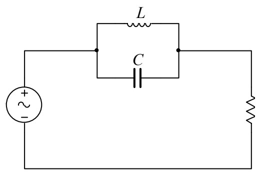
5^a Lista de Exercícios – Eletromagnetismo I – 2016/2

Entrega: 1 de Novembro

5.1 — Um filtro digital é construído da seguinte maneira: uma resistência (R) é ligada em série com um subcircuito que possui um indutor (L) e um capacitor (C) ligados em paralelo (veja figura abaixo). Quando esse circuito é ligado a uma fonte de corrente alternada, certas frequências têm uma resposta muito baixa. Encontre a impedância complexa, Z, desse sistema, e encontre a faixa de frequências que são filtradas.



5.2 — Um campo eletromagnético é descrito pelos potenciais:

$$\varphi = \frac{2B_0}{\mu_0 \epsilon_0} t \quad , \quad \vec{A} = B_0 \left[\vec{x} + (y \operatorname{sen} \omega t - 3z) \hat{z} \right] \ ,$$

onde B_0 e ω são constantes.

a. Encontre os campos elétrico e magnético

b. Mostre que as equações de Maxwell estão satisfeitas

c. Encontre a corrente de deslocamento de Maxwell dessa configuração, $\vec{J}_D$.

d. Encontre a densidade de corrente $\vec{J}$.

5.3 — Suponha que uma certa densidade de carga depende do tempo, $\rho = \rho(t, \vec{r})$, mas que a densidade de corrente correspondente seja constante, $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r})$. Essa situação é encontrada em situações tais como capacitores que estão sendo carregados.

a. Mostre que a densidade de carga em qualquer ponto é dada por $\rho(t, \vec{r}) = \rho(t = 0, \vec{r}) + \dot{\rho}(t = 0, \vec{r}) t$

b. Nessa configuração, estritamente falando, não podemos aplicar as leis da eletrostática ou da magnetostática, mas mesmo assim as Leis de Coulomb e de Biot-Savart continuam valendo. Em particular, mostre que o campo:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

obedece a Lei de Ampère com a corrente de deslocamento de Maxwell.

5.4 — Vamos imaginar que existem cargas magnéticas ("monopolos" magnéticos), de forma que duas das equações de Maxwell teriam que ser alteradas:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \to \qquad \nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m ,$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \to \qquad \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \vec{J}_m - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

onde ρ_m é a densidade de cargas magnéticas, e $\vec{J}_m$ é a densidade de corrente magnética, que são relacionadas por uma equação de continuidade tal como aquela que vale para cargas elétricas, $\nabla \cdot \vec{J}_m + \frac{\partial \rho_m}{\partial t} = 0$

a. Ainda seria possível expressar os campos elétrico e magnético por meio de potenciais? Se você acha que sim, então quantos potenciais seriam necessários, e como eles se relacionam com os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$? Como ficaria a invariância por transformações de calibre nesse caso? [Dica: atenção às dimensões dos campos e dos potenciais!]

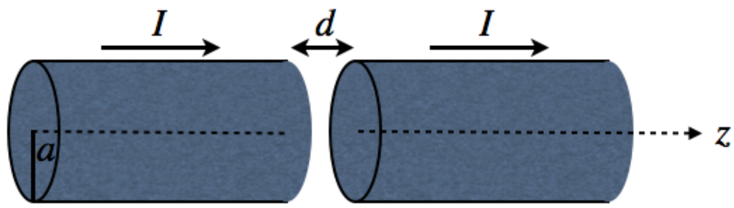
b. Mostre que as equações de Maxwell na presença de cargas magnéticas são invariantes sob as transformações:

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \vec{E}\cos\alpha + c\vec{B}\sin\alpha \\ c\vec{B}' &= c\vec{B}\cos\alpha - \vec{E}\sin\alpha \\ q_e' &= cq_e\cos\alpha + q_m\sin\alpha \\ q_m' &= q_m\cos\alpha - cq_e\sin\alpha\end{aligned}$$

5.5 — Partindo do Calibre de Coulomb, $\nabla\cdot\vec{A} = 0$, determine a transformação de calibre apropriada[$\lambda(\vec{r},t)$] que permite passar para o Calibre de Lorentz,

$$\nabla\cdot\vec{A} + \mu\epsilon\phi t = 0.$$

5.6 — Considere um fio grosso, de raio a, que leva uma corrente I, homogeneamente distribuída pelo volume do fio. O fio é reto e muito longo, mas em um certo ponto ele tem um pedaço que foi cortado, de forma que está faltando um pequeno trecho, de comprimento $d \ll a$ — veja a figura abaixo:



Esse pedacinho que falta no fio (o "intervalo" de largura d) não altera a corrente, de forma que você pode pensar nas faces opostas do fio, em cada lado do intervalo, como um capacitor de placas paralelas. Considere que a corrente é nula inicialmente, e começa a fluir na direção z no instante $t = 0$.

a. Encontre os campos elétrico e magnético no intervalo de largura d, em função do tempo t e da distância (r) ao eixo que passa pelo centro do fio. Indique a direção e o sentido dos campos.

b. Encontre a densidade de energia do campo eletromagnético no intervalo.

c. Calcule o vetor de Poynting no intervalo, indicando a sua direção.

d. Determine a energia total no intervalo como uma função do tempo. Calcule a potência que é transmitida para dentro do intervalo, integrando o vetor de Poynting numa superfície apropriada, e verifique que essa potência corresponde à taxa de variação da energia total no intervalo. [Dica: despreze os efeitos de borda do capacitor.]

5.7 — Suponha que exista, numa certa região do espaço, um campo eletrostático e um campo magnetostático. Demonstre que, mesmo que o vetor de Poynting seja não-nulo, a integral de superfície de $\vec{S}\cdot\hat{n}$ sobre uma superfície arbitrária fechada nessa região é sempre nula.