



PEF2602
Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Estruturas Estaiadas

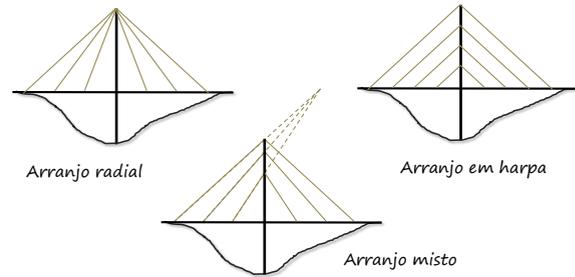
(Aula 8 - 17/10/2016)

Professores
Ruy Marcelo O. Pauletti & Leila Meneghetti Valverdes
2º Semestre 2016

ESTRUTURAS ESTAIADAS

Estruturas compostas de elementos rígidos, resistentes à flexo-compressão, como vigas, lajes e colunas, combinados com elementos flexíveis (cabos ou estais), solicitados axialmente.

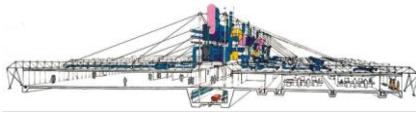
Uso clássico: pontes estaiadas



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Outros exemplos de uso: *sustentação de painéis de vidro, hangares, coberturas em balanço, grandes vãos, pontes.*



Inmos Factory, UK (Richard Rogers, 1980/1982)

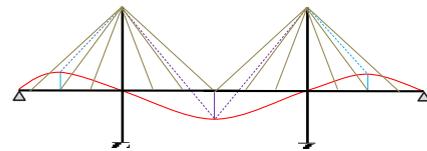
Os sistemas estaiados usualmente constituem **estruturas hiperestáticas**. Ou seja, exigem a consideração das deformações (*equações de compatibilidade*) para a determinação das reações e/ou esforços solicitantes.



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados

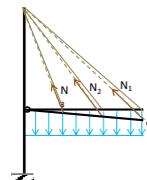


Em geral, as deformações do tabuleiro dependem da rigidez à flexão, o que *complica* a resolução do problema.



Simplificação: *tabuleiro rígido*.

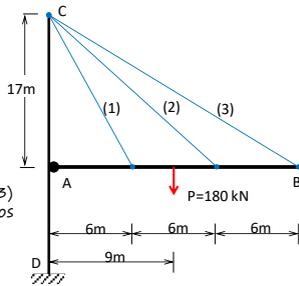
Nota: resulta um problema de aplicação prática restrita, mas que permite a introdução de estruturas hiperestáticas, de forma simples!



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura I I - Sistemas Reticulados



Exemplo: Estação de Saint Denis, França



Dimensionar os cabos (1), (2) e (3) e determinar os deslocamentos dos pontos de fixação dos cabos ao tabuleiro AB.

São dados:

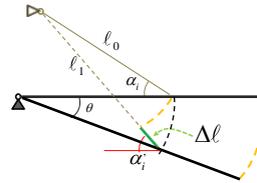
$P = 180\text{kN}$; $E = 210\text{GPa}$; $s = 2$; $\sigma_r = 800\text{MPa}$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



Compatibilidade de deformações para um estai genérico
DIAGRAMA DE WILLIOT



A rotação θ do tabuleiro provoca mudança nos ângulos α_i e no comprimento l dos cabos

Hipótese: $\theta \ll 1$

$\sin \theta \approx \theta$ $\cos \theta \approx 1$

❖ As componentes horizontais dos deslocamentos do tabuleiro são desprezadas;

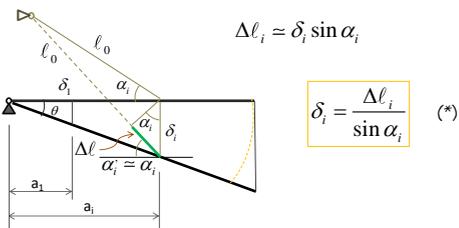
❖ A geometria do problema praticamente não muda. $\Rightarrow \alpha'_i = \alpha_i$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



Logo, para pequenas rotações do tabuleiro ($\theta \ll 1$):



