



O momento angular \vec{L} é dado por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

e a relação entre o torque $\vec{\tau}$ e o momento angular é

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$

Neste caso ($\vec{\omega} = \text{const.}$) temos então

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{v}) = m \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{= \vec{0}} + m \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{= \vec{0}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \vec{r} \times \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m \vec{r} \times \left(\underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}_{= 0} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{= 0} \right)$$

$$\therefore \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{v})$$

8.

Usando a identidade vetorial $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + \vec{B} \times (\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{C} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = 0$, temos

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{v})}_{\vec{L}/m} + \underbrace{\vec{v} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\vec{0}} = \frac{1}{m} \vec{\omega} \times \vec{L}.$$

Portanto

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}}$$

Consequências deste resultado:

1. A amplitude do momento angular permanece constante durante o movimento de rotação com $\vec{\omega} = \text{const.}$

$$\vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dL^2}{dt} = \vec{L} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{L}) = 0$$

$$\therefore L^2 = \text{const.}$$

2. Se o corpo estiver girando em torno de um eixo principal, o torque resultante sobre o corpo é nulo.

Quando o corpo gira em torno de um eixo principal, o momento angular é simplesmente dado por

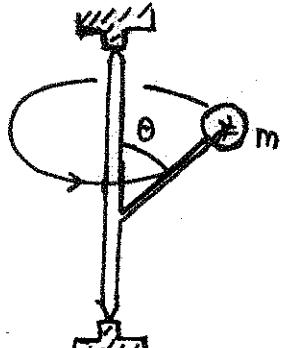
$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

onde I é o momento de inércia do corpo. Neste caso

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times (I\vec{\omega}) = I\vec{\omega} \times \vec{\omega} = 0$$

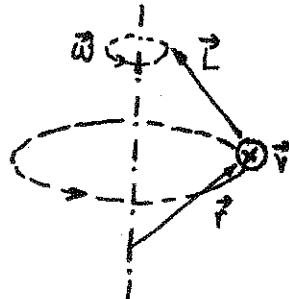
3. Se o corpo estiver girando em torno de um eixo que não seja principal, é necessário um torque resultante para manter $\vec{\omega} = \text{const.}$, neste caso, $|L| = \text{const.}$ ~~mas L~~ mas \vec{L} precessa em torno do eixo de rotação.

Um exemplo de um corpo girando em torno de um eixo não principal é mostrado na figura ao lado. Uma massa m



preso por uma haste gira em torno de um eixo vertical, em relação ao qual a haste forma um ângulo θ . O momento angular $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{J}$ neste caso não fica paralelo a $\vec{\omega}$. É fácil de ver que o ângulo entre \vec{L} e $\vec{\omega}$ permanece constante.

$$\vec{\omega} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \cdot \vec{L}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{L}) = 0$$

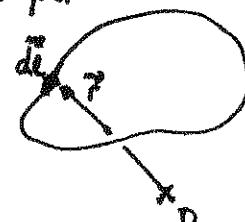


Portanto, durante o movimento de rotação, o momento angular \vec{L} precessa em torno do eixo vertical sem alterar o ângulo com $\vec{\omega}$.

Momento de Dipolo Magnético de uma Distribuição de Cargas em Movimento

Vamos agora derivar um resultado da mecânica clássica que relaciona o momento de dipolo magnético com o momento angular de uma carga em movimento. A expressão geral para o momento de dipolo magnético de uma espira de corrente de forma qualquer é dada por

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint \vec{r} \times d\vec{l}$$



Esta expressão pode ser reescrita de forma a envolver uma integral sobre a densidade de corrente. Para isto basta lembrar que num fio de ~~transversal~~ transversal pequena temos $\vec{j} dV = I d\vec{l}$; então

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times (Id\vec{l}) \quad \therefore \quad \boxed{\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times (\vec{j}(r) dV)}$$

Consideremos agora um conjunto de cargas pontuais em movimento. A densidade de corrente do conjunto de cargas é dada por

$$\vec{j}(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{v}_i,$$

onde q_i , \vec{r}_i e \vec{v}_i são respectivamente a carga, posição e velocidade de cada do conjunto. Substituindo esta expressão na integral para \vec{m} , temos

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \left(\sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{v}_i \right) dV = \frac{1}{2} \sum_i q_i \underbrace{\left[\int \vec{r} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) dV \right]}_{\vec{r}_i} \times \vec{v}_i$$

$$\therefore \vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i .$$

Mas $\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \vec{L}_i / m_i$; então $\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2} \sum_i \frac{q_i}{m_i} \vec{L}_i}$. Se as cargas forem todas iguais, isto é, $q_i = q$ e $m_i = m_q$ para todas as cargas, temos:

$$\vec{m} = \frac{q}{2m_q} \sum_i \vec{L}_i = \frac{q}{2m_q} \vec{L},$$

onde \vec{L} é o momento angular total do sistema de partículas ($\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$).

O momento angular dos átomos é devido principalmente aos elétrons; neste caso temos

$$q = -e \quad \text{e} \quad m_q = m_e$$

então

$$\boxed{\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}}$$

Esta relação é válida, mesmo considerando efeitos quânticos, para o movimento orbital dos elétrons em torno do núcleo. No entanto, os elétrons possuem também um momento angular intrínseco denominado 'spin', que é representado pelo símbolo \vec{s} . A relação entre o momento de dipolo magnético devido a este momento angular intrínseco e \vec{s} só pode ser descrita corretamente pela mecânica quântica relativística; o resultado é dado por

$$\boxed{\vec{m}_s = -\frac{e}{m_e} \vec{s}},$$

ou seja, o dobro do resultado previsto clássicamente.

Em qualquer átomo existem, falando de forma genérica, vários elétrons e várias combinações de movimento orbital e de spin dos elétrons que dão um momento angular resultante e um momento de dipolo magnético resultante. Apesar de não haver nenhuma razão clássica porque isto deveria acontecer, é sempre verdade na mecânica quântica que, para um átomo isolado a direção de \vec{m} é sempre exatamente oposta a \vec{L} . A razão entre

$|m|$ e $|\vec{L}|$ é um número qualquer entre e/m_e e $e/2m_e$. Então, em geral se escreve que a relação entre o momento de dipolo magnético e momento angular resultante de um átomo isolado é dada por

$$\vec{m} = -g \left(\frac{e}{2m_e} \right) \vec{L}$$

Onde \vec{L} inclui também o efeito do spin e g é um número entre 1 e 2, denominado fator g de Landé (algumas referências chamam o fator $e/2m_e$ de fator gromagnético e também o representam por g ; por isso é necessário verificar a definição exata quando consultar outras referências). O fator g é uma característica de cada átomo e é calculado quanticamente.

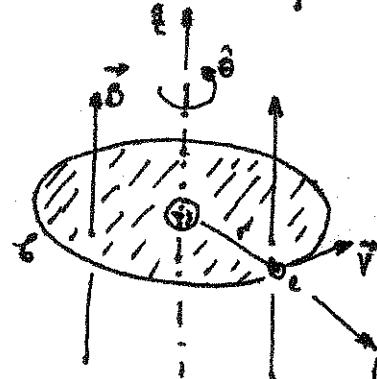
Teoria Clássica do Efeito Diamagnético (Langevin)

O efeito diamagnético é uma consequência da lei de indução de Faraday, segundo a qual uma corrente é induzida numa espira de corrente sempre que o fluxo de campo magnético através da superfície da espira varre devido a uma excitação externa. O sentido da corrente é tal que o campo por ela produzido se opõe à variação externa (lei de Lenz).

