Física III para Engenharia Elétrica
IFUSP - 4320292
P2 – 14/05/2014

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva cada questão na folha corespondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, à lápis ou tinta.

Justifique suas respostas. Não basta copiar a fórmula do formulário. A prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

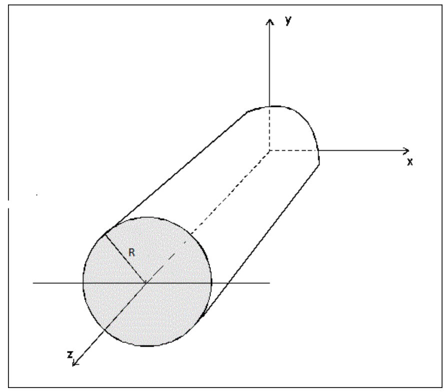
Nome	Assinatura	No. USP	Turma

Q1. Um condutor cilíndrico de comprimento l e raio R, com $l >> R$, carrega uma densidade de corrente $\vec{j}$ que varia com o raio de acordo com $\vec{j} = br\,\hat{k}$, onde b é uma constante.

a) (0,5) Determine o valor de b sabendo que a corrente total que flui no condutor é I_0.

b) (1,0) Determine a expressão para o campo magnético B em um raio $r_1 < R$.

c) (1,0) Determine a expressão para o campo magnético B em um raio $r_2 > R$.



Solução:

a) $I_0 = \iint \vec{j}.d\vec{a} = \iint br.\hat{k}.da.\hat{k} = \int_0^R \int_0^{2\pi} brdr.rd\theta = 2\pi \dfrac{R^3}{3} b$, $\quad b = \dfrac{3I_0}{2\pi R^3}$

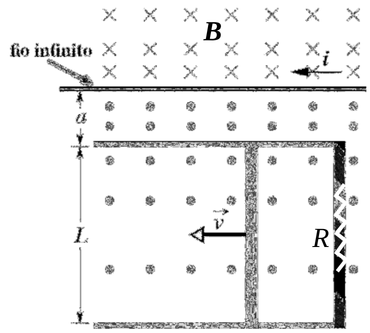
(a) As linhas de campo magnético são circunferências concêntricas com o cilindro em todo o espaço.

Usando a lei de Ampere $\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I$, temos: (b) Para $r_1 < R$, temos: B 2π r_1 = $\mu_0 \dfrac{2\pi b r_1^3}{3}$

$|B| = \mu_0 \dfrac{br_1^3}{3} = \mu_0 \dfrac{I_0 r_1^3}{2\pi R^3}$ para $r_1 < R$, dentro do cilindro.

(c) $r_2 > R$, B 2π r_2 = $\mu_0 \dfrac{2\pi b R^3}{3}$ sendo $|B| = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi r_2}$ para $r_2 > R$, fora do cilindro.

Q2. Uma barra condutora vertical de comprimento L, sob a ação de uma força horizontal externa $\vec{F}_{ext}$, se move na horizontal com velocidade constante $\vec{v}$, deslizando sem atrito sobre 2 condutores paralelos fixos, formando, com uma terceira barra fixa, um circuito fechado com resistência R.



Um fio horizontal *infinito* está paralelo aos dois condutores e a uma distância a do condutor mais próximo. Pelo fio passa uma corrente $i=i_0$ inicialmente constante, como indicado na figura.

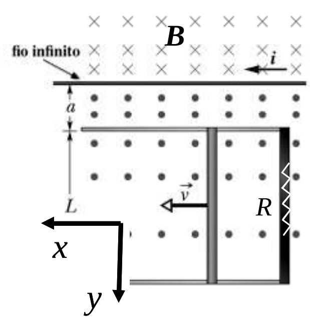
a) (1,0) Determine a voltagem induzida ε_{ind} no circuito e o *sentido* (horário ou anti-horário) da corrente induzida.

b) (0,5) Determine o *módulo* e *o sentido* da força externa $\vec{F}_{ext}$ que mantém constante a velocidade da barra

c) (1,0) Suponha agora uma situação em que a barra parta no tempo $t = 0$ exatamente da posição da resistência, tal que $x(0) = 0$, e que neste instante a corrente no fio comece a diminuir de acordo com a expressão $i = i_0(1 - t/\tau)$, onde τ é uma constante. Determine o tempo decorrido até que a voltagem induzida ε_{ind} no circuito da barra se anule.

