

Capítulo 3

CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME ESTACIONÁRIO

PME2360 - TRANSFERÊNCIA DE CALOR
PROF. DR. GUENTHER CARLOS KRIEGER FILHO

guenther@usp.br

Site LETE

<http://www.lete.poli.usp.br/PME2360.html>

CONDUÇÃO UNIDIMENSIONAL EM REGIME ESTACIONÁRIO

- *Unidimensional*: os gradientes de temperatura são significativos só em uma direção.
- *Regime Estacionário*: temperatura em cada ponto independe do tempo.

3.1 Parede Plana

- ***3.1.1 Distribuição de temperatura:***

A equação geral da condução sem geração de energia interna, 1D, regime estacionário (permanente) é:

$$\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (3.1)$$

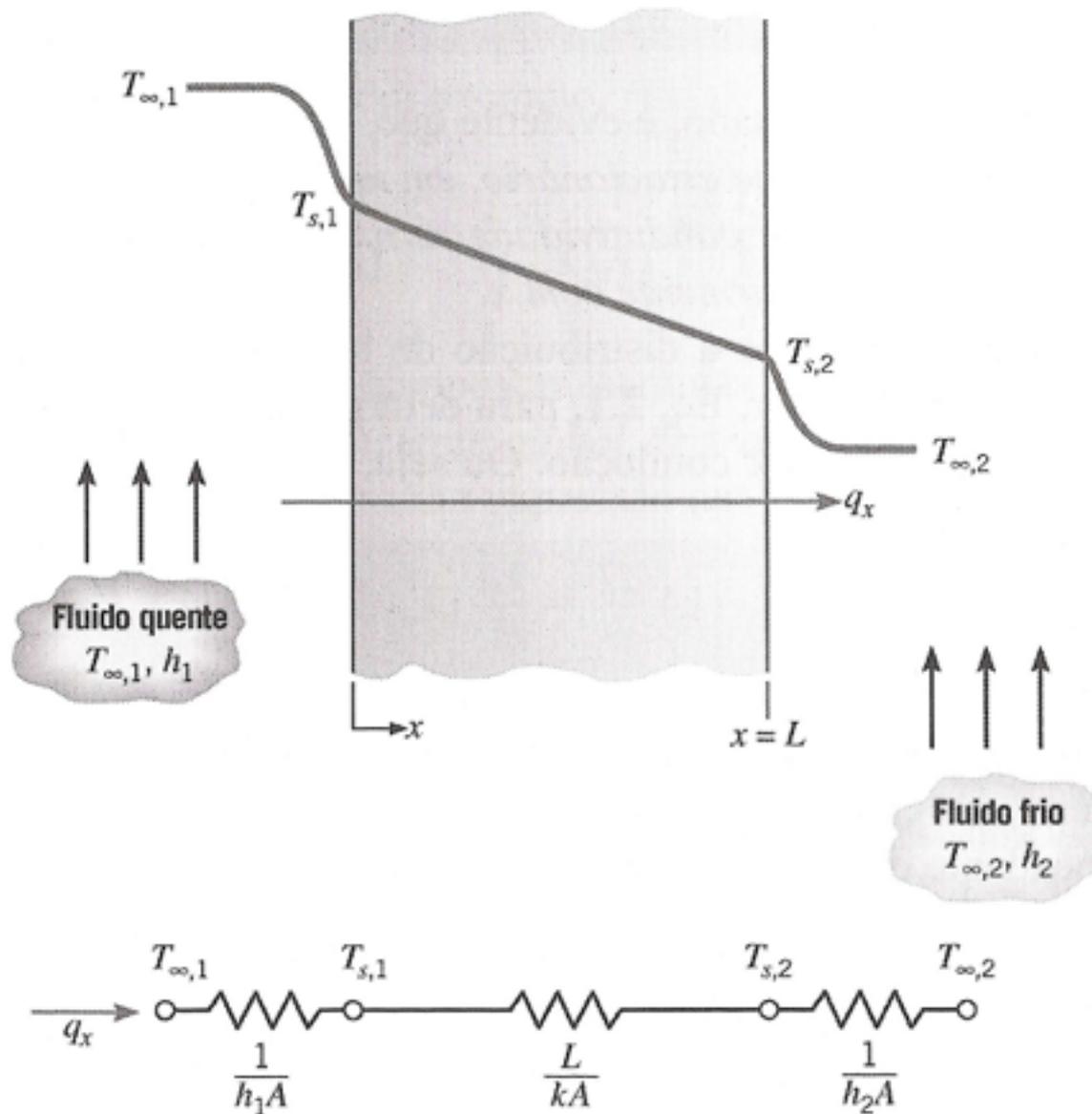


Figura 3.1: Transferência de calor através de uma parede plana

- para $k = cte$, integra-se 3.1 duas vezes:

$$T(x) = C_1x + C_2 \quad (3.2)$$

- Constantes de integração: condições de contorno:

$$x = 0 \quad (3.3)$$

$$\rightarrow T(0) = T_{s,1} = C_2$$

$$x = L$$

$$\rightarrow T(L) = T_{s,2} = C_1L + T_{s,1}$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L}$$

então:

$$T(x) = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L}x + T_{s,1} \quad (3.4)$$

- Fluxo de calor:

$$q_x = -kA \frac{dT}{dx} = -kA \frac{\overbrace{(T_{s,2} - T_{s,1})}^{<0}}{L}$$
$$q_x = \frac{kA}{L}(T_{s,1} - T_{s,2}) \quad (3.5)$$

3.1.2 Resistencia Térmica

- A eq. 3.5 sugere analogia entre fluxo de calor e fluxo de corrente elétrica

- Define-se a *Resistência Térmica de Condução* (R_{cond}) por:

$$R_{cond} \equiv \frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{q_x} = \frac{L}{kA} \quad (3.6)$$

- Taxa de T.C. por convecção:

$$q = hA(T_{sup} - T_{\infty}) \quad (3.7)$$

- Define-se a *Resistência Térmica de Convecção* (R_{conv}) por:

$$R_{conv} \equiv \frac{(T_{sup} - T_{\infty})}{q} = \frac{1}{hA} \quad (3.8)$$

Circuito Térmico Equivalente

- O Fluxo de calor (“corrente”) é o mesmo em todas as resistências (Fig. 3.2):

$$\begin{aligned} q_x &= \frac{(T_{\infty,1} - T_{s,1})}{1/h_1 A} \\ &= \frac{(T_{s,1} - T_{s,2})}{L/k A} \\ &= \frac{(T_{s,2} - T_{\infty,2})}{1/h_2 A} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Circuito Térmico Equivalente

Como as resistências estão em série:

$$q_x = \frac{(T_{\infty,1} - T_{\infty,2})}{R_{tot}} \quad (3.10)$$

onde

$$R_{tot} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{k A} + \frac{1}{h_2 A} \quad (3.11)$$

3.1.3 Paredes Compostas

- Resolve-se pela analogia circuito térmico e elétrico

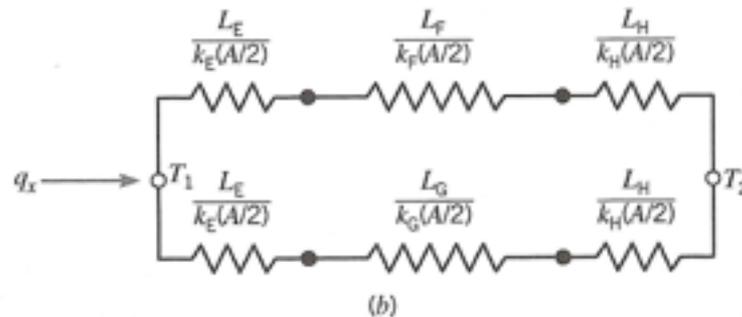
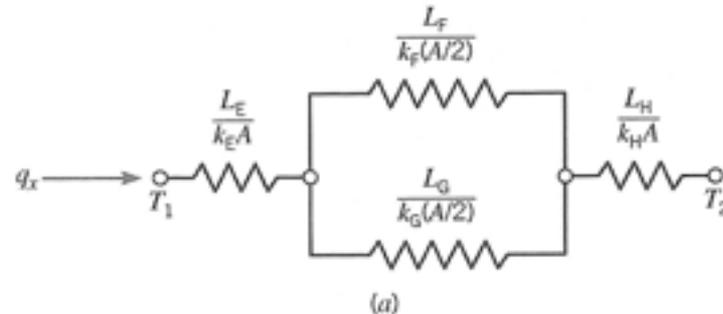
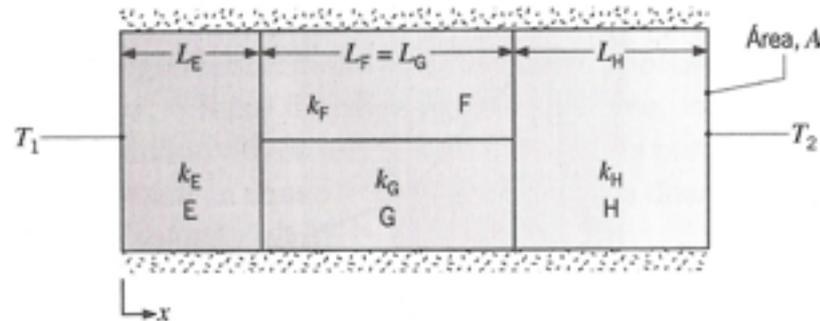


Figura 3.2: Circuitos térmicos equivalentes em série e paralelo

- *Coeficiente Global de T.C. (U)*

$$q_x \equiv U A \Delta T \quad (3.12)$$

onde: ΔT diferença total de temperaturas;

$$U A = \frac{1}{R_{tot}} \rightarrow U = \frac{1}{R_{tot} A} \quad (3.13)$$

3.1.4 Análise Alternativa de Condução

- Alternativa à solução da Eq. Condução 1D (eq. 3.1) para Regime Estacionário, sem geração interna, 1D.
- Usar Lei de Fourier e informação que Taxa de T.C. (q_x) é constante em qualquer secção.