Consideremos um átomo isolado formado por um núcleo e um elétron. Suponhamos que um campo magnético externo uniforme seja aplicado na região do átomo, com sua amplitude aumentando lentamente, ou seja, o tempo característico de variação do campo externo seja muito maior que o período orbital do elétron. Enquanto \vec{B} varia, é gerado um campo elétrico \vec{E}

em torno de qualquer circuito fechado pela lei da indução magnética. Este campo é obtido a partir da lei de Faraday:

$$\oint_{\text{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



Vamos escolher para o circuito ℓ um percurso circular de raio r ~~con-~~
centroco com o nódulo, como mostrado na figura. Como por simetria $|\vec{E}|$ deve
ser constante neste circuito e, por outro lado, \vec{B} é uniforme, temos

$$2\pi r E = - \frac{d}{dt} (B\pi r^2),$$

ou seja,

$$\vec{E} = - \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \hat{i}_0.$$

Este campo elétrico fará agir sobre o elétron uma força adicional, $\vec{F} = -e\vec{E}$,
e portanto um torque dado por

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{er^2}{2} \frac{dB}{dt} \hat{i} \times \hat{i}_0 = \frac{er^2}{2} \frac{dB}{dt} \hat{i}_z.$$

O torque ocasionará uma variação de momento angular dado por

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \frac{er^2}{2} \frac{dB}{dt} \hat{i}_z.$$

Integrando esta expressão desde $t=0$, $B=0$, temos que a variação do
momento angular (orbital) devido à presença do campo será

$$\Delta\vec{L} = \frac{er^2}{2} B \hat{i}_z$$

Portanto, o campo externo irá ocasionar um momento de dipolo magné-
tico no átomo dado por

$$\vec{m} = - \frac{e}{2m_e} \Delta\vec{L},$$

ou seja,

$$\boxed{\vec{m} = - \frac{e^2 r^2}{4m_e} \vec{B}}$$

O momento de dipolo magnético induzido é portanto na direção oposta
ao campo externo, dando origem ao efeito diamagnético. Vamos escrever este
resultado de uma forma mais geral, que permite generalizar para o caso
quântico.

Ao derivar o resultado acima, supusemos que a órbita élettrica é

7\Ub[YXkjh'hY89AC'J9FG=CB'cZ758!?5G'D8: !9X]cf'fl Hd.#k k k 'WUX_Ug'Wa L"

7\Ub[YXkjh'hY89AC'J9FG=CB'cZ758!?5G'D8: !9X]cf'fl Hd.#k k k 'WUX_Ug'Wa L"

7\Ub[YXkjh'hY89AC'J9FG=CB'cZ758!?5G'D8: !9X]cf'fl Hd.#k k k 'WUX_Ug'Wa L"

plana e perpendicular ao campo externo \vec{B} . Podemos então escrever

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Se considerarmos órbitas eletrônicas esfericamente simétricas, ou uma média sobre órbitas com eixo de simetria em todos os direções possíveis, devemos fazer a substituição

$$x^2 + y^2 \rightarrow \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle,$$

onde $\langle \rangle$ significa uma média sobre todas as configurações possíveis. Mas, por simetria

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r_i^2 \rangle$$

onde $\langle r_i^2 \rangle$ é o raio médio quadrático da órbita eletrônica correspondente.

A magnetização resultante será dada pelo produto da densidade de átomos pelo momento de dipolo magnético total de cada átomo, ou seja,

$$\vec{M} = N \sum_i \vec{m}_i = -N \frac{e^2}{6m_e} (\sum_i \langle r_i^2 \rangle) \vec{B} \hat{a}_z$$

Fazendo $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, temos

$$\vec{M} = \left[-\frac{Ne^2 \mu_0}{6m_e} \sum_i \langle r_i^2 \rangle \right] \vec{H}.$$

Lembrando a definição de susceptibilidade magnética, $\vec{M} = \chi \vec{H}$, temos que a susceptibilidade diamagnética é dada por

$$\boxed{\chi_d = -\frac{Ne^2 \mu_0}{6m_e} \sum_i \langle r_i^2 \rangle}$$

Esta expressão continua sendo válida na mecânica quântica se interpretarmos $\langle r_i^2 \rangle$ como o raio médio da órbita correspondente ao nível quântico i , calculado usando a distribuição quântica dada pelo quadrado da função de onda.

Nas sólidos a contribuição diamagnética dos carregos iônicos é descrita aproximadamente por esta expressão de Langevin. Existe, no

entanto, uma contribuição do efeito diamagnético devido aos elétrons na banda de condução que é mais complicada para calcular e será vista nos cursos de Estado Sólido.

Exercício: Segundo o modelo de Bohr para o átomo de hidrogênio, o raio das órbitas eletrônicas é dado por

$$r = n^2 a_0,$$

onde a_0 é o raio de Bohr,

$$a_0 = 5,29 \times 10^{-11} \text{ m},$$

e n é o número quântico que caracteriza o nível de energia. Considere o gás de hidrogênio H_2 na pressão de 1 atm na temperatura ambiente. Suponha todos os átomos no estado fundamental ($n = 1$) e que as contribuições dos dois átomos numa molécula sejam independentes entre si.

Calcule então x_d pela fórmula de Langevin e compare com o resultado dado na tabela da página 2.

Teoria Clássica do Efeito Paramagnético (Langevin)

O efeito paramagnético é observado em substâncias cujos átomos ou moléculas possuem um momento angular resultante. Isto ocorre em átomos e moléculas com um número ímpar de elétrons, porque o spin total não pode se anular. ~~Além disso~~, o efeito paramagnético é ^{também} observado em átomos com uma camada interna não preenchida. Exemplos de substâncias com um número ímpar de elétrons são átomos livres de sódio, óxido nítrito gasoso (NO), radicais orgânicos livres como trifenilmetil $C(C_6H_5)_3$, etc. As substâncias que possuem camadas internas não preenchidas são encontradas nos elementos de transição da camada periódica: cromo, manganês, ferro, Níquel, cobalto, paládio, platina, etc. Também as terras raras e elementos actinídeos têm a mesma propriedade.

Como o momento de dipolo magnético é proporcional ao momento angular, as substâncias cujos átomos ou moléculas possuem um momento

angular resultante terão também um momento de dipolo magnético resultante¹⁵. Sem um campo magnético externo, estes momentos de dipolo ^{magnético} atômico estarão orientadas de forma aleatória, e a substância não apresenta nenhum campo macroscópico resultante. Quando aplicamos um campo externo, esperamos que haja uma tendência para os dipolos atômicos se orientarem na direção do campo, aumentando o campo macroscópico. Isto seria a origem do efeito paramagnético. Este modelo simples está no entanto incorreto. A razão é que ao invés de se orientarem na direção do campo, os momentos de dipolo magnético atômicos simplesmente precisarão em torno do campo externo \vec{B} , da mesma forma que a precessão de momento angular que viria anteriormente. Isto ocorre porque o torque que surge em cada dipolo é dado por

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$$

portanto

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{m} \times \vec{B}.$$

Mas

$$\vec{m} = -g \left(\frac{e}{2m_e} \right) \vec{L},$$

portanto

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -g \left(\frac{e}{2m_e} \right) \vec{L} \times \vec{B} = g \left(\frac{e\vec{B}}{2m_e} \right) \times \vec{L}$$

Esta é a mesma equação que viria para a precessão do momento angular,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$$

com a frequência de precessão dada por

$$|\vec{\omega}| = g \omega_L$$

Onde

$$\boxed{\omega_L = \frac{eB}{2m_e}}$$

é denominada a frequência de Larmor dos elétrons.