Dados: $\oint_C B \cdot dl = \mu_0 i,\quad \oint_C E \cdot dl = -\frac{d\Phi_B}{dt},\quad d\vec{F} = dq(\vec{v}\times\vec{B}) = i d\vec{\ell}\times\vec{B}$

Solução:



a) Definindo o eixo de coordenadas ao lado, e escrevendo $x = x_0 + vt$ o comprimento horizontal do circuito, o fluxo magnético é dado por

$$\phi_B = \int_S B.ds = x\int_a^{a+L} \frac{\mu_0 i_0}{2\pi\, y}\,dy = \frac{\mu_0 i_0 x}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)$$

$$|\varepsilon_{ind}| = \frac{d\phi_B}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\mu_0 i_0 x}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right) = \left|\frac{\mu_0 i_0 v}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right|$$

Como o fluxo está aumentando, pela Lei de Lenz a corrente induzida deve produzir um campo na direção oposta ao campo original dentro do circuito. Portanto, a corrente induzida deve ser no **sentido horário**.

b) Supondo o eixo de coordenadas definido, a corrente induzida no fio móvel é

$i_{ind} = \dfrac{|\varepsilon_{ind}|}{R} = -\dfrac{\mu_0 i_0 v}{2\pi R}\ln\left(\dfrac{a+L}{a}\right)$ na direção - $\hat{k}$. A força magnética no fio é dada por

$$\vec{F}_m = \int d\vec{F}_m = \int i_{ind} d\vec{\ell} \times \vec{B} = \hat{x}\int_a^{a+L}\left[-\frac{\mu_0 i_0 v}{2\pi R}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right]\frac{\mu_0 i_0}{2\pi\, y}dy$$

$$\vec{F}_m = -\left[\frac{\mu_0 i_0}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right]^2\frac{v}{R}\hat{x}$$

A força magnética aponta para a direita. Para que se tenha velocidade constante, é preciso aplicar uma força externa $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_m$, **para a esquerda**.

c) No caso de $i = i_0(1 - t/\tau)$

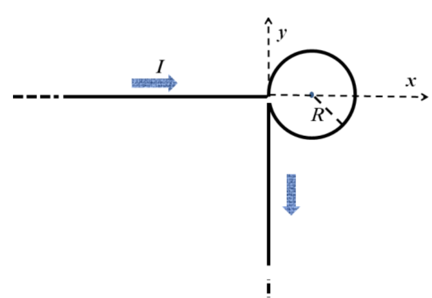
$$\phi_B = \int_S B.ds = x\int_a^{a+L}\frac{\mu_0 i_0 (1-t/\tau)}{2\pi\, y}dy = \frac{\mu_0 i_0 x}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\left(1-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\phi_B = -\frac{d}{dt}\left[\frac{\mu_0 i_0 x}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\left(1-\frac{t}{\tau}\right)\right] = -\frac{\mu_0 i_0}{2\pi}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\left[v\left(1-\frac{t}{\tau}\right)-\frac{x}{\tau}\right]$$

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0 i_0}{2\pi\tau}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right)(v\tau - vt - x)$$

$$\varepsilon(t) = 0 \qquad v\tau - vt - x = 0 \qquad t = \frac{v\tau - x}{v} = \tau - t \qquad t = \frac{\tau}{2}$$

Q3. Em um montagem elétrica plana, na extremidade de um fio retilíneo muito longo é feito um enlace circular, de raio *R*, e depois o fio é conduzido perpendicularmente à direção de chegada, como mostra a figura (nos itens seguintes, o efeito da pequena fenda no canto do circuito pode ser desprezado).



a) (0.5) Determine o vetor campo magnético, $\vec{B}_1$ no ponto *O(R,0,0)*, devido ao segmento reto semi-infinito horizontal;

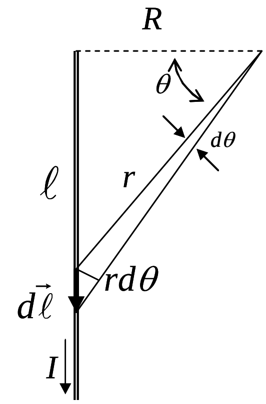
b) (1.0) Determine o vetor campo magnético, $\vec{B}_2$ no mesmo ponto, devido ao segmento reto semi-infinito vertical;

c) (1.0) Determine o vetor campo magnético, $\vec{B}_t$ no mesmo ponto devido ao fio todo.

dados: $\oint \vec{B}.d\vec{s} = \mu_0 I$ $\quad d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2}$

Solução: a) $\oint \vec{B}.d\vec{s} = \mu_0 I_c$ no caso, num ponto no eixo, $I_c = 0$,