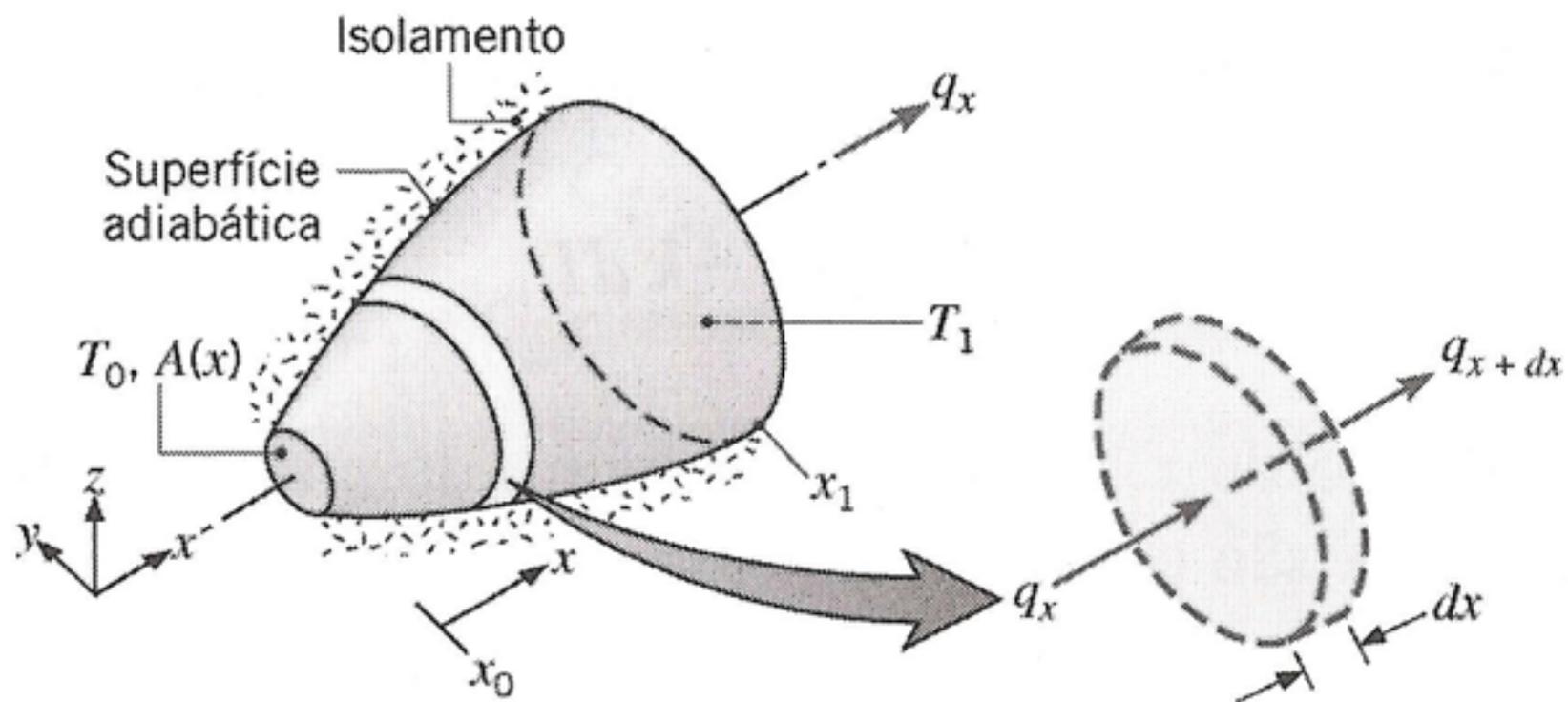


Figura 3.3: Sistema com taxa de T.C. por condução constante

- Lei de Fourier (2.2) na forma integral:

$$q_x \int_{x_0}^x \frac{dx}{A(x)} = - \int_{T_0}^T k(T) dT \quad (3.14)$$

- Dados q_x , $A(x)$ e $T_0(x_0)$ na posição x_0 , calcula-se Temperatura $T(x)$
- ou, conhecida a Temperatura $T(x)$, calcula-se o fluxo q_x

3.2.1 Cilindro

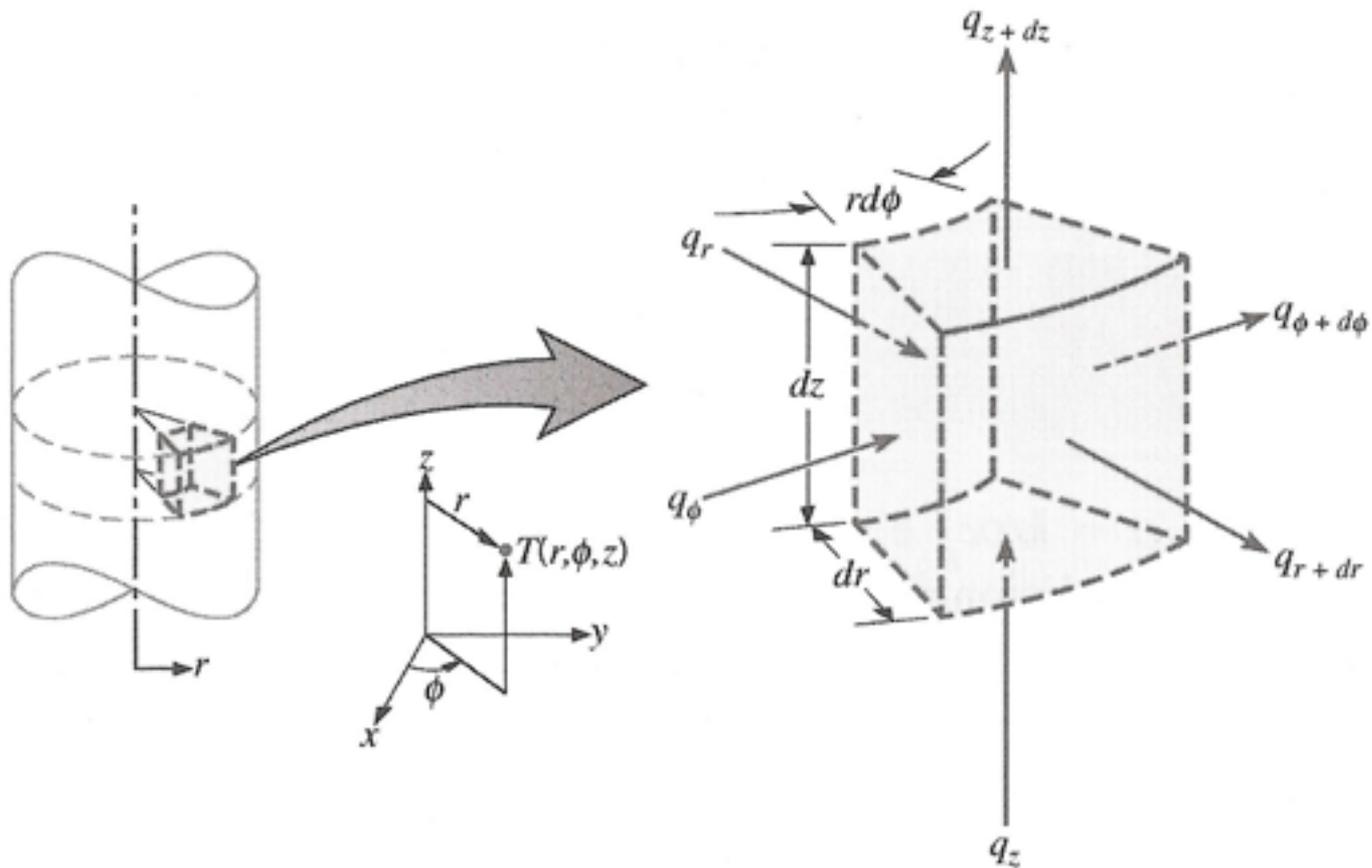


Figura 3.4: Volume de Controle diferencial para coordenadas cilíndricas

- Vetor Fluxo de Calor (Lei de Fourier)

$$\vec{q} = -k\nabla T = -k \left(\vec{i} \frac{\partial T}{\partial r} + \vec{j} \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} + \vec{k} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3.15)$$

- Operador Divergente

$$\nabla \cdot (k\nabla T) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (3.16)$$

Caso particular:

- As temperaturas das superfícies são mantidas constantes
- Regime permanente
- Sem geração interna

$$\nabla \cdot (\nabla T) = 0 \quad (3.17)$$

ou

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla T) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \\ &\frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

- Para superfícies interna e externa isotérmicas e constantes - Problema 1D em r

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0.0 \quad (3.19)$$

- Taxa de condução - Lei de Fourier - na direção radial:

$$q_r = -kA_r \frac{\partial T}{\partial r} = -k2\pi r L \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.20)$$

- Comparando eqs. (3.20) e (3.19) vê-se que a taxa de condução q_r tem que ser constante ao longo do raio.

Distribuição radial de temperatura $T(r)$

- Integrando eq. (3.19) duas vezes tem-se:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \quad (3.21)$$

- As constantes são obtidas das condições de contorno $r_1 \rightarrow T(r_1) = T_{s,1}$ e $r_2 \rightarrow T(r_2) = T_{s,2}$. Então:

$$T(r) = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)} \ln \left(\frac{r}{r_2} \right) + T_{s,2} \quad (3.22)$$

- Distribuição logarítmica e não linear como na parede plana.