Como na previsão o ângulo entre \vec{m} (ou \vec{l}) e \vec{B} não se altera, conforme já demonstramos, a energia potencial $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ de cada momento de dipolo magnético também não se altera e, portanto, não pode surgir um aumento do campo (que corresponderia a um aumento de energia magnética). Qual é então o mecanismo responsável pelo paramagnetismo? Acontece que naturalmente existem mecanismos de interação entre os diversos átomos, ou seja, entre os diversos momentos de dipolo magnético atômicos, que podem mudar o ângulo entre cada dipolo e o campo magnético externo. Esses mecanismos são as colisões atômicas em gases e líquidos e o acoplamento com modos de oscilação mecânicas em sólidos. Quando dois átomos colidem, ambos podem alterar o ângulo entre seus dipolos magnéticos e o campo magnético externo. Se o ângulo diminuir a energia potencial também diminui e se o ângulo aumentar, a energia potencial aumenta. Para um gás em equilíbrio térmico, a distribuição de energia entre os vários átomos obedece a distribuição de Maxwell-Boltzmann (ver Eisberg & Resnick, Física Quântica, Apêndice C)

$$P(U) = C e^{-U/k_B T}$$

onde $P(U)$ é a probabilidade de se encontrar um átomo com energia U , k_B é a constante de Boltzmann, T é a temperatura absoluta do sistema e C é uma constante. A magnetização resultante M do sistema na presença de um campo externo tem que ser calculada fazendo-se uma média sobre todos os ângulos possíveis considerando o peso estatístico dado pela distribuição de Boltzmann. Se a magnetização resultante for na direção do campo externo (paramagnetismo), a energia magnética do sistema aumenta através do consumo de energia térmica.

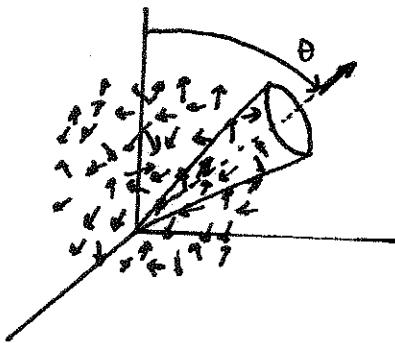
Vamos agora utilizar estes conceitos para calcular a susceptibilidade paramagnética para um material de densidade N (átomos/m³)

formado por átomos da mesma espécie. A magnetização resultante será dada por

$$\vec{M} = N \langle \vec{m} \rangle_T$$

onde $\langle \vec{m} \rangle_T$ é o momento de dipolo magnético médio dos átomos na temperatura (absoluta) T .

Se o campo magnético externo for nulo, $\vec{B} = 0$, os momentos de dipolo magnético dos átomos estarão distribuídos de forma aleatória e $\langle \vec{m} \rangle_T = 0$. A densidade de átomos com \vec{m} apontando numa direção qualquer dentro de um ângulo sólido



$d\Omega = 2\pi \rho m \theta d\theta$ será dado simplesmente pela razão entre este ângulo sólido e o ângulo sólido total, 4π , vezes a densidade total de átomos, isto é,

$$dN = N \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

Se o campo magnético externo for diferente de zero, $\vec{B} \neq 0$, a isotropia é destruída e a energia de cada partícula i passa a ser acrescida de uma energia potencial

$$U_i = -\vec{m}_i \cdot \vec{B} = -m_i B \cos \theta_i,$$

onde m_i é o valor absoluto do momento de dipolo magnético de cada átomo (considerado constante para simplificar a exposição). A mudança do ângulo θ entre \vec{m} e \vec{B} só poderá vir das interações entre átomos, ou seja, da energia térmica. Quanto maior for o ângulo, maior será a energia potencial, e menor o número de partículas com esta energia numa distribuição térmica.

A probabilidade de se encontrar uma partícula com \vec{m} fazendo

um ângulo θ com o campo externo B é dada por

$$P(\theta) = C e^{-\frac{U(\theta)}{k_B T}} = C e^{-\frac{m_0 B}{k_B T} \cos \theta}$$

Para se determinar a constante C , consideraremos inicialmente que a densidade de partículas com \vec{m} apontando dentro de um ângulo sólido $d\Omega$ no entorno de θ passa a ser dada por

$$dN = \frac{N}{4\pi} P(\theta) d\Omega = C \frac{N}{4\pi} e^{-\frac{m_0 B \cos \theta}{k_B T}} d\Omega$$

Naturalmente, integrando sobre todo o ângulo sólido temos que obter $\int dN = N$, ou seja,

$$\frac{C}{4\pi} \int e^{-\frac{m_0 B \cos \theta}{k_B T}} d\Omega = 1$$

ou

$$C \int_0^\pi e^{-\frac{m_0 B \cos \theta}{k_B T}} \sin \theta d\theta = 2$$

Esta integral pode ser facilmente convertida em $\int e^{ax} dx = e^{ax}/a$; obtemos então

$$C = \frac{m_0 B}{\operatorname{pwh}\left(\frac{m_0 B}{k_B T}\right)}$$

Calculado C , podemos então determinar a componente média do momento de dipolo magnético na direção de \vec{B} , ou seja,

$$\langle m_0 \cos \theta \rangle_T = \frac{1}{N} \int m_0 \cos \theta dN(\theta) = m_0 \frac{CN}{4\pi N} \int_0^\pi e^{-\frac{m_0 B \cos \theta}{k_B T}} \cos^2 \theta d\theta$$

Para simplificar a notação, vamos escrever $\langle m_0 \cos \theta \rangle = \langle m_z \rangle$ já que estamos considerando o campo externo na direção z , então

$$\langle m_z \rangle_T = m_0 \frac{m_0 B / k_B T}{\operatorname{pwh}\left(\frac{m_0 B}{k_B T}\right)} \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-\frac{m_0 B}{k_B T} \cos \theta} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta$$

Para fazer a integral, introduzimos a mudança de variável $x = \alpha \cot \theta$ em

$$\int_0^{\pi} e^{-\mu m_0 B \cot \theta} d\theta = -\frac{1}{a^2} \int_a^{\infty} e^{-x} x dx = -\frac{1}{a^2} [e^{-x}(x-1)]_a^{\infty}$$

$$= \frac{2 \mu m_0}{a^2} [\alpha \operatorname{coth} \alpha - 1].$$

Notando que $a = m_0 B / k_B T$, obtemos finalmente

$$\langle \vec{m} \rangle_T = m_0 \left[\operatorname{coth} \left(\frac{m_0 B}{k_B T} \right) - \frac{k_B T}{m_0 B} \right] \frac{\vec{B}}{B}$$

onde escrevemos $\langle m_z \rangle_{\text{ap}} = \langle m_z \rangle (\vec{B}/B)$. A magnetização $\vec{M} = N \langle \vec{m} \rangle_T$ fica então

