Sinais aleatórios: aplicações em sinais biomédicos

Sérgio S Furuie

Ref. específicas: Cap. 2-Semmlow

Plano de aula