- Taxa de T.C. (q_r)

- Lei de Fourier (eq. 3.20)

- Derivando-se a distribuição de temperatura (eq. 3.22)

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)} \frac{1}{r}$$

- Substituindo na Lei de Fourier (3.20) tem-se:

$$q_r = -2\pi r L k \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_1/r_2)} \frac{1}{r} = 2\pi L k \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln(r_2/r_1)} \quad (3.23)$$

- A *Resistência de Condução* no Cilindro é então:

$$R_{cond} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi L k} \quad (3.24)$$

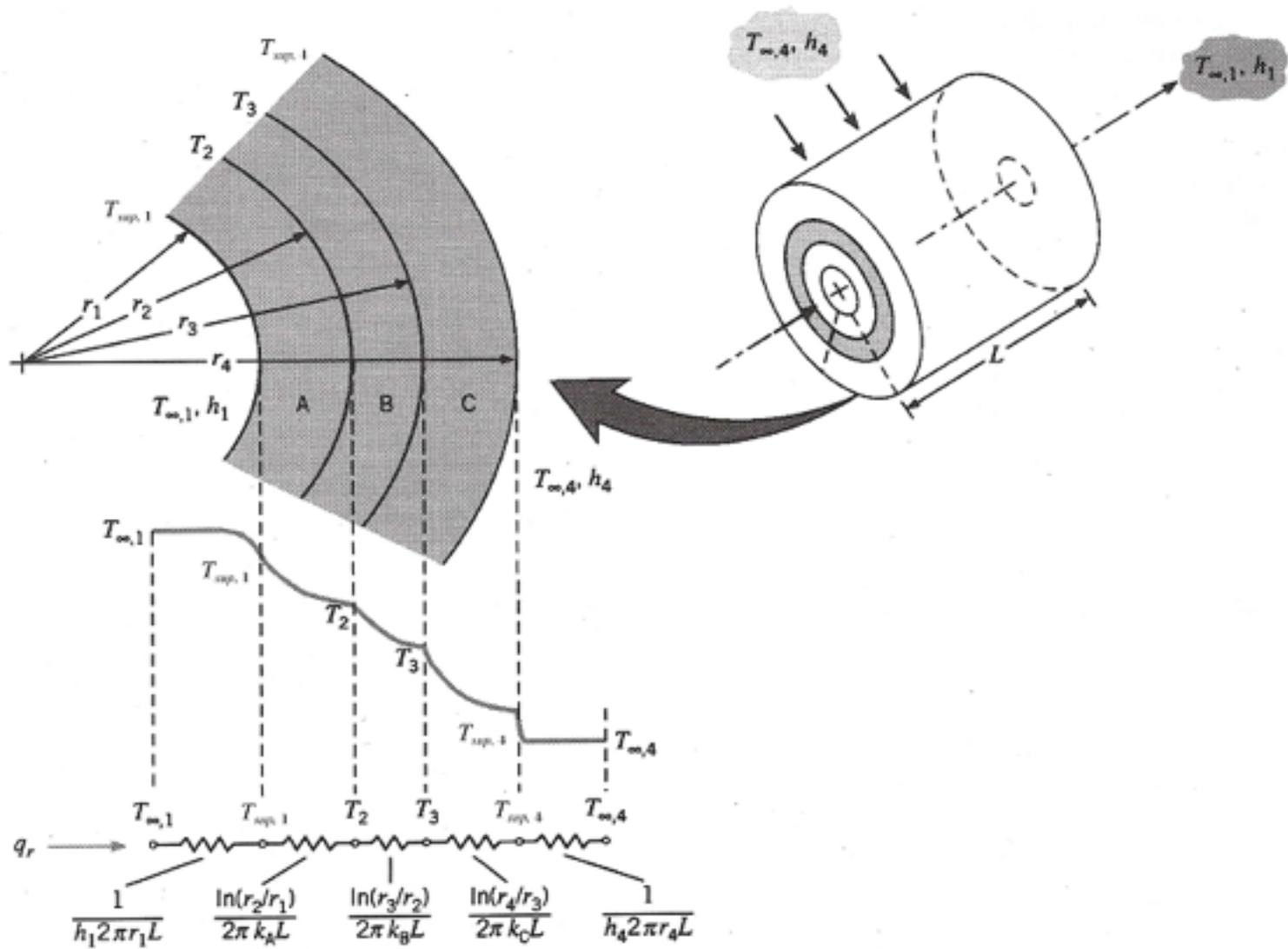


Figura 3.5: Condução em cilindro de parede composta

Raio Crítico de Isolamento

- Cilindro com camada de isolamento, onde T_{int} e T_{ext} constantes e isotérmicas;

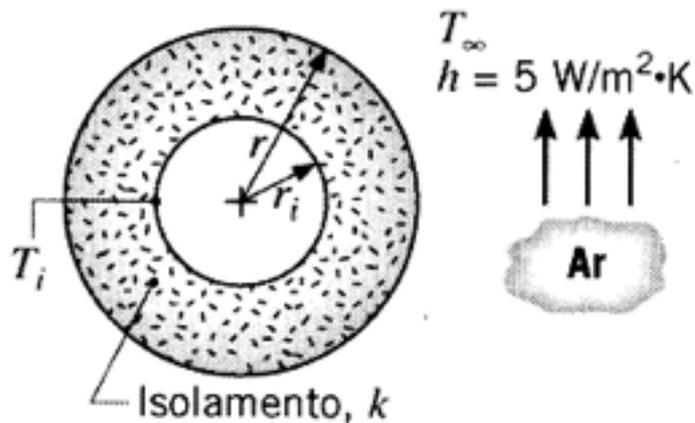


Figura 3.6: Raio crítico de isolamento

- Camada de isolamento aumenta a área externa e favorece a convecção;
- Camada de isolamento aumenta o diâmetro e desfavorece a condução;
- Existe uma espessura ótima que maximize a R_{total} e minimize a T.C. q_r ?
- Solução para:
 - Regime Permanente;
 - Problema 1D;
 - Resistência de condução no tubo desprezível;
 - Sem radiação interna ou externa;
 - Tubo de comprimento unitário.
 - Resistência total: condução no isolamento + convecção externa

$$R'_{total} = \frac{\ln(r/r_1)}{2\pi k} + \frac{1}{2\pi r h} \quad (3.25)$$

e

$$q_r = \frac{T_{int} - T_{\infty}}{R'_{total}} \quad (3.26)$$

- Espessura ótima: q_r mínimo ou R_{total} máximo.
Então:

$$\frac{dR'_{total}}{dr} = 0$$

$$\frac{1}{2\pi r K} - \frac{1}{2\pi h r^2} = 0 \rightarrow r = \frac{k}{h} \quad (3.27)$$

- Para este raio, a derivada segunda vale:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 R'_{total}}{dr^2} &= -\frac{1}{2\pi k r^2} + \frac{1}{\pi h r^3} \\ &= -\frac{1}{2\pi k \left(\frac{k}{h}\right)^2} + \frac{1}{\pi h \left(\frac{k}{h}\right)^3} \\ &= \frac{1}{\pi \frac{k^2}{h^2}} \underbrace{\left(-\frac{1}{2k} + \frac{1}{k} \right)}_{>0}\end{aligned}\quad (3.28)$$

- Então o ponto é de mínimo $\rightarrow R_{total} \rightarrow$ é mínima; o fluxo é máximo
- $r_{cr} = k/h$ é um *Raio crítico* - Não depende da espessura do isolamento nem do tubo.

3.2.2 Esfera

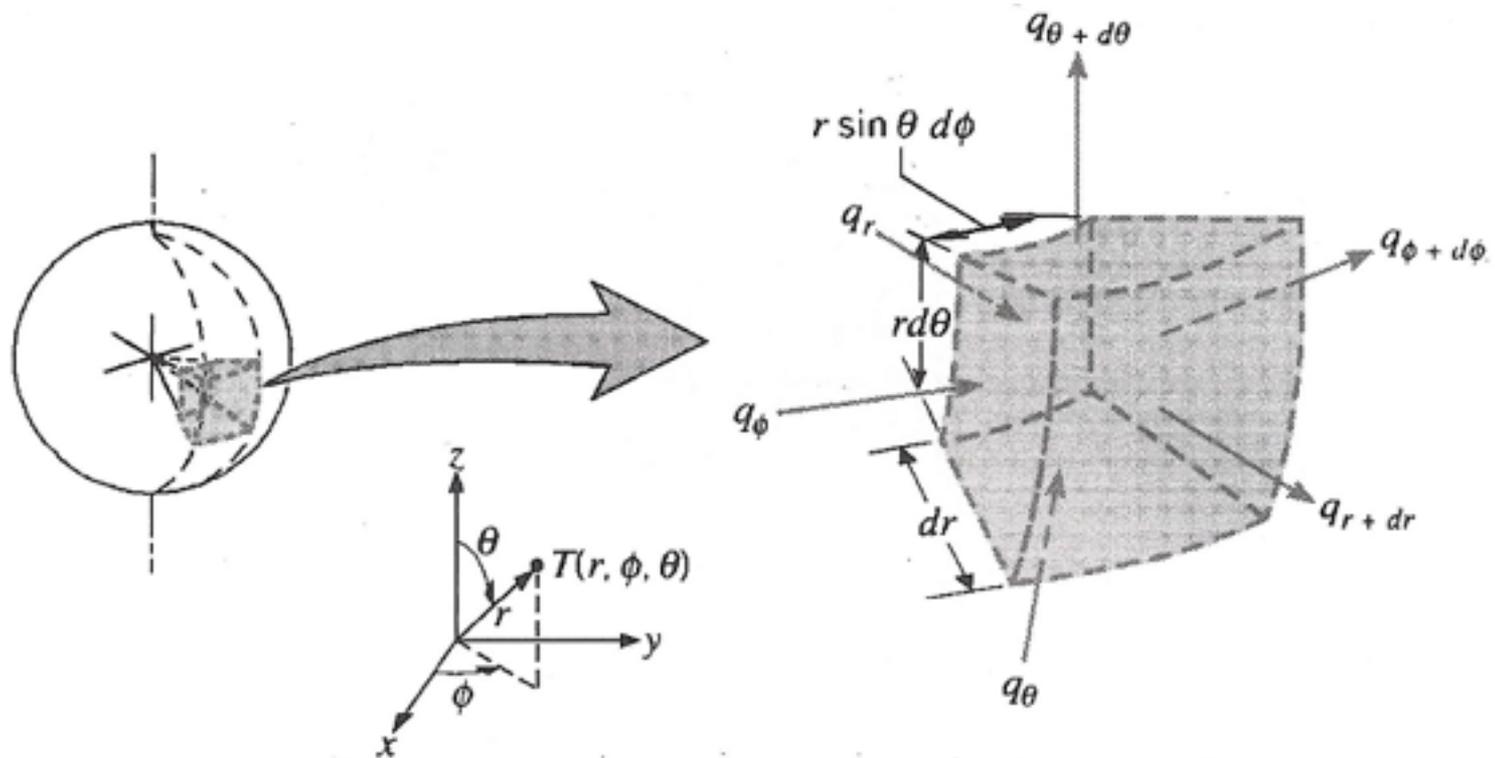


Figura 3.7: Volume de control diferencial para coordenadas esféricas

Tabela 3.1: Soluções unidimensionais, em regime estacionário, da equação do calor sem geração