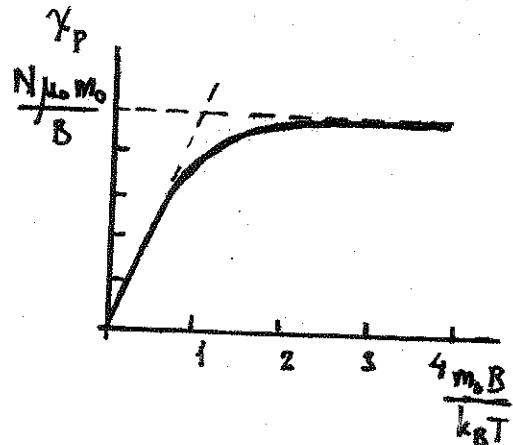
$$\vec{M} = \chi_p \vec{H}$$

onde χ_p é a susceptibilidade paramagnética (clássica).

$$\boxed{\chi_p = \frac{N \mu_0 M_0}{B} \left[\operatorname{coth} \left(\frac{m_0 B}{k_B T} \right) - \frac{k_B T}{m_0 B} \right]}$$

(Para derivar a equação para \vec{M} usamos a relação $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, válida para o vácuo, já que os efeitos dos dipólos induzidos está sendo considerado explícitamente)

A equação para χ_p é dada também a Langevin. Um gráfico de χ_p versus $m_0 B / k_B T$ é mostrado ao lado. Note que a magnetização sativa rapidamente para baixas temperaturas, ou seja, para $m_0 B \gg k_B T$



Por outro lado, para altas temperaturas, $m_0 B \ll k_B T$, temos que $m_0 B/k_B T$ tende para zero e podemos utilizar a série de Taylor para $\cotgh x$, isto é,

$$\cotgh x \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \dots$$

Substituindo este desenvolvimento na expressão para χ_p , obtemos

$$\chi_p = \frac{T_c}{T},$$

onde $T_c = \frac{\mu_0 N m_0^2}{3 k_B}$ é denominada constante de Curie. A dependência de χ_p com o inverso da temperatura é denominada lei de Curie.

Note que esta expressão depende de m_0 , que em princípio é um valor desconhecido. No entanto, fazendo a medida de χ_p em função de T para uma determinada substância, podemos determinar m_0 de seus átomos. Portanto a expressão clássica de Langevin é uma medida macroscópica permite determinar uma grandeza microscópica m_0 ! Os resultados experimentais mostram que

$$m_0 \approx m_B$$

onde

$$m_B = \frac{1e\ell k}{2m_e}$$

é denominado magnetão de Bohr e ℓk é a constante de Planck dividida por 2π . Substituindo os valores numéricos, obtemos

$$m_B \approx 9.27 \times 10^{-24} \text{ Am}^2$$

que permite explicar os pequenos valores experimentais de χ_p para diferentes substâncias.

Ex. A densidade do sódio é $N = 2,65 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Supondo que $\chi_{Na} = 1.05 \times 10^{-4}$

na temperatura $T = 300 \text{ K}$ (valor da tabela na página 2 multiplicado por 4π), calcule T_c e m_0 para esta substância. Como o resultado se compara a m_0 ?

Ausência do Magnetismo para um Sistema Clássico em Equilíbrio Térmico

Nós vimos que as expressões de Langevin para as susceptibilidades diamagnética e paramagnética, derivadas classificamente, reproduzem razoavelmente os resultados experimentais, principalmente a dependência da susceptibilidade paramagnética com a temperatura. No entanto, em 1919 van Leeuwen demonstrou um resultado desconcertante: para um sistema isolado em equilíbrio térmico não pode haver um magnetismo resultante, ou seja, a susceptibilidade é sempre nula, mesmo na presença de um campo externo.

Este resultado é simplesmente uma consequência da Mecânica Estatística Clássica e da força de Lorentz. Segundo a Mecânica Estatística, a probabilidade de um sistema isolado em equilíbrio térmico de estar num estado de energia U é proporcional a $e^{-U/k_B T}$, como vimos antes. Para uma partícula se movendo num campo magnético constante, a energia do movimento U é a energia potencial mais a energia cinética $\frac{1}{2}mv^2$. Como a força dada ao campo magnético, $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, não realiza trabalho, a energia U é o mesmo tendo ou não campo magnético¹. Para o sistema em equilíbrio térmico, portanto, o campo magnético não tem efeito. Se tivermos dois sistemas semelhantes, cada um isolado dentro de uma caixa, um com campo magnético e outro sem campo, a probabilidade de encontrarmos uma partícula num dado ponto da caixa com uma dada velocidade é a mesma para os dois sistemas.

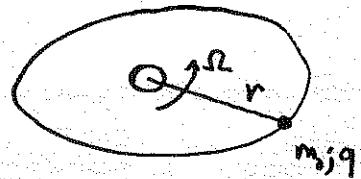
Para entendermos este resultado de um ponto de vista mais formal, vamos considerar o nosso modelo atômico de uma partícula de

carga q e massa m_0 em movimento circular de raio r em torno de um núcleo. Seja Ω a velocidade angular da partícula. O momento angular orbital é então dado por

$$L = m_0 r v = m_0 r^2 \Omega$$

Então, o momento de dipolo magnético do sistema é

$$m = \frac{q}{2m_0} m_0 r^2 \Omega = \frac{q r^2 \Omega}{2}$$



A susceptibilidade diamagnética, supondo uma densidade N de átomos, é dada por

$$\chi_d = -\frac{N q^2 \mu_0}{6m_0} r^2$$

enquanto que a susceptibilidade paramagnética (para altas temperaturas) é

$$\chi_p = \frac{N \mu_0 m^2}{3k_B T}$$

$$\text{Mas } m^2 = \frac{q^2 r^4 \Omega^2}{4} = \frac{q^2 r^2}{2m_0} \left(\frac{1}{2} m_0 r^2 \Omega^2 \right),$$

(multiplicando e dividindo por m_0)

O fator $\frac{1}{2} m_0 r^2 \Omega^2$ é a energia cinética da partícula; para um sistema em equilíbrio térmico, temos pelo teorema da equipartição que a energia cinética por grau de liberdade é $\frac{1}{2} k_B T$. Como o movimento no plano possui duas graus de liberdade, a energia cinética da partícula será

$$\frac{1}{2} m_0 r^2 \Omega^2 = k_B T.$$

Substituindo este resultado na expressão para χ_p , obtemos

$$\chi_p = \frac{N q^2 \mu_0}{6m_0} r^2 = -\chi_d \therefore \chi_p + \chi_d = 0 !,$$

ou seja, a susceptibilidade para o sistema em equilíbrio térmico é zero.

previsto pelo teorema de van Leeuwen.

Como podemos conciliar este resultado com os modelos que desenvolvemos para o diamagnetismo e paramagnetismo da matéria e, mais importante, com os resultados experimentais que demonstram claramente que estes efeitos existem em sistemas clássicos em equilíbrio térmico? A resposta é que nossos modelos fazem hipóteses que não estão corretas do ponto de vista quântico, como a órbita circular dos elétrons em torno do Núcleo, etc.. A hipótese mais fundamentalmente errada, no entanto, foi feita na derivação da susceptibilidade paramagnética, quando consideramos que os momentos de dipolo magnético dos átomos podem formar um ângulo qualquer com o campo externo e depois calcularmos a média usando o fator estatístico de Boltzmann. A seguir vamos corrigir esta hipótese para dar um exemplo de como os efeitos quânticos modificam os resultados clássicos.

Ex. Vimos que a medida da susceptibilidade paramagnética em função da temperatura permite determinar o valor absoluto do momento de dipolo magnético de seus átomos. Fazendo substâncias cujo momento de dipolo magnético é devido somente a um elétron, podemos determinar o momento de dipolo magnético do elétron. O resultado experimental é

$$m_e = \frac{e\hbar k}{2m_e}$$

onde $e\hbar k/2m_e = m_B$, o magnetom de Bohr que vimos anteriormente.