$\Delta l_i \approx \delta_i \sin \alpha_i$

$\delta_i = \frac{\Delta l_i}{\sin \alpha_i}$ (*)

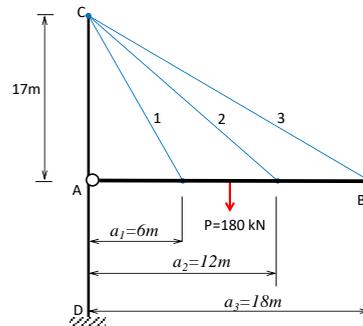
Hipótese: Tabuleiro rígido $\text{tg } \theta \approx \frac{\delta_i}{a_i} = \text{cte}$ (**)



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



Para a geometria em questão:



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



Lei de Hooke: $\Delta \ell_i \approx \frac{N_i \ell_i}{E_i A_i}$ (***)

(***) \rightarrow (*) $\delta_i = \frac{N_i \ell_i}{E_i A_i \sin \alpha_i}$ (****)

(****) \rightarrow (**):

$\tan \theta = \frac{N_i \ell_i}{E_i A_i a_i \sin \alpha_i} = cte$ Para n estais tem-se (n-1) equações de compatibilidade!

Para 3 estais, resultam duas equações de compatibilidade:

$$\begin{cases} \frac{N_1 \ell_1}{E_1 A_1 a_1 \sin \alpha_1} = \frac{N_2 \ell_2}{E_2 A_2 a_2 \sin \alpha_2} \\ \frac{N_1 \ell_1}{E_1 A_1 a_1 \sin \alpha_1} = \frac{N_3 \ell_3}{E_3 A_3 a_3 \sin \alpha_3} \end{cases}$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



Para EA constante:
$$\begin{cases} N_2 = \frac{a_2 \sin \alpha_2 \ell_1}{a_1 \sin \alpha_1 \ell_2} N_1 \\ N_3 = \frac{a_3 \sin \alpha_3 \ell_1}{a_1 \sin \alpha_1 \ell_3} N_1 \end{cases}$$

Para a geometria em questão:

i	a _i	ℓ _i	sen α _i =h/ℓ _i
1	6,0	18,028	0,94298
2	12,0	20,809	0,81695
3	18,0	24,759	0,68662

Substituindo valores:
$$\begin{cases} N_2 = \frac{12 \times 0,8169 \times 18,03}{6 \times 0,9429 \times 20,81} N_1 = 1,5011 N_1 \\ N_3 = \frac{18 \times 0,6866 \times 18,03}{6 \times 0,9429 \times 24,76} N_1 = 1,5906 N_1 \end{cases}$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



Diagrama de corpo livre do tabuleiro AB

Equilíbrio de momentos:

$\sum M_{(A)} = 0$

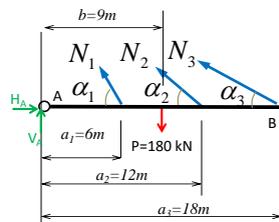
$\sum (N_i \sin \alpha_i) a_i - P b = 0$

$N_1 \sin \alpha_1 a_1 + N_2 \sin \alpha_2 a_2 + N_3 \sin \alpha_3 a_3 - P b = 0$

$N_1 \sin \alpha_1 a_1 + N_2 \sin \alpha_2 (2a_1) + N_3 \sin \alpha_3 (3a_1) - P \left(\frac{3}{2} a_1\right) = 0$

$N_1 \sin \alpha_1 + 2N_2 \sin \alpha_2 + 3N_3 \sin \alpha_3 = \frac{3P}{2}$

$N_1 \times 0,94298 + 2 \times 1,5011 N_1 \times 0,81695 + 3 \times 1,5906 N_1 \times 0,68662 = \frac{3}{2} \times 180$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



Resultam as forças normais nos estais:
$$\begin{cases} N_1 = 40,457 \text{ kN} \\ N_2 = 60,745 \text{ kN} \\ N_3 = 64,365 \text{ kN} \end{cases}$$

As reações VA e HA saem das demais equações de equilíbrio da barra AB:

$\sum F_x = 0 \therefore H_A = N_1 \cos \alpha_1 + N_2 \cos \alpha_2 + N_3 \cos \alpha_3$
 $H_A = 95,3 \text{ kN}$

$\sum F_y = 0 \therefore V_A = P - N_1 \sin \alpha_1 - N_2 \sin \alpha_2 - N_3 \sin \alpha_3$
 $V_A = 48,0 \text{ kN}$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



Dimensionamento dos cabos

Adotamos $EA=cte$ (mesmo tipo de cabo para os três estais).