	Parede Plana	Parede Cilíndrica ¹	Parede Esférica ¹
<i>Equação de calor</i>	$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$	$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$	$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$
<i>Distribuição de temperatura</i>	$T_{s,1} - \Delta T \frac{x}{L}$	$T_{s,2} + \Delta T \frac{\ln(r/r_2)}{\ln(r_1/r_2)}$	$T_{s,1} - \Delta T \left[\frac{1 - (r_1/r)}{1 - (r_1/r_2)} \right]$
<i>Fluxo de calor (q'')</i>	$k \frac{\Delta T}{L}$	$\frac{k \Delta T}{r \ln(r_2/r_1)}$	$\frac{k \Delta T}{r^2 [(1/r_1) - (1/r_2)]}$
<i>Taxa de calor (q)</i>	$kA \frac{\Delta T}{L}$	$\frac{2\pi Lk \Delta T}{\ln(r_2/r_1)}$	$\frac{4\pi k \Delta T}{(1/r_1) - (1/r_2)}$
<i>Resistência térmica ($R_{t,cond}$)</i>	$\frac{L}{kA}$	$\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi Lk}$	$\frac{(1/r_1) - (1/r_2)}{4\pi k}$

¹O raio crítico do isolante é $r_{cr} = k/h$ para o cilindro e $r_{cr} = 2k/h$ para a esfera

3.3 Condução com Geração de Energia Térmica

- Processo de conversão de energia no V.C.
 - reações químicas endo/exotérmicas;
 - aquecimento resistivo (Ohm);
 - absorção de radiações eletromagnéticas.
- não confundir conversão (“geração”) de energia com acúmulo de energia no V.C.

3.3.1 Parede Plana - Regime Permanente

- Equação de condução, 1D, com geração interna:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (3.29)$$

- Solução geral:

$$T = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1x + C_2 \quad (3.30)$$

● Condições de Contorno

- Temperaturas conhecidas:

$$T(-L) = T_{s,1} \text{ e } T(+L) = T_{s,2}$$

- Determinam-se as constantes C_1 e C_2 e a equação torna-se:

$$T = \frac{\dot{q}}{2k}L^2 \left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{(T_{s,2} - T_{s,1})x}{2L} + \frac{(T_{s,1} + T_{s,2})}{2} \quad (3.31)$$

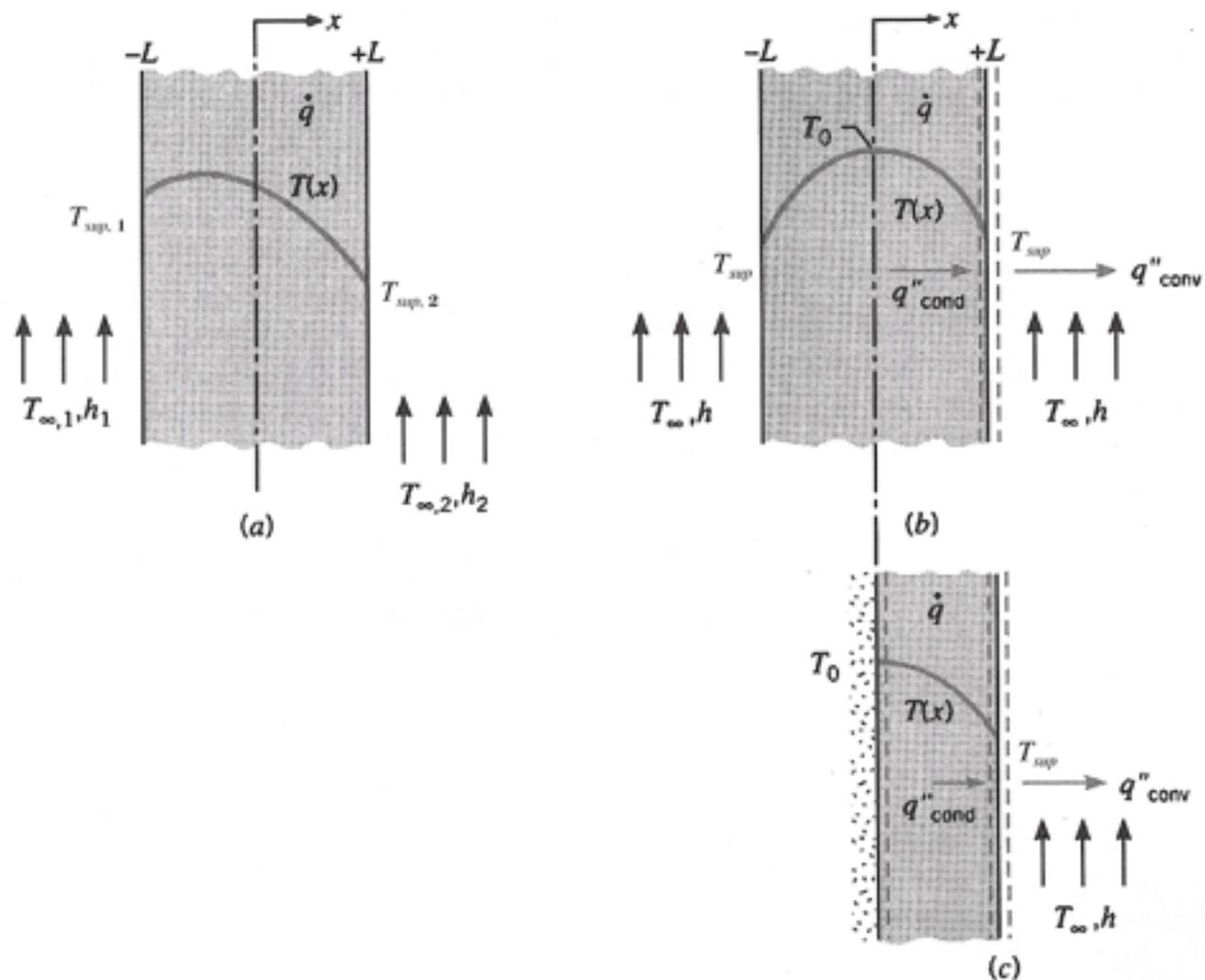


Figura 3.8: Condução em parede plana. a) Condições de contorno assimétricas. b) C. C. simétricas. c) Superfície adiabática na linha de centro. $x = 0$

- Fluxo de Calor depende da posição x , pois $\frac{dT}{dx} = f(x)$
- A distribuição de temperatura (eq. 3.31), para o caso particular de $T_{s,1} = T_{s,2} = T_s$, torna-se:

$$T(x) = \frac{\dot{q}}{2k} L^2 \left(1 - \frac{x^2}{L^2} \right) + T_s \quad (3.32)$$

- A temperatura máxima (ou mínima) ocorre no centro $x = 0$:

$$T(0) \equiv T_0 = \frac{\dot{q}}{2k} L^2 + T_s \quad (3.33)$$

- Adimensionalizando-se $T(x)$ com a máxima diferença ($T_s - T_0$) tem-se:

$$\frac{T(x) - T_0}{T_s - T_0} = \left(\frac{x}{L} \right)^2 \quad (3.34)$$

- Simetria vem da derivada em $x = 0$:

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = 0 \quad (3.35)$$

- Na linha de simetria não há transferência de calor (Lei de Fourier). Equivale a uma parede adiabática.

● Condição de Contorno - Em $x = L$ convecção e parede adiabática em $x = 0$

- Fluxo de calor por convecção junto à parede é igual ao fluxo de calor por condução dentro da parede:

$$\vec{q}'' = -k \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = h(T_s - T_\infty) \quad (3.36)$$

Derivando-se a distribuição de temperatura (eq. 3.31), avaliando em $x = L$ e substituindo-se em (3.36) tem-se:

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}L}{h} \quad (3.37)$$

- Esta mesma expressão poderia ser obtida de um balanço global na parede:

$$\dot{E}_g = \dot{E}_s \quad (3.38)$$

que pode ser escrito por unidade de área da parede como:

$$\dot{q}L = h(T_s - T_\infty) \quad (3.39)$$

- As eqs. (3.37) ou (3.39) podem ser utilizadas na distribuição de temperatura (eq. 3.31 ou 3.32).