Faça um modelo clássico para o elétron supondo que sua carga está uniformemente distribuída numa esfera de raio a e que sua energia de repouso seja igual a energia eletrostática desta distribuição de carga, isto é,

$$E = m_e c^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a}$$

Determine a e mostre que se o momento de dipolo magnético for devido à rotação do elétron em torno de um eixo que passa pelo seu centro, a velocidade tangencial da superfície do elétron será

$$v = \left(\frac{hc}{q^2} \cdot 4\pi \epsilon_0 \right) \frac{5}{2} c \quad \Rightarrow c,$$

onde c é a velocidade da luz. Portanto o modelo clássico para o elétron é INCONSISTENTE.

OBS: Para fazer este problema lembre-se que o momento angular de um corpo girando em torno de um eixo principal é dado por $L = I\omega$ e que o momento de inércia de uma esfera é $I = \frac{2}{5}MR^2$.

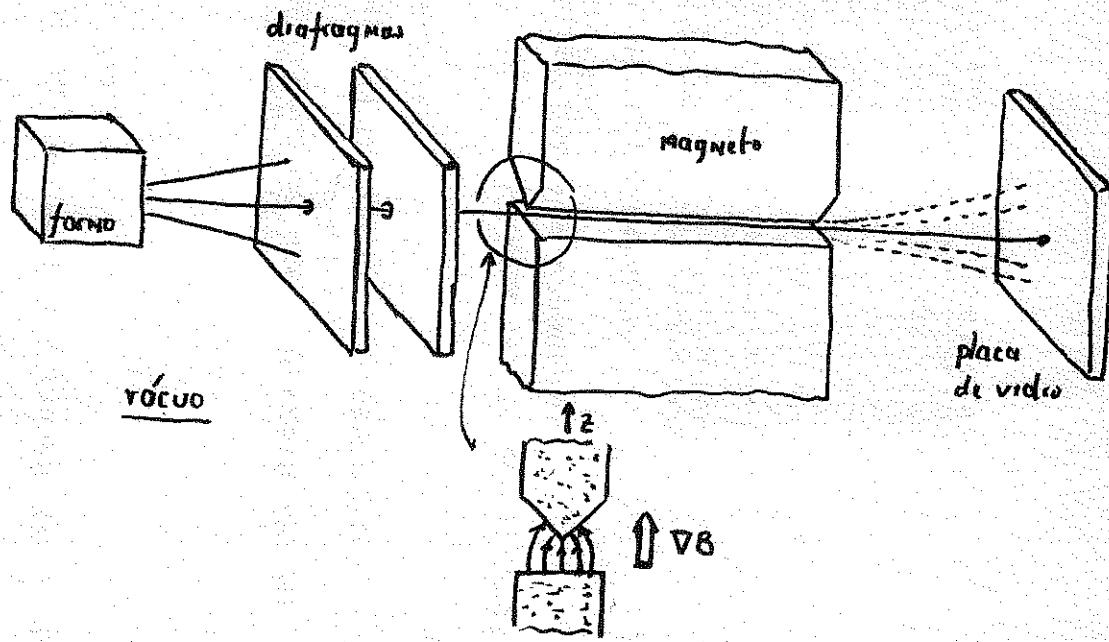
Quantização do Momento Angular e Experiência de Stern-Gerlach

Existem vários conceitos e várias grandezas da Mecânica Clássica que são alterados na Mecânica Quântica de forma não esperada e completamente ortogonal às nossas experiência e intuição adquiridas através de observações macroscópicas. As razões para modificar estes conceitos e grandezas nascem de resultados experimentais e da necessidade de formular uma teoria consistente para explicar sistemas microscópicos, que permita uma transição lógica para a Mecânica Clássica quando as dimensões dos sistemas se tornam muito maiores que as dimensões atômicas. Esta teoria é a Mecânica Quântica e um protótipo de grandeza física que possui um comportamento inesperado em Mecânica Quântica é o momento angular.

INICIALMENTE VAMOS CONSIDERAR UM SISTEMA PARA O QUAL O MOMENTO ANGULAR TOTAL, ^{SE CONSERVA} COMO UM ÁTOMO girando em torno de um eixo de simetria no espaço vazio, SEM INTERAÇÃO COM OUTRAS SISTEMAS. EM PRINCÍPIO O EIXO DE SIMETRIA PODERIA ESTAR EM QUALQUER DIREÇÃO QUE QUISEREMOS ESCOLHER. PARA UM DADO 'SPIN' (VAMOS SUPOR DE MANEIRA NÃO RIGOROSA QUE O 'SPIN' É O MÓDULO DO MOMENTO ANGULAR), PODERIAM HAVER MUITOS 'ESTADOS' DIFERENTES, TODOS DA MESMA ENERGIA, CADA ESTADO CORRESPONDENDO A UMA DIREÇÃO PARTICULAR DO EIXO DO MOMENTO ANGULAR. DESTA FORMA, NO TEORIA CLÁSSICA, ^{PARA} UM SISTEMA ISOLADO COM UM DADO MOMENTO ANGULAR, PODE HAVER UM NÚMERO INFINITO DE ESTADOS POSSÍVEIS, TODOS COM A MESMA ENERGIA.

No entanto, na Mecânica Quântica várias coisas 'estranhas' acontecem. Inicialmente, o número de estados nos quais um sistema isolado pode existir é limitado, ou seja, existe somente um número finito de estados possíveis nos quais o sistema pode ser encontrado. Se o sistema for 'pequeno' da ordem das dimensões atômicas, este número é bastante pequeno; se o sistema for grande, ou seja de dimensões macroscópicas, este número finito de estados se torna bastante grande. Em segundo lugar, nós não podemos descrever um estado especificando a direção de seu momento angular, mas somente dando o valor da componente do momento angular ao longo de alguma direção - por exemplo a direção do eixo z. Clasicamente um sistema com momento angular total L pode ter para sua componente z qualquer valor entre L e $-L$, visto que a direção do eixo z pode ser escolhida de forma arbitrária. Mas, em Mecânica Quântica, uma vez especificada a direção do eixo z (ou ^{de}qualquer outro eixo), a componente do momento angular ao longo deste eixo só pode assumir um número inteiro de valores discretos entre L e $-L$. Este resultado é chocante e peculiar e, infelizmente, não existe nenhuma explicação 'elementar' que nos leve a aceitá-lo de forma mais confortável. Por isso, vamos imediatamente passar à experiência que demonstrou a quantização do momento angular.

Em 1922 Stern and Gerlach projetaram um experimento para medir o momento de dipolo magnético de átomos de prata. Eles produziram um facho de átomos de prata evaporando prata dentro de um pequeno forno e extraíndo um facho através de um pequeno orifício. O feixe era alinhado e colimado fazendo-o passar através das orifícios alinhados de vários diafragmas (veja figura na próxima página). Após, o feixe era dirigido ao longo dos polos de um magneto, com um forte gradiente de campo na direção do campo magnético. Este gradiente era feito fazendo-se um polo plano e o outro chanfrado de forma a concentrar as linhas de força. Após se passar pelo magneto, o feixe impingia numa placa de vidro condutora.