Critério de dimensionamento: $\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} = \frac{N_{max}}{\frac{\pi \phi^2}{4}} \leq \frac{\sigma_r}{s}$

$$\phi \geq \sqrt{\frac{4sN_{max}}{\pi\sigma_r}} = \sqrt{\frac{4 \times 2 \times 64,365 \times 10^3}{\pi \times 800 \times 10^6}} = 1,4314 \times 10^{-2} m = 1,43 cm$$

$$A = \frac{\pi \phi^2}{4} = \frac{\pi}{4} (1,43 \times 10^{-2})^2 = 1,6092 cm^2$$

$$\delta_1 = \frac{N_1 \ell_1}{EA \sin \alpha_1} = \frac{40,457 \times 10^3 \times 18,028}{210 \times 10^9 \times 1,6092 \times 10^{-4} \times 0,94298} = 2,29 \times 10^{-2} m = 2,29 cm$$

$$\delta_2 = 2\delta_1 = 4,58 cm$$

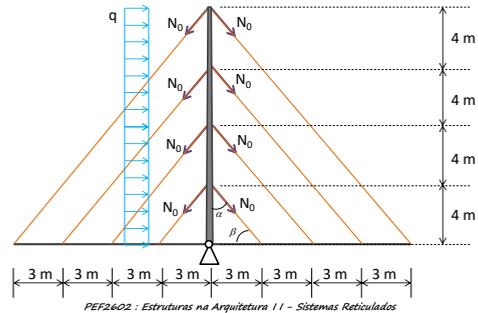
$$\delta_3 = 3\delta_1 = 6,87 cm$$

Nota: se no dimensionamento fossem adotados diâmetros diferentes para os cabos, mudaria a distribuição de forças, e o cálculo deveria ser feito desde o início, considerando as novas relações!

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados

Exercício: torre estaiada em harpa

Encontrar o menor valor de N_0 para o qual os cabos não afrouxem, sendo $q=3,75$ kN/m. Assumir $E, A_i = cte$

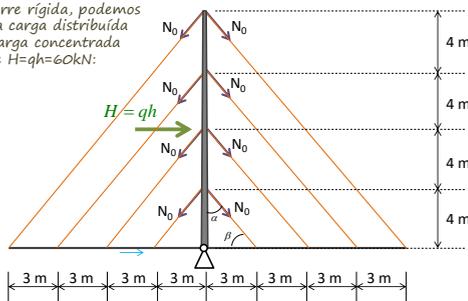


PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados

Exercício: torre estaiada em harpa

Encontrar o menor valor de N_0 para o qual os cabos não afrouxem, sendo $q=3,75$ kN/m. Assumir $E, A_i = cte$

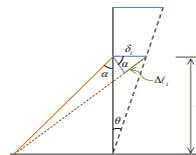
Sendo a torre rígida, podemos substituir a carga distribuída por uma carga concentrada equivalente $H=qh=60kN$:



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados

Compatibilidade das deformações

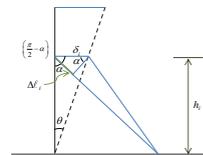
Estais à esquerda do mastro



$$\Delta l_i = \delta_i \sin \alpha_i$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\delta_i}{h_i}$$

Estais à direita do mastro



$$\Delta l_i = -\delta_i \sin \alpha_i$$

$$\text{tg } \theta = \frac{\Delta l_i}{\sin \alpha_i h_i}$$

PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados

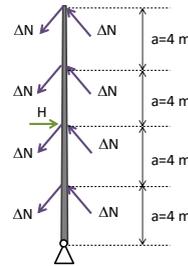
Lei de Hooke $\Delta \ell_i \approx \frac{\Delta N_i \ell_i}{E_i A_i}$ $E_i A_i = EA = cte$

Para todos os estais, desconsiderando o sinal negativo das forças nos estais à direita, temos:

$tg \theta = \frac{\Delta N_i}{EA \sin \alpha_i} \frac{\ell_i}{h_i}$ Sendo que $\frac{\ell_i}{h_i} = cte$; $\sin \alpha_i = cte$

$tg \theta = \frac{\Delta N_i}{EA \sin \alpha_i} \frac{\ell_i}{h_i} = cte$

$\Delta N_i = \Delta N = cte$ $\left\{ \begin{array}{l} + \text{ à esquerda} \\ - \text{ à direita} \end{array} \right.$



Equilíbrio

$\sum M_A = 0$

$2 \times \Delta N \times \sin \alpha \times a (1 + 2 + 3 + 4) - H \times 2a = 0$

$\Delta N \times \frac{3}{5} \times 10 = H$

$\Delta N = \frac{H}{6} = \frac{60}{6}$

$\Delta N = 10kN$

Logo, $N_0 > 10kN$ para que os cabos não afrouxem!



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



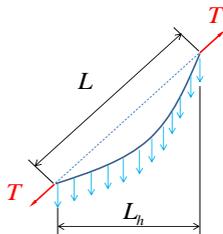
PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



Fórmula de Dishinger

(Leonhard, 1974) / (Livesley, 1975)

Fornece uma rigidez axial equivalente para os estais, compensando a perda de rigidez devido à forma catenária:



$(EA)_{eq} = \frac{EA}{1 + \left(\frac{\mu L_h}{T}\right)^2} L \frac{EA}{12T}$

μ peso por unidade de comprimento

$k_{eq} = \frac{(EA)_{eq}}{L}$

$\Delta L = k_{eq} T$



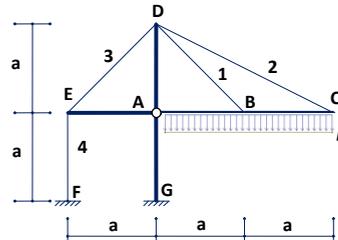
PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



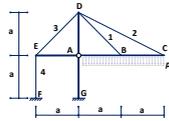
PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



P2-2012: As barras rígidas ABC, AG, AD e AE da cobertura estaiada mostrada na figura são todas articuladas no ponto A. Determine os esforços solicitantes nos cabos numerados de 1 a 4, sendo $a=3m$ e $p = (20 + \frac{n}{2})kN/m$, onde n é o último algarismo não-nulo do seu número USP. Considere que todos os cabos têm o mesmo diâmetro e são constituídos do mesmo material.



Resolução:



Como a articulação em A não transmite um eventual momento relativo em G, o equilíbrio de momentos em relação ao ponto A fornece:

$$N_4 a - 2pa^2 = 0 \quad \therefore \quad N_4 = 2pa$$

O equilíbrio de momentos da barra EA em relação ao ponto A fornece:

$$N_3 = \sqrt{2}N_4 = 2\sqrt{2}pa$$

O equilíbrio de momentos da barra ABC em relação ao ponto A fornece:

$$aN_1 \sin \alpha_1 + 2aN_2 \sin \alpha_2 - 2pa^2 = 0 \quad \therefore \quad N_1 \sin \alpha_1 + 2N_2 \sin \alpha_2 = 2pa \quad (*)$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



Sendo a barra ABC rígida, a compatibilidade de deformações exige que:

$$\frac{N_1 \ell_1}{a \sin \alpha_1} = \frac{N_2 \ell_2}{2a \sin \alpha_2}$$

Mas: $\ell_1 = \sqrt{2}a$; $\ell_2 = \sqrt{5}a$ e logo $\sin \alpha_1 = \frac{a}{\ell_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin \alpha_2 = \frac{a}{\ell_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Resulta: $N_1 = \frac{5}{4} N_2$ (2)

Substituindo (2) em (*):

$$\frac{5N_2}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} + 2N_2 \frac{1}{\sqrt{5}} = 2pa$$

$$N_2 = 1,1247pa$$

$$N_1 = 1,4059pa$$

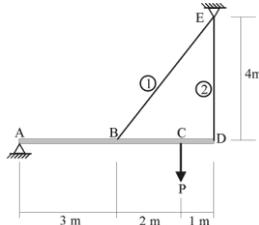


PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



P2 - 2013 - Questão 1 (5,0): A estrutura estaiada da figura abaixo encontra-se sujeita à ação da carga $P=100kN$ aplicada no ponto C. Os cabos 1 e 2 são constituídos do mesmo material e possuem áreas de seção transversal $A_1 = 2A_2$. Admitindo que a viga ABCD seja infinitamente rígida, determine:

- a) as forças normais em cada cabo (N_1 e N_2);
- b) as reações de apoio no ponto A;
- c) os diâmetros mínimos dos cabos 1 e 2, considerando um coeficiente de segurança $s=2$ e $\sigma_{tm} = (500 + 20n)$, em MPa, sendo n o último algarismo de seu número USP.



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



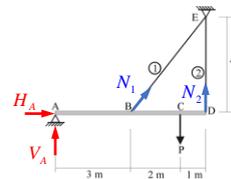
Resolução:

Do estudo da compatibilidade de deformações, resulta:

$$\frac{N_1 \ell_1}{E_1 A_1 \sin \alpha_1} = \frac{N_2 \ell_2}{E_2 A_2 \sin \alpha_2}$$

Para os dados do problema:

$$\frac{N_1 \ell_1}{2a \sin \alpha_1} = \frac{N_2 \ell_2}{a \sin \alpha_2}$$



$$\frac{N_1 \times 5}{2 \times 3 \times \left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{N_2 \times 4}{6}$$

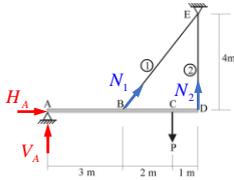
$$\Rightarrow N_1 = \frac{16}{25} N_2 = 0,64 N_2$$

Ou inversamente: $N_2 = \frac{25}{16} N_1 = 1,5625 N_1$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados





Equilíbrio de momentos em torno do ponto A:

$$\sum M_{(A)} = N_1 a_1 \sin \alpha_1 + N_2 a_2 \sin \alpha_2 - P a_3 = 0$$

$$\sum M_{(A)} = N_1 \times 3 \times \frac{4}{5} + \frac{25}{16} N_1 \times 6 \times 1 - 100 \times 5 = 0$$

$$N_1 = 42,463 \text{ kN} \quad N_2 = 66,348 \text{ kN}$$

Equilíbrio da barra ABCD:

$$\sum F_x = H_A + N_1 \cos \alpha_1 = 0 \quad H_A = -N_1 \cos \alpha_1 = -42,463 \times \frac{3}{5} = -25,478 \text{ kN} = H_A$$

$$\sum F_y = V_A + N_1 \sin \alpha_1 + N_2 - P = V_A - 42,463 \times \frac{4}{5} + \frac{25}{16} 42,463 - 100 = 0$$

$$V_A = -0,318 \text{ kN}$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados



Dimensionamento:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{lim}}}{s} = \frac{500 + 20n}{s} \quad \text{Para } n=0 \quad \bar{\sigma} = 250 \text{ MPa}$$

$$\sigma_i = \frac{N_i}{\left(\frac{\pi d_i^2}{4}\right)} \leq \bar{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} d_1 \geq \sqrt{\frac{4N_1}{\pi \bar{\sigma}}} = \sqrt{\frac{4 \times 42,463 \times 10^3}{\pi \times 250 \times 10^6}} = 0,0147 \text{ m} = 1,47 \text{ cm} \\ d_2 \geq \sqrt{\frac{4N_2}{\pi \bar{\sigma}}} = \sqrt{\frac{4 \times 66,348 \times 10^3}{\pi \times 250 \times 10^6}} = 0,0184 \text{ m} = 1,84 \text{ cm} \end{cases}$$

Porém, para respeitar os dados do problema:

$$A_1 = 2A_2 \Rightarrow \frac{\pi d_1^2}{4} = 2 \frac{\pi d_2^2}{4} \Rightarrow d_1 = \sqrt{2} d_2$$

$$\text{Logo: } d_2 = 1,84 \text{ cm} ; d_1 = \sqrt{2} \times 1,84 = 2,60 \text{ cm}$$



PEF2602 : Estruturas na Arquitetura 11 - Sistemas Reticulados