3.3.2 Sistemas Radiais

- Exemplos: fio condutor, elemento combustível de reator nuclear, pilar de concreto etc.
- Regime permanente, fluxo de calor 1D, \dot{q} uniforme no cilindro:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

(3.40)

Separando as variáveis e integrando tem-se:

$$r \frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{q}}{2k} r^2 + C_1 \quad (3.41)$$

Integrando novamente chega-se a:

$$T(r) = -\frac{\dot{q}}{4k} r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (3.42)$$

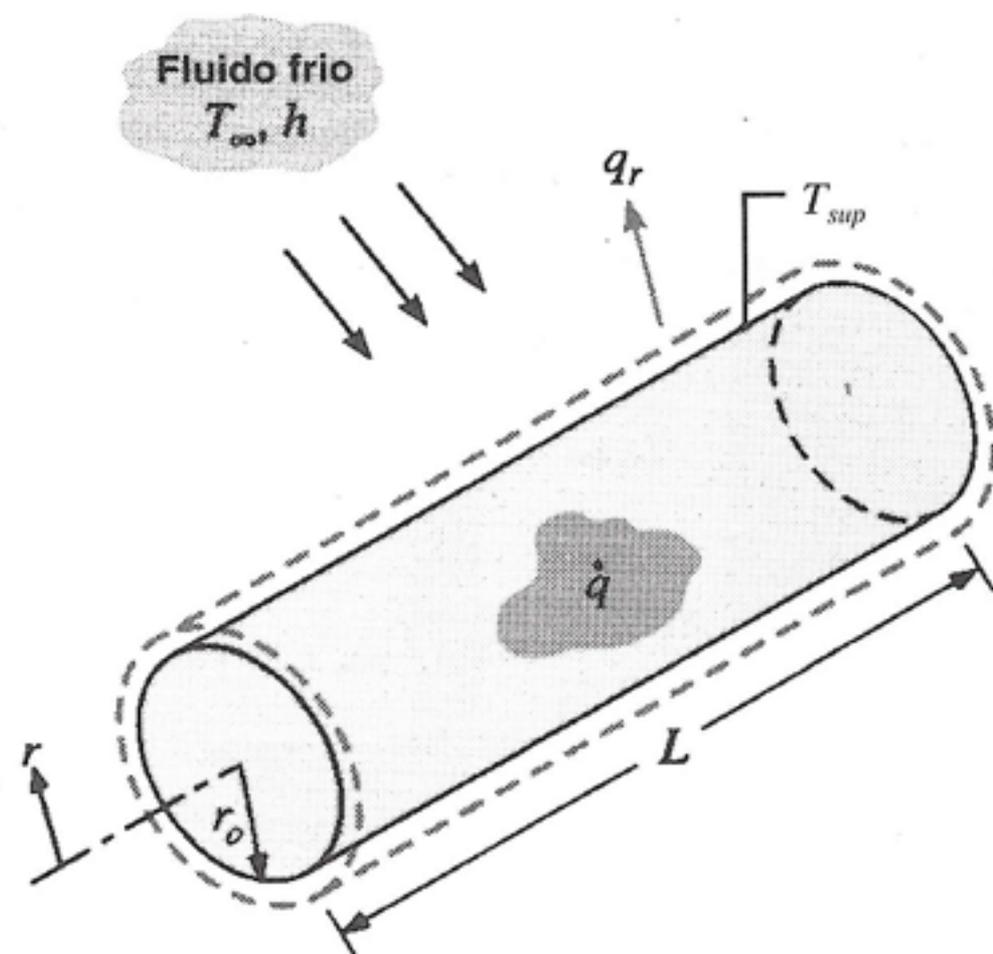


Figura 3.9: Condução em cilindro com geração de calor uniforme

As constantes são obtidas das condições de contorno:

- Simetria em $r = 0 \rightarrow \left(\frac{dT}{dr}\right)_{r=0} = 0$
 - Da eq. (3.41) vê-se que $C_1 = 0.0$
- Temperatura em $r = r_o \rightarrow T(r_o) = T_s$
 - Da eq. (3.42) para $r = r_o$ tem-se:

$$C_2 = T_s + \frac{\dot{q}}{4k}r_o^2$$

- A distribuição de temperatura fica:

$$T(r) = \frac{\dot{q}}{4k}r_o^2 \left(1 - \frac{r^2}{r_o^2}\right) + T_s \quad (3.43)$$

- Adimensionalizando com a diferença máxima $(T_{r=0} - T_s)$ tem-se:

$$\frac{(T(r) - T_s)}{(T_{r=0} - T_s)} = 1 - \left(\frac{r}{r_o}\right)^2 \quad (3.44)$$

Para condição de convecção na superfície, pode-se obter:

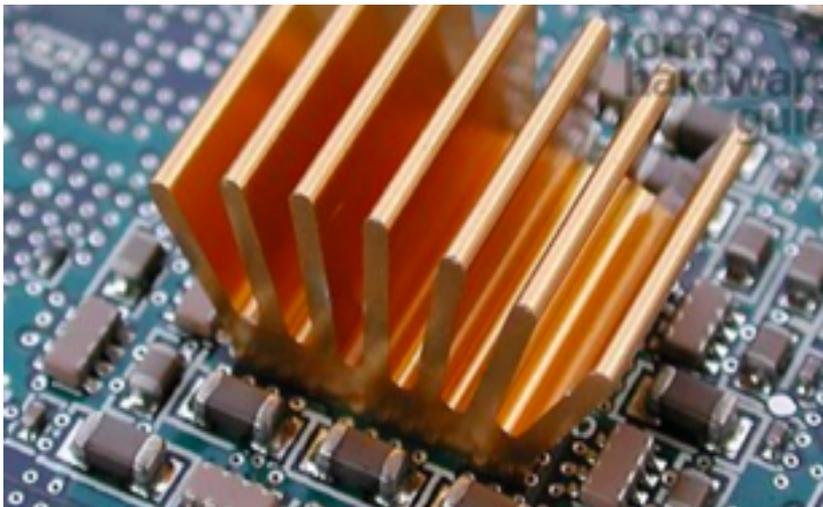
$$\text{Energia: } \dot{q}(\pi r_o^2 L) = h(2\pi r_o L)(T_s - T_\infty) \quad (3.45)$$

A temperatura na superfície é expressa por:

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}r_o}{2h} \quad (3.46)$$

Substituindo-se a eq. (3.46) na eq. (3.43), tem-se a distribuição de temperatura para a condição de convecção.

3.4 *Transferência de calor em superfícies estendidas (Aletas)*



*3.4 Transferência de calor em superfícies estendidas (**Aletas**)*

- Como aumentar a T.C. numa superfície com convecção ?

$$q = hA(T_s - T_\infty) \quad (3.47)$$

- h limitado pelo escoamento; T_∞ limitado pelas condições ambientes.
- Aumentar a área de troca A é interessante.
- Uma superfície estendida (Aleta) aumenta a área.
 - Cilindro do motor de moto; Componentes eletroeletrônicos.