A idéia básica que motivou a experiência é a seguinte. Se o átomo de protóton tiver um momento magnético \vec{m} , então ele tem no campo magnético uma energia potencial

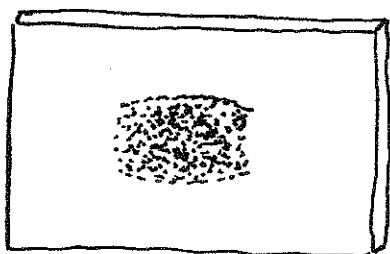
$$\Delta U = -\vec{m} \cdot \vec{B} = -m_z B = -m_0 B \cos \theta$$

Onde escolhemos o eixo z na direção de \vec{B} e θ é o ângulo entre o momento magnético \vec{m} do átomo e \vec{B} quando o átomo entra no campo. Naturalmente, quando os átomos saem do forno, \vec{m} pode apontar em qualquer direção e todos os valores de θ serão possíveis. Como, por outro lado, $|B|$ varia fortemente na direção z , surgirá uma força na mesma direção atuando em cada átomo e dada por

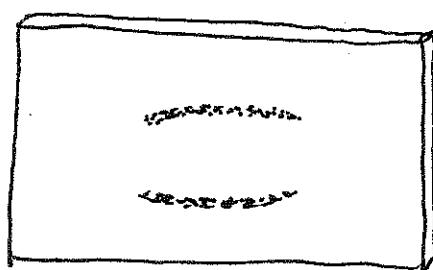
$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = m_0 \frac{\partial B}{\partial z} \cos \theta.$$

Os átomos que entram na região do campo magnético com \vec{m} exatamente perpendicular a \vec{B} , ou seja, $\theta = \pi/2$, não serão sujeitos a nenhuma força e viajarão em linha reta até a placa de vidro. Os átomos que entram com \vec{m} paralelo ou antiparalelo a \vec{B} , $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, sofrerão uma máxima deflexão para cima ou para baixo, respectivamente. Todos os

outros átomos, para qualquer valor de θ , sofrerão uma deflexão entre estes dois limites. Desta forma o resultado esperado classicamente é uma mancha na placa de vidro, simétrica em relação à direção original do feixe. A máxima deflexão dos átomos ($\theta = 0$ ou π) é proporcional à força e portanto a m_0 . Conhecendo dB/dz e a velocidade de deslocamento horizontal do feixe, basta medir a máxima deflexão na placa para determinar m_0 .



resultado esperado
classicamente



resultado obtido

O resultado da experiência foi surpreendente: Stern e Gerlach verificaram que após passar pelo magneto, o feixe se dividia em dois, deixando duas marcas na placa de vidro, conforme mostrado na figura. O fato de que átomos cujos momentos de dipolo magnético estão aparentemente orientados de forma aleatória se dividem em dois é quase miraculoso. Se o magneto for girado, as duas linhas giram também, acompanhando a direção do campo. Stern e Gerlach interpretaram corretamente o resultado como a quantização da componente do momento angular na direção do campo; ou seja, no caso dos átomos de prata a componente do momento de dipolo magnético na direção do campo só pode ter dois valores distintos.

Esta experiência foi repetida por Phipps e Taylor em 1927 com feixe de hidrogênio atômico, obtendo o mesmo resultado. Medindo a distância entre as duas linhas se pode determinar o valor do momento de dipolo magnético para o átomo. Phipps e Taylor usaram um feixe de átomos não excitados e, segundo a teoria quântica do átomo de hidrogênio, que

já estava desenvolvida na época, o momento angular no estado fundamental (átomo não excitado) é nulo e não deveria haver portanto nenhuma componente do momento de dipolo magnético na direção de \vec{B} , ou seja, $m_z = 0$. O resultado experimental levou então à conclusão que os elétrons têm um momento angular intrínseco, denominado spin, que se orienta no sentido do campo ou no sentido contrário. A componente do momento de dipolo magnético correspondente na direção do campo é dada por

$$m_z = -g \left(\frac{e}{2m_e} \right) s \hbar$$

onde o número quântico s só possui dois valores

$$s = +\frac{1}{2} : \text{'spin para cima'}$$

ou

$$s = -\frac{1}{2} : \text{'spin para baixo'}$$

Para os objectivos do nosso curso, vamos então considerar o spin do elétron como um resultado experimental que tem que ser considerado na teoria do paramagnetismo.

Teoria Quântica do Paramagnetismo

Vamos considerar átomos cujo momento de dipolo magnético seja devido ao spin de um elétron. Podemos seguir praticamente os mesmos passos do cálculo clássico do paramagnetismo, ou seja, a magnetização resultante será dada por

$$\vec{M} = N \langle \vec{m} \rangle_T$$

onde $\langle \vec{m} \rangle_T$ é o momento de dipolo médio dos átomos, calculado usando a probabilidade de Boltzmann,

$$P(U) = C e^{-\frac{U}{k_B T}}$$

A energia potencial dos momentos de dipolo magnético no campo externo \vec{B} é,

como antes dada por

$$\vec{U} = -\vec{m}_z \cdot \vec{B} = -m_z B$$

Neste ponto é que os cálculos clássico e quântico diferem. No cálculo clássico escrevemos $m_z B = m_0 B \cos \theta$, onde θ poderia ter qualquer valor entre 0 e π . Mas, da experiência de Stern-Gerlach, sabemos que o momento de dipolo magnético devido ao spin só pode ter duas componentes na direção z:

$$m_{z+} = -g \left(\frac{e}{2m_e} \right) \frac{k}{2} = -m_0 B$$

$$m_{z-} = +g \left(\frac{e}{2m_e} \right) \frac{k}{2} = +m_0 B,$$

onde escrevemos

$$m_0 = \frac{g}{2} \left(\frac{e k}{2m_e} \right).$$

(Note que este m_0 não é o mesmo do caso clássico; na verdade, no cálculo clássico m_0 é uma grandeza não especificada que tem que ser determinada experimentalmente)

Portanto o número de átomos com 'spin para cima' será dado por

$$N_+ = C e^{-\frac{U_+}{k_B T}} = C e^{-\frac{m_0 B}{k_B T}}$$

e o número de partículas com 'spin para baixo' será

$$N_- = C e^{-\frac{U_-}{k_B T}} = C e^{\frac{m_0 B}{k_B T}}$$

Naturalmente, o número (por unidade de volume) total de partículas N será dado pela soma de N_+ e N_- ; então podemos calcular a constante C :

$$N = N_+ + N_- \Rightarrow C = \frac{N}{e^{\frac{m_0 B}{k_B T}} + e^{-\frac{m_0 B}{k_B T}}}$$

O valor médio do momento de dipolo magnético pode então ser facilmente calculada fazendo-se uma média ponderada entre os números de átomos com spin 'para cima' e 'para baixo':

$$\langle m_z \rangle = \frac{m_+ N_+ + m_- N_-}{N} = \frac{-m_0 e^{-\frac{m_0 B}{k_B T}} + m_0 e^{\frac{m_0 B}{k_B T}}}{e^{\frac{m_0 B}{k_B T}} + e^{-\frac{m_0 B}{k_B T}}}$$

Então

$$\langle m_z \rangle = m_0 \tgh\left(\frac{m_0 B}{k_B T}\right)$$

e a magnetização resultante na direção do campo externo será

$$M_z = N m_0 \tgh\left(\frac{m_0 B}{k_B T}\right)$$

Como no caso clássico podemos escrever este resultado na forma

$$\vec{M} = \chi_p \vec{H},$$

onde a expressão quantica para a susceptibilidade paramagnética é

$$\boxed{\chi_p = \frac{N \mu_0 m_0}{3} \tgh\left(\frac{m_0 B}{k_B T}\right)}$$

No limite de altas temperaturas, esperamos que os resultados quântico e clássico sejam aproximadamente iguais. Para $m_0 B / k_B T \ll 1$, temos

$$\tgh\left(\frac{m_0 B}{k_B T}\right) \approx \frac{m_0 B}{k_B T}$$

e a susceptibilidade paramagnética fica

$$\chi_p = \frac{\mu_0 N m_0^2}{k_B T}$$

O resultado clássico que obtivemos, por outro lado, foi:

$$\chi_{p,\text{class.}} = \frac{\mu_0 N m_0^2}{3 k_B T},$$

aparentemente três vezes menor que o quântico. Esta diferença, no entanto, é apenas devida à interpretação correta de m_0 no resultado clássico.