$\rightarrow$ $B_1 = 0$



b) Seguindo o esquema ao lado:

$R = r\cos\theta$;

$\ell = R\tan\theta \qquad d\ell = R\sec^2\theta\, d\theta = \dfrac{R}{\cos^2\theta}d\theta$

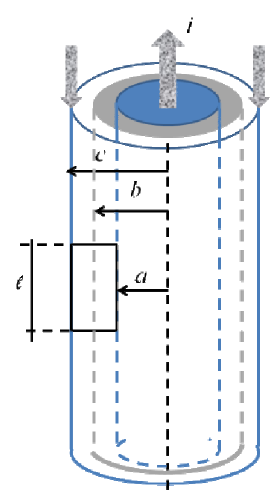
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{Rd\theta}{\cos^2\theta}\frac{\cos^2\theta}{R^2}\sin\theta$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\, d\theta = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = +\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\hat{k}$$

c) no centro do anel: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{\ell}\times\hat{r}}{r^2} \rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R^2}2\pi R \qquad \vec{B}_3 = -\dfrac{\mu_0 I}{2R}\hat{k}$

$$\vec{B}_t = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 \qquad \vec{B}_t = 0 + \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\hat{k} - \frac{\mu_0 I}{2R}\hat{k} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(\frac{1}{2\pi} - 1\right)\hat{k}$$

Q4. Um cabo coaxial, com comprimento d, é formado por um cilíndrico metálico interno, de raio a, coaxial com uma casca cilíndrica metálica externa, com raio c, sendo $d >> c$. O cilindro interno é revestido de um material magnético, de permeabilidade magnética relativa $\mu_r = \mu/\mu_0$ até o raio $r = b$. A corrente flui no cabo coaxial como indicado na figura.



a) (1,0) Calcule o campo $\vec{H}$, na região $a < r < c$.

b) (0,5) Calcule o campo $\vec{B}$, nas regiões $a < r < b$ e $b < r < c$.

c) (1,5) Considere o circuito retangular, de comprimento ℓ e lado (c - a), contido no plano axial, como indicado na figura. Seja a corrente no cabo coaxial dada por $i(t) = i_0 \sin\omega t$, determine a expressão da voltagem ε_{ind} induzida no circuito em malha aberta.

Solução:

a) $\oint \vec{H} d\vec{s} = \sum I_c \qquad a < r < c \qquad H = \dfrac{I}{2\pi r}$

b) Para $a < r < b \qquad \vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \dfrac{I}{2\pi r}$

Para $b < r < c \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi r}$

c) $\varepsilon = -\dfrac{d}{dt}\phi = -\dfrac{d}{dt}\left(\phi_{ab} + \phi_{bc}\right)$

$$\phi_{ab} = \mu_r \mu_0 \frac{I}{2\pi} \ell \int_a^b \frac{1}{r} dr = \mu_r \mu_0 \frac{I}{2\pi} \ell \ln \frac{b}{a}$$

$$\phi_{bc} = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \ell \int_b^c \frac{1}{r} dr = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \ell \ln \frac{c}{b}$$

$$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\left(\phi_{ab} + \phi_{bc}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\mu_r \mu_0 \frac{I}{2\pi} \ell \ln \frac{b}{a} + \mu_0 \frac{I}{2\pi} \ell \ln \frac{c}{b} \right) = -\frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\left(\mu_r \ln \frac{b}{a} + \ln \frac{c}{b} \right) \frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon == -\frac{\mu_0 \ell}{2\pi}\left(\mu_r \ln \frac{b}{a} + \ln \frac{c}{b} \right) i_0 \omega \cos \omega t$$

$B = \mu_0 H + \mu_0 M \qquad B = \mu H \qquad B_0 = \mu_0 H \qquad M = \chi H \qquad \mu_r = \mu / \mu_0$

$\oint \varepsilon \vec{E}.d\vec{s} = q \qquad \oint \vec{B}.d\vec{s} = 0 \qquad \oint \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} \qquad \phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{s}$

$\oint \frac{\vec{B}}{\mu}.d\vec{l} = I + \varepsilon \frac{\partial \phi_E}{\partial t} \qquad \varepsilon = \oint \vec{E} d\vec{\ell} \qquad \varepsilon = -\oint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} + \oint \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{\ell}$

$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \qquad \vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \chi_e = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1\right) = \kappa - 1$

ln(2)=0,7 $\qquad \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2} \qquad \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho_{\text{int}} dv$