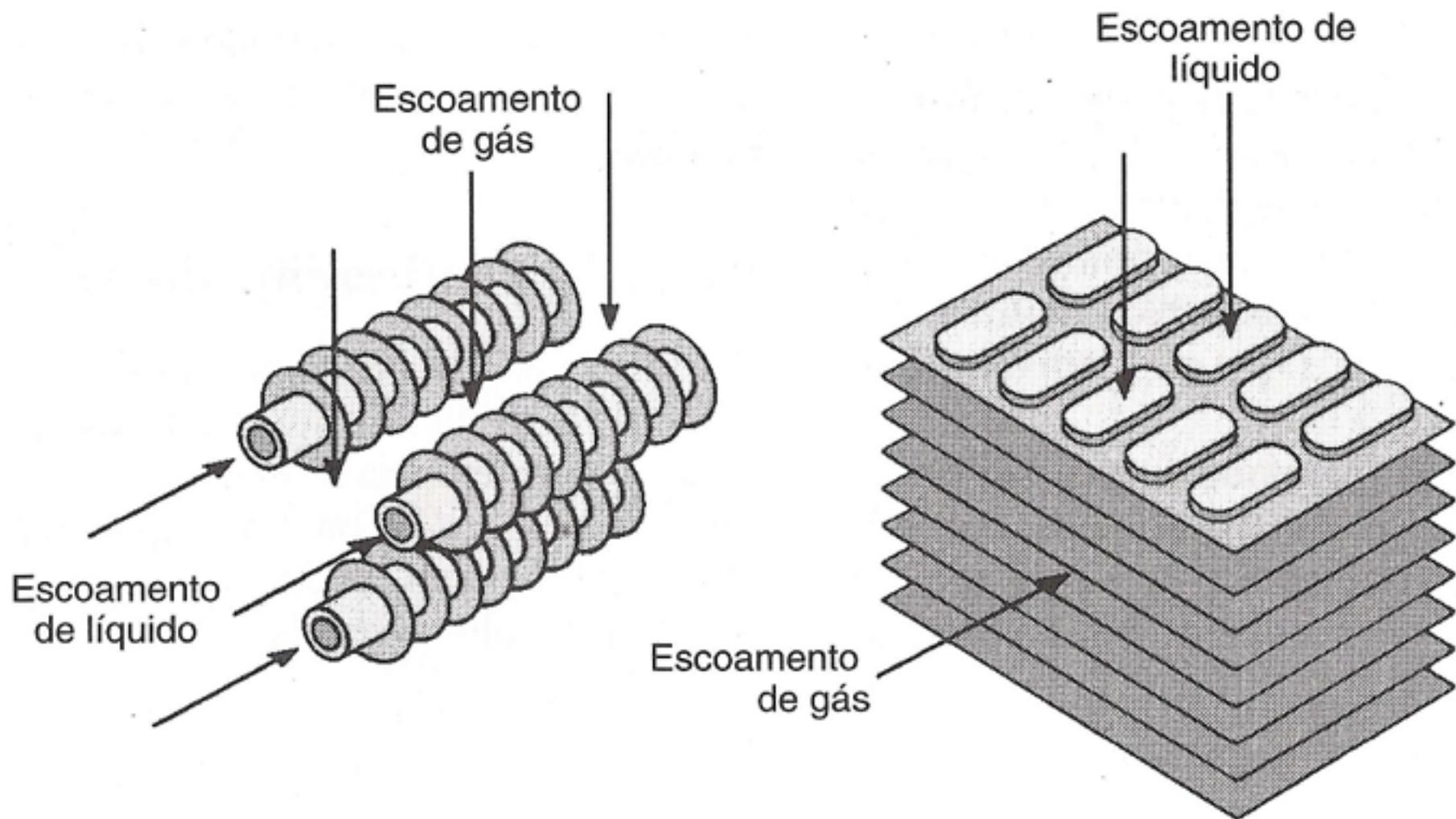


Figura 3.10: Configurações de aletas

3.4.1 Análise geral da condução

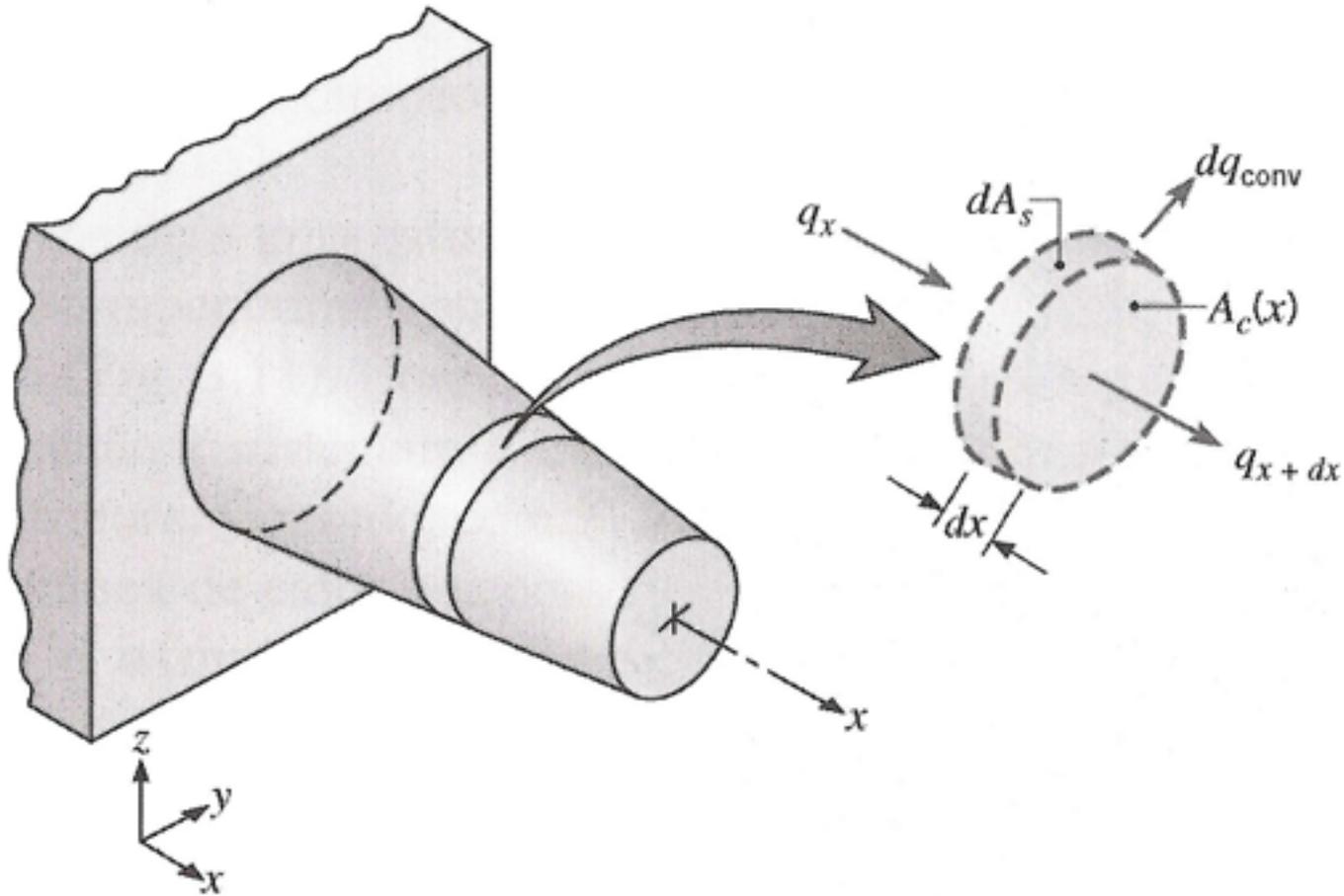


Figura 3.11: Balanço de energia

- Hipóteses:
 - Condução 1D em x ;
 - Propriedades constantes;
 - Sem radiação;
 - Sem geração interna;
 - h uniforme sobre toda a superfície
- Conservação da energia para o elemento infinitesimal:

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv} \quad (3.48)$$

-Pela Lei de Fourier:

$$q_x = -kA_{sr}(x)\frac{dT}{dx} \quad (3.49)$$

-Por série de Taylor:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx}dx \quad (3.50)$$

então:

$$q_{x+dx} = -kA_{sr}(x)\frac{dT}{dx} - k\frac{d}{dx}\left(A_{sr}(x)\frac{dT}{dx}\right)dx \quad (3.51)$$

a taxa de T.C. por convecção é

$$dq_{conv} = hdA_{sup}(T - T_{\infty}) \quad (3.52)$$

substituindo-se as eqs. (3.52), (3.51) e (3.49) na equação de balanço (3.48), chega-se a:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \left(\frac{1}{A_{sr}} \frac{d}{dx} A_{sr} \right) \frac{dT}{dx} - \left(\frac{h}{A_{sr}k} \frac{d}{dx} A_{sup} \right) (T - T_{\infty}) = 0 \quad (3.53)$$

3.4.2 Aleta com área de secção reta uniforme

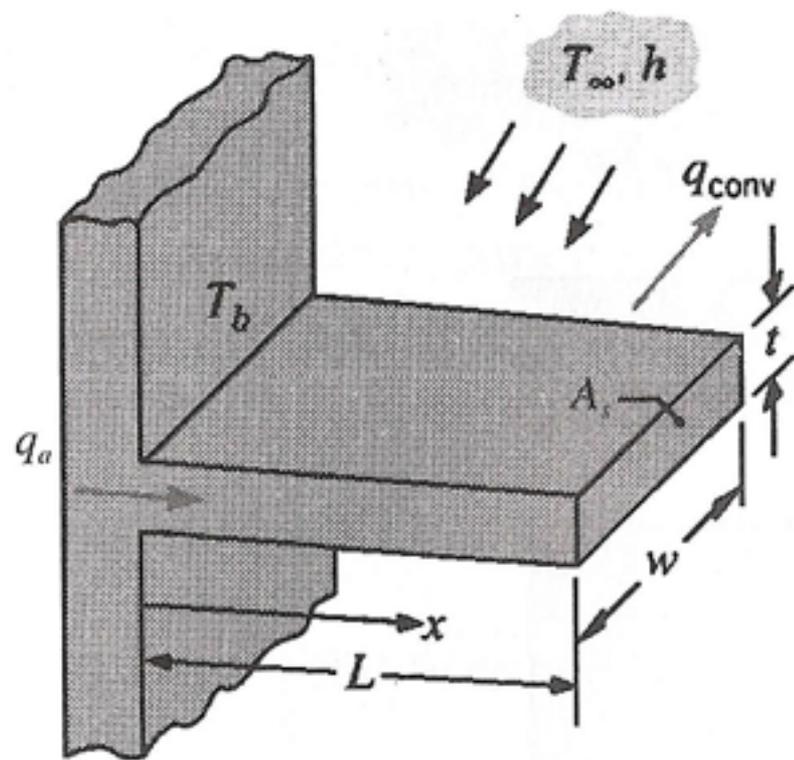
$$\text{Para } A_{sr}(x) = cte \rightarrow \frac{d}{dx}A_{sr} = 0;$$

Temperatura na base da aleta:

$$T(x = 0) = T_b$$

Área superficial da aleta:

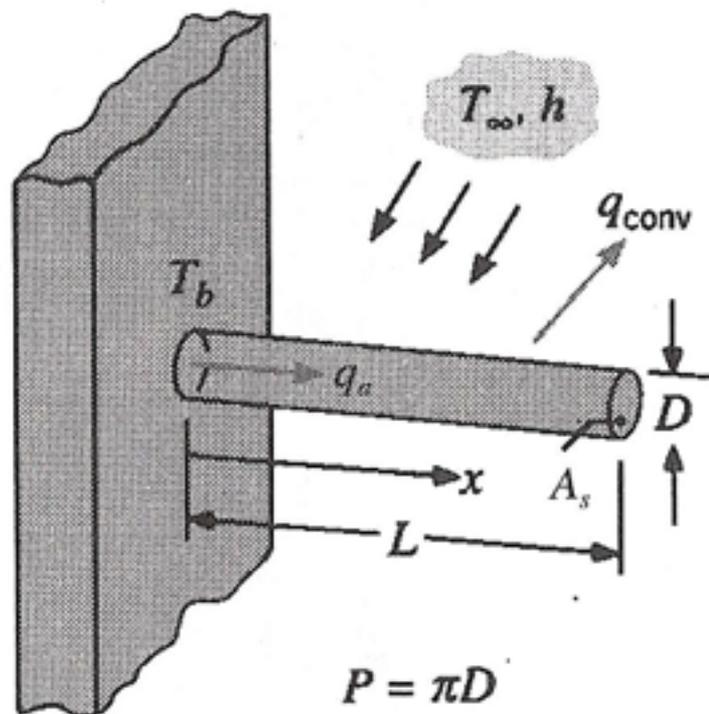
$$A_{sup} = Px \rightarrow \frac{d}{dx}A_{sup} = P$$



$$P = 2w + 2t$$

$$A_{sr} = Ww$$

(a)



$$P = \pi D$$

$$A_{sr} = \pi D^2/4$$

(b)

Figura 3.12: Aletas planas com área de secção reta uniforme. (a) Aleta retangular. (b) Aleta pini-forme.