No expressão quântica, $m_0 = \frac{g}{2} \left(\frac{e k}{2m_e} \right)$. No entanto, na expressão clássica, m_0 é o quadrado da amplitude do momento de dipolo magnético do átomo.

Se quisermos substituir na expressão clássica o valor quântico, temos que fazer

$$m_{0,\text{cl.}}^2 = \vec{m}_s \cdot \vec{m}_s = \left(g \frac{e}{2m_e} \right)^2 \vec{s} \cdot \vec{s}$$

onde \vec{s} é o momento angular devido ao spin. Um outro resultado surpreendente da Mecânica Quântica é que $\vec{s} \cdot \vec{s}$ não é igual a $s^2 \hbar^2$ mas,

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = s(s+1)\hbar^2.$$

Como $s = \frac{1}{2}$, temos

$$m_{0,\text{cl.}}^2 = \left(g \frac{e}{2m_e} \right)^2 \frac{3\hbar^2}{4}.$$

Portanto

$$\chi_{p,\text{cl.}} = \frac{\mu_0 N}{3k_B T} \left(g \frac{e}{2m_e} \right)^2 \frac{3\hbar^2}{4}$$

$$\therefore \chi_{p,\text{cl.}} = \frac{\mu_0 N}{k_B T} \left(\frac{g}{2} \frac{e}{2m_e} \right)^2$$

que é exatamente o resultado quântico para altas temperaturas.

Magnetização Espontânea. Ferromagnetismo

Vamos agora discutir porque nos materiais ferromagnéticos um pequeno campo magnético externo produz uma ^{forte} magnetização, algumas ordens de magnitude superior ao efeito paramagnético. A magnetização de materiais ferromagnéticos como ferro e níquel vem do momento de dipolo magnético dos elétrons nas camadas internas do átomo e é devida à interação deste momento de dipolo magnético com os dos átomos vizinhos. Na última seção nós vimos que a magnetização na direção do campo externo é dada por

$$\vec{M} = N m_0 \operatorname{tgh} \left(\frac{\mu_0 B}{k_B T} \right) \hat{a}_z,$$

onde \hat{a}_z é o vetor unitário na direção do campo externo. Na teoria do paramagnetismo nós consideramos B , que é o campo atuando no átomo, igual ao próprio campo externo, desprezando a contribuição dos momentos de dipolo magnético dos átomos próximos. Mas na teoria do ferromagnetismo existe uma complicação; como os momentos de dipolo magnético dos átomos vizinhos podem estar alinhados numa direção preferencial devido à energia de interação entre eles, pode ser que o campo B_a que atua em cada átomo seja diferente do campo externo $B = \mu_0 H$. Para levar esta interação em consideração, Weiss propôs em 1907 um modelo fenomenológico em que o campo que atua em cada átomo é dado por

$$B_a = \mu_0 (H + \lambda M),$$

onde λ é uma constante. O campo λM representa a contribuição do campo local devida à interação com os momentos de dipolo magnético dos átomos vizinhos. A constante λ , denominada constante de campo de Weiss, será determinada posteriormente a partir de resultados experimentais. Substituindo a expressão para B_a por B na equação para M , temos

$$M = N m_0 \operatorname{tgh} \left[\frac{\mu_0 M_0}{k_B T} (H + \lambda M) \right].$$

Esta é uma equação altamente não linear para a magnetização M e a solução depende do campo externo H . A solução da equação pode no entanto ser determinada gráficamente: definindo

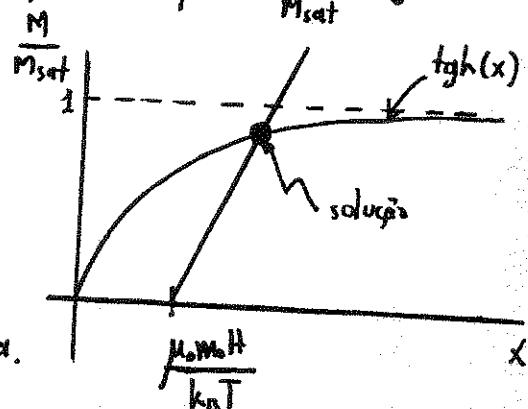
$$x = \frac{\mu_0 m_0 H}{k_B T} + \left(\frac{\mu_0 m_0 \lambda M_{sat}}{k_B T} \right) \frac{M}{M_{sat}},$$

onde $M_{sat} = Nm_0$, temos

$$\frac{M}{M_{sat}} = \operatorname{tgh} x,$$

Estas duas equações dão duas expressões diferentes para $\frac{M}{M_{sat}} = f(x)$.

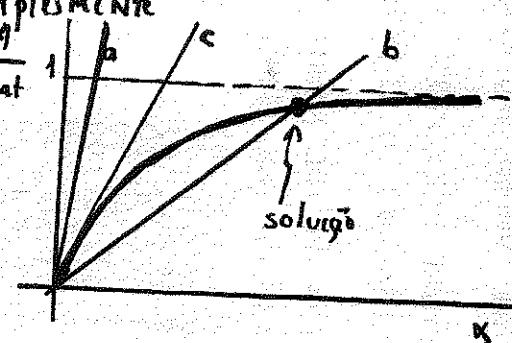
A primeira equação é a de uma reta e a segunda a da tangente hiperbólica. Fazendo um gráfico das duas curvas, temos que a solução será dada pela intersecção das mesmas, conforme indicado na figura.



A solução representa a magnetização do material para o campo externo H . Para verificarmos se é possível uma magnetização espontânea, temos que procurar uma solução para $H=0$. Neste caso a equação da reta fica simplesmente

$$\frac{M}{M_{sat}} = \left(\frac{k_B T}{\mu_0 m_0 \lambda M_{sat}} \right) x,$$

ou seja, para $H=0$ a reta parte da origem e quanto maior for a temperatura maior a ^{sua} inclinação. Para altas



temperaturas, não há solução possível para M/M_{sat} , conforme indica a reta a na figura. Para baixas temperaturas, há uma solução possível com $M \neq 0$, conforme indicado pela reta b. Esta solução corresponde a uma magnetização espontânea. A magnetização espontânea ocorre abaixo de uma temperatura crítica, T_c , que corresponde à solução onde a reta e a curva são tangentes na origem (curva e na transversa). Para determinarmos T_c basta

34.
considerarmos o limite $x \rightarrow 0$; neste caso $\tanh x \approx x$ e as duas equações para M/M_{sat} ficam

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = x$$

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \left(\frac{k_B T_c}{\mu_0 M_0 \lambda M_{\text{sat}}} \right) x;$$

Portanto, temos que

$$k_B T_c = \mu_0 M_0 \lambda M_{\text{sat}}$$

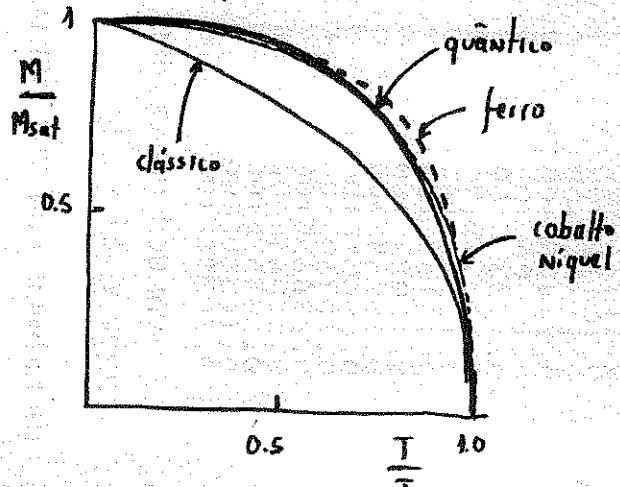
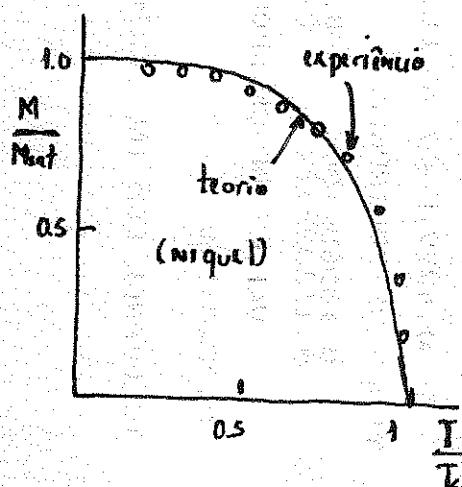
ou

$$k_B T_c = \lambda N \mu_0 M_0^2$$

onde usamos a expressão para M_{sat} . A temperatura T_c também é chamada temperatura de Curie e corresponde à temperatura em que o comportamento ferromagnético do material subitamente aparece.

Ex. A temperatura de Curie para o Níquel é $T_c = 631 \text{ K}$ e a densidade do Níquel $N = 9,1 \times 10^{28} \text{ átomos/m}^3$. Calcule a constante de Weiss para o Níquel (para o ferro, $\lambda \approx 5000$).

Se calcularmos a solução de $M/M_{\text{sat}} = f(x)$ graficamente para $H=0$ (magnetização espontânea), obtém-se a figura da esquerda abaixo para o Níquel. Na figura da direita ^{são} mostrados os resultados clássico (usando a expressão clássica para M) e quântico. É evidente que o resultado quântico é excelente.



A origem do campo local de Weiss, $\lambda \vec{M}$, foi explicada mais tarde (1922) por Frenkel e Heisenberg. Como consequência do princípio de exclusão de Pauli, da Mecânica Quântica, não podemos alterar as direções relativas de dois spins sem alterar a distribuição de carga espacial numa região próxima. A mudança da distribuição de cargas provoca uma mudança na energia potencial do sistema que pode ser convenientemente escrita como uma energia de interação entre dois spins da forma $V_{ij} = -2J\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$, onde J é um fator que depende da integral sobre a superposição das distribuições de carga i e j . Para maiores detalhes sobre a teoria de Frenkel e Heisenberg, é necessário consultar um livro de Estado Sólido.

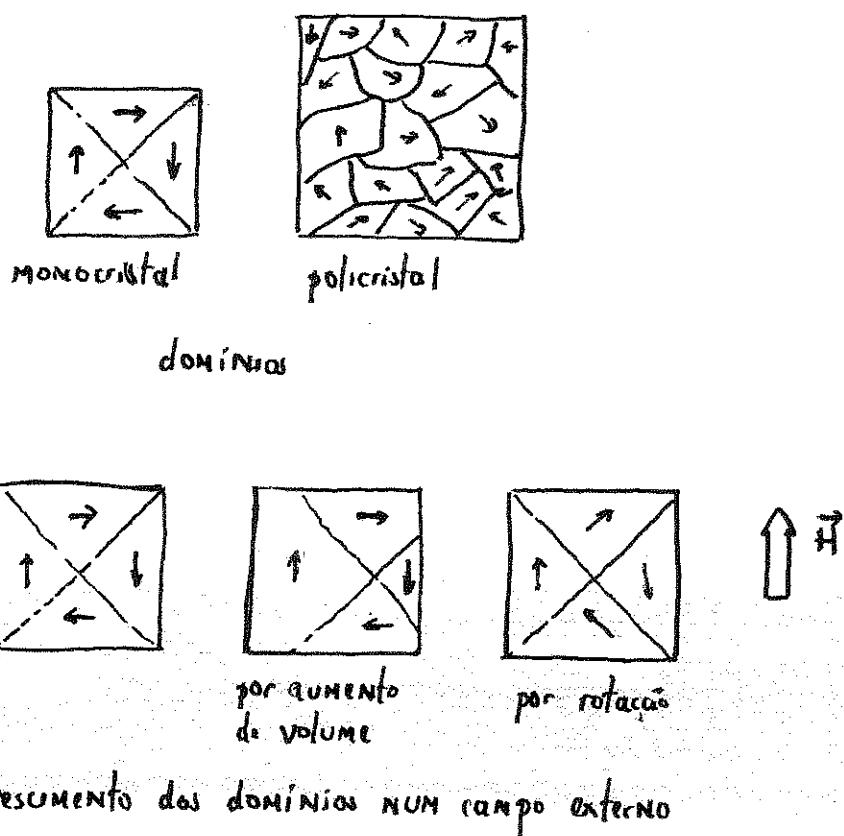
Domínios Ferromagnéticos

Em temperaturas bem abaixo da temperatura de Curie, T_c , os momentos de dipolo magnético dos átomos de um material ferromagnético estão essencialmente todos alinhados quando olhadas numa escala microscópica. No entanto, olhando uma amostra do material como um todo, a magnetização resultante pode ser muito menor do que a de saturação, e a aplicação de um campo externo pode ser necessária para saturar a amostra.

Weiss explicou este fenômeno, e a existência da curva de histerese para materiais ferromagnéticos, supondo que as amostras reais são constituídas de um grande número de pequenas regiões, denominadas domínios, dentro de cada qual a magnetização está saturada; as direções de magnetização de diferentes domínios, no entanto, não precisam necessariamente ser paralelas entre si. Um arranjo esquemático dos domínios com magnetização resultante nula é mostrado na figura da próxima página para um monocrystal e para um polícrystal.

Quando aplicamos um campo externo, a magnetização resultante pode aumentar através de dois processos independentes: i) aumento de

volume dos domínios que estão orientados favoravelmente com relação ao campo externo em prejuízo das outras; iii) rotação das direções de magnetização no sentido do campo externo. Os dois processos são indicados na segunda figura abaixo. A existência dos domínios foi demonstrada experimentalmente em 1931 por Bitter usando fotomicrografia de pó de material magnético.



Referências

1. C. C. Becerra; Notas de aula; Electromagnetismo I, cap. VI
2. R. P. Feynman; Lectures on Physics, Vol. II, caps. 34-37
3. C. Kittel; Introduction to Solid State Physics, 5º Edição, caps. 14 e 15
4. J. Reitz, F. Milford, e R. Christy, Fundamentos da Teoria Electromagnética, cap. 10.