Aplicando-se na eq.(3.53) obtém-se:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{kA_{sr}}(T - T_{\infty}) = 0 \quad (3.54)$$

Definindo-se o *Excesso de Temperatura* $\theta(x)$ por:

$$\theta(x) \equiv T(x) - T_{\infty} \quad (3.55)$$

e sua derivada:

$$\frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{dT(x)}{dx} \quad (3.56)$$

substituindo-se (3.55) e (3.56) na eq. (3.54) tem-se:

$$\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} - m^2\theta(x) = 0 \quad (3.57)$$

onde $m^2 = \frac{hP}{kA_{sr}}$

Eq. dif. de 2a. ordem, homogênea, coeficientes constantes. Solução tipo:

$$\theta(x) = C_1e^{mx} + C_2e^{-mx} \quad (3.58)$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO

- Na base da aleta $x = 0$

$$\theta(0) = T_b - T_\infty \equiv \theta_b \quad (3.59)$$

- Na ponta da aleta $x = L \rightarrow 4$ condições

a) Convecção

Fluxo de calor por condução é igual ao de convecção:

$$\begin{aligned} q_{x=L} &= q_{conv} \\ -kA_{sr} \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} &= hA_{sr}(T(L) - T_\infty) \\ h\theta(L) &= -k \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=L} \end{aligned}$$

(3.60)

Utilizando-se a eq. (3.58) para $\theta(L)$ e tomando-se $\frac{d\theta}{dx}$, obtém-se:

$$h(C_1e^{mL} + C_2e^{-mL}) = km(C_2e^{-mL} - C_1e^{mL}) \quad (3.61)$$

para a temperatura na base tem-se:

$$\begin{aligned} \theta(0) &= C_1e^0 + C_2e^0 \\ \theta_b &= C_1 + C_2 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Resolvendo-se as eqs. (3.61) e (3.62) para C_1 e C_2 e utilizando-se as expressões para funções hiperbólicas:

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{\cosh[m(L-x)] + (h/mk)\sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + (h/mk)\sinh(mL)} \quad (3.63)$$

Taxa de T.C. na aleta:

$$q_a = q_b = -kA_{sr} \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -kA_{sr} \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} \quad (3.64)$$

como $\theta(x)$ é conhecida (eq.3.63), tem-se:

$$q_a = \sqrt{hPkA_{sr}} \theta_b \frac{\sinh(mL) + (h/mk)\cosh(mL)}{\cosh(mL) + (h/mk)\sinh(mL)} \quad (3.65)$$

b) Convecção desprezível (adiabática)

$$\frac{d\theta}{dx_{x=L}} = 0 \quad (3.66)$$

aplicando-se em (3.58) e dividindo por m tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx_{x=L}} &= C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} = 0 \\ C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} &= 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

com a expressão de θ_b (3.62) resolve-se C_1 e C_2 , obtendo-se:

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)} \quad (3.68)$$

A taxa de T.C é dada por:

$$q_a = \sqrt{hPkA_{sr}} \theta_b \tanh(mL) \quad (3.69)$$

c) Temperatura conhecida $\theta(L) = \theta_L$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_b} = \frac{(\theta_L/\theta_b)\text{senh}(mx) + \text{senh}[m(L-x)]}{\text{senh}(mL)} \quad (3.70)$$

A taxa de T.C é dada por:

$$q_a = \sqrt{hPkA_{sr}}\theta_b \frac{\text{cosh}(mL) - \theta_L/\theta_b}{\text{senh}(mL)} \quad (3.71)$$

d) Aleta muito longa $L \rightarrow \infty$

-Para $L \rightarrow \infty$, o excesso de temperatura tende ao do meio: $\theta_L \rightarrow 0$

-Solução geral (3.58):

$$\begin{aligned}\theta(x) &= C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (\theta(x)) = 0 &= C_1 \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{mx}) + C_2 \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-mx})}_{=0} \\ 0 &= C_1 \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{mx}) \\ C_1 &= 0\end{aligned}\tag{3.72}$$

ainda, por (3.62):

$$\begin{aligned}\theta_b &= C_1 + C_2 \\ C_2 &= \theta_b\end{aligned}\quad (3.73)$$

então a expressão do excesso de temperatura é

$$\theta(x) = \theta_b e^{-mx} \quad (3.74)$$

A taxa de T.C é dada por:

$$\begin{aligned}q_a &= -kA_{sr} \frac{d\theta}{dx} \Big|_{x=0} = -kA_{sr} \theta_b (-m) \overbrace{e^{-mx}}^{=1} \\ &= -kA_{sr} (-\sqrt{hP/kA_{sr}}) \theta_b \\ &= \sqrt{hPkA_{sr}} \theta_b\end{aligned}\quad (3.75)$$

3.4.3 Desempenho da Aleta

- A aleta aumenta a resistência de condução. Qual o ganho real na T. C. ? \rightarrow *Efetividade da Aleta* (ε_a).

$$\varepsilon_a \equiv \frac{\text{Taxa de T.C. da aleta}}{\text{Taxa de T.C. que existiria sem a presença da aleta}}$$
$$\varepsilon_a = \frac{q_a}{hA_{sr,b}\theta_b} \quad (3.76)$$

- Bom projeto $\varepsilon_f \geq 2$
- Para a condição de aleta infinita

$$\begin{aligned}\varepsilon_a &= \frac{(hPkA_{sr})^{1/2}\theta_b}{hA_{sr,b}\theta_b} \\ &= \left(\frac{kP}{hA_{sr}}\right)^{1/2}\end{aligned}\tag{3.77}$$

- $k \uparrow, \varepsilon_a \uparrow$;
- $P/A_{sr} \uparrow \varepsilon_a \uparrow$;
- h baixo justifica aleta.

- Para aleta com ponta adiabática:

$$- \operatorname{tgh}(2,3) \approx 0,98 \rightarrow L_{\text{bom}} = 2,3/m$$

- Resistência da Aleta

$$R_{t,a} = \frac{\theta_b}{q_a} \quad (3.78)$$

Resistência que existiria na base da aleta (só convecção):

$$R_{t,b} = \frac{1}{hA_{sr,b}} \quad (3.79)$$

Dividindo a Resistência da base pela da aleta tem-se:

$$\frac{\frac{1}{hA_{sr,b}}}{\frac{\theta_b}{q_a}} = \frac{q_a}{hA_{sr,b}\theta_b} = \varepsilon_a \quad (3.80)$$

- Eficiência da Aleta

$$\begin{aligned}\eta_a &\equiv \frac{\text{Taxa de T.C. da aleta}}{\text{Taxa de T.C. máxima com } \theta_b \text{ constante em toda a aleta}} \\ \eta_a &= \frac{q_a}{q_{max}} \\ &= \frac{q_a}{hA_{sup}\theta_b}\end{aligned}\tag{3.81}$$

onde A_{sup} é a área superficial de toda a aleta. Para aleta plana, secção reta uniforme, ponta adiabática tem-se:

$$\eta_a = \frac{Mtgh(ml)}{hPL\theta_b} = \frac{tgh(mL)}{mL}\tag{3.82}$$

onde $M = \sqrt{hPkA_{sr}\theta_b}$

- Correção de comprimento para compensar convecção na ponta:

$$L_c = L + (t/2); L_c = L + (D/4) \quad (3.83)$$

e então:

$$\eta_a = \frac{tgh(mL_c)}{mL_c} \quad (3.84)$$

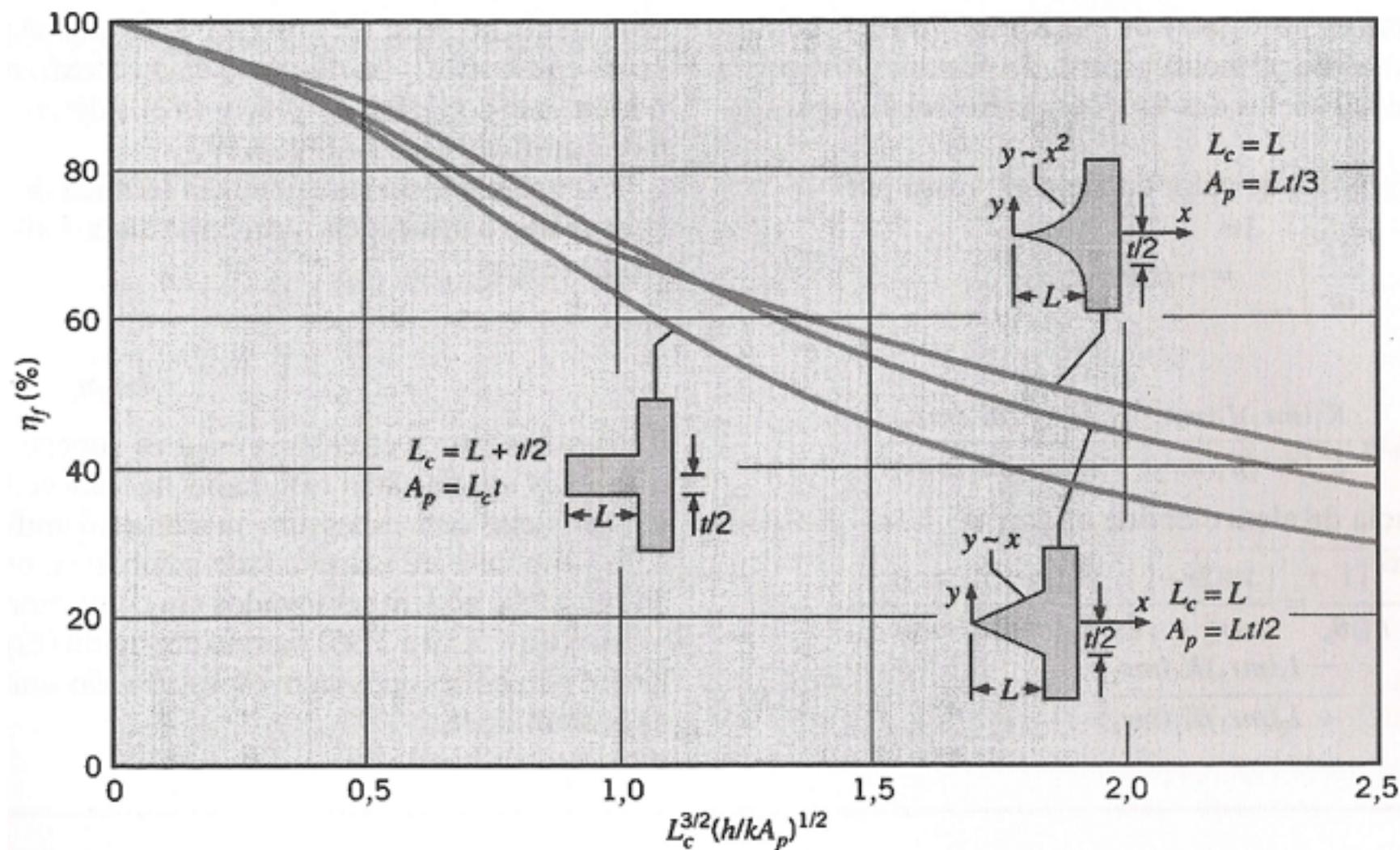


Figura 3.13: Eficiência de aleta plana

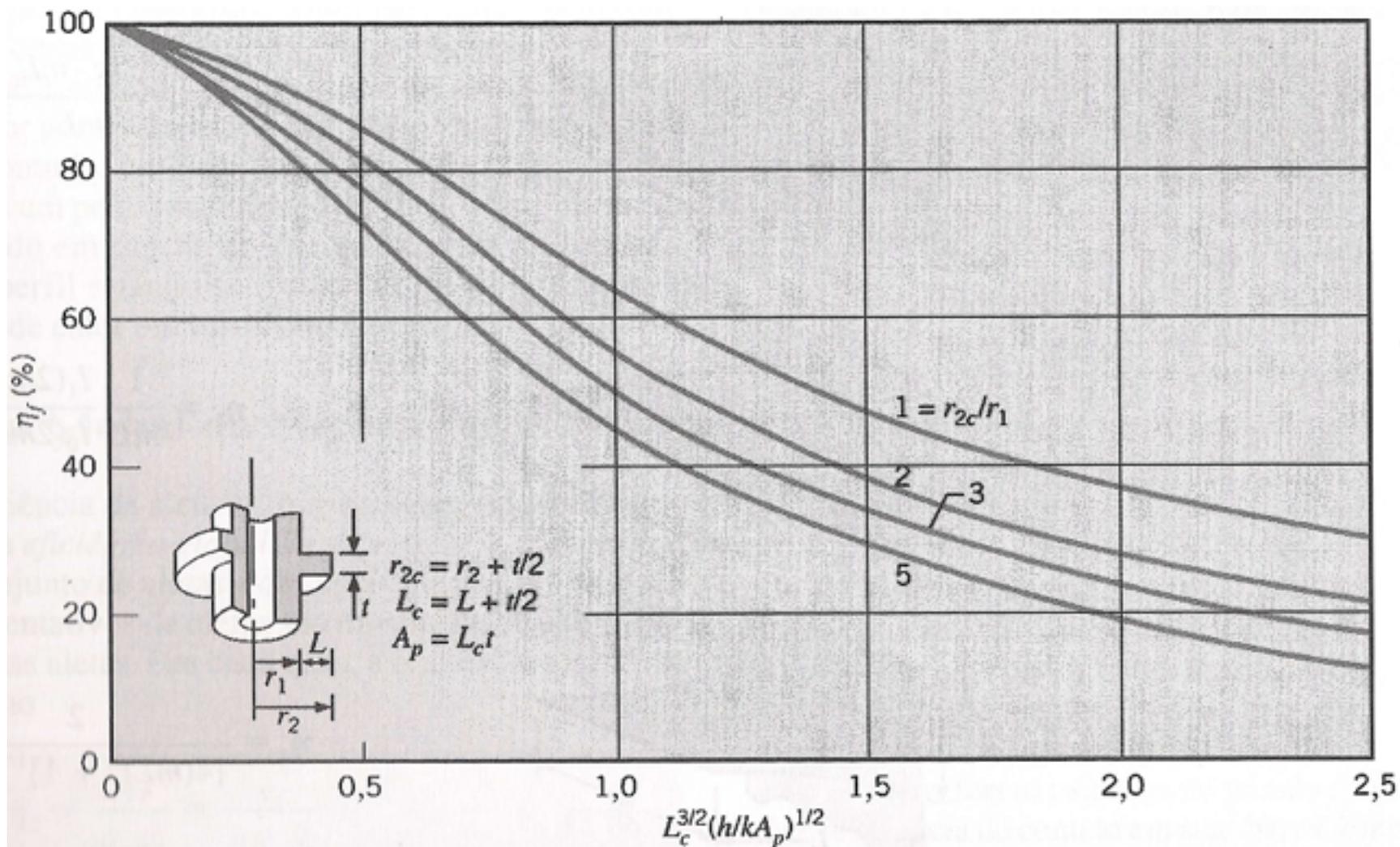
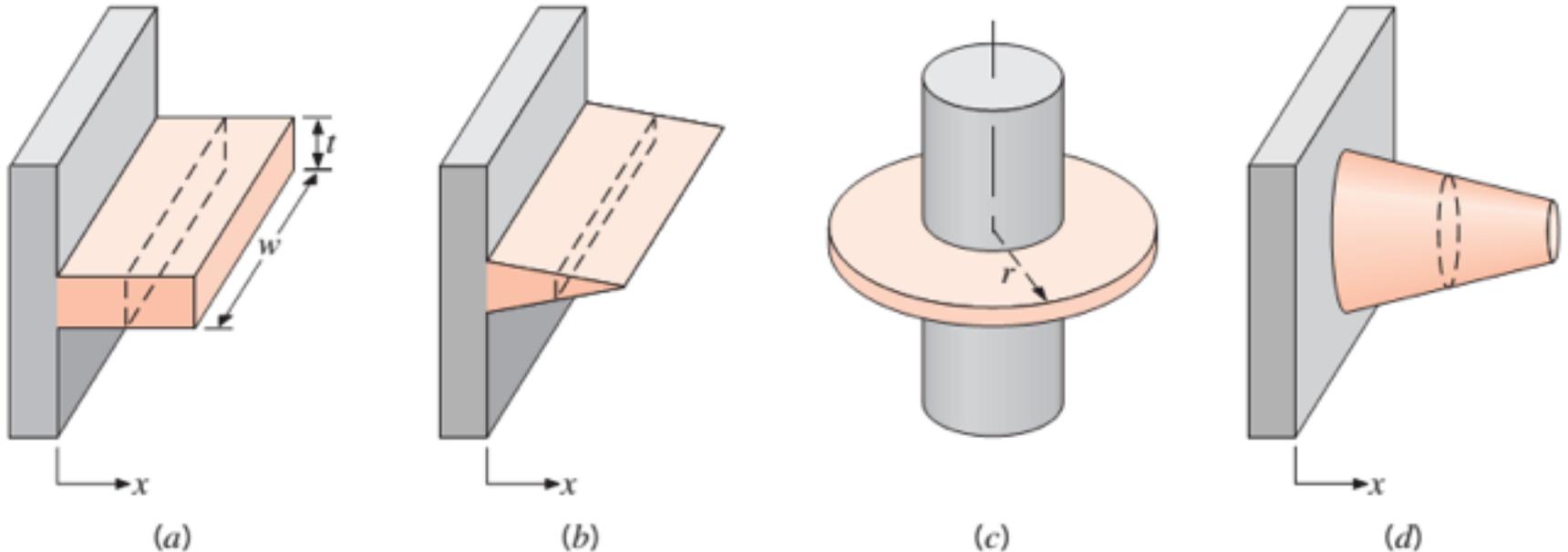


Figura 3.14: Eficiência de aleta anular

Configurações de Aletas



(a) Aleta plana de seção reta uniforme

(b) Aleta plana de seção reta variável

(c) Aleta anular

(d) Aleta piniforme

Tabela 3.2: Distribuição de Temperatura e Dissipação Térmica em Aletas com Área de seção Reta Uniforme

TABLE 3.4 Temperature distribution and heat loss for fins of uniform cross section

Case	Tip Condition ($x = L$)	Temperature Distribution θ/θ_b	Fin Heat Transfer Rate q_f
A	Convection heat transfer: $h\theta(L) = -kd\theta/dx _{x=L}$	$\frac{\cosh m(L-x) + (h/mk) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$ (3.75)	$M \frac{\sinh mL + (h/mk) \cosh mL}{\cosh mL + (h/mk) \sinh mL}$ (3.77)
B	Adiabatic: $d\theta/dx _{x=L} = 0$	$\frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}$ (3.80)	$M \tanh mL$ (3.81)
C	Prescribed temperature: $\theta(L) = \theta_L$	$\frac{(\theta_L/\theta_b) \sinh mx + \sinh m(L-x)}{\sinh mL}$ (3.82)	$M \frac{(\cosh mL - \theta_L/\theta_b)}{\sinh mL}$ (3.83)
D	Infinite fin ($L \rightarrow \infty$): $\theta(L) = 0$	e^{-mx} (3.84)	M (3.85)

$$\theta \equiv T - T_\infty \qquad m^2 \equiv hP/kA_c$$

$$\theta_b = \theta(0) = T_b - T_\infty \qquad M = \sqrt{hPkA_c}\theta_b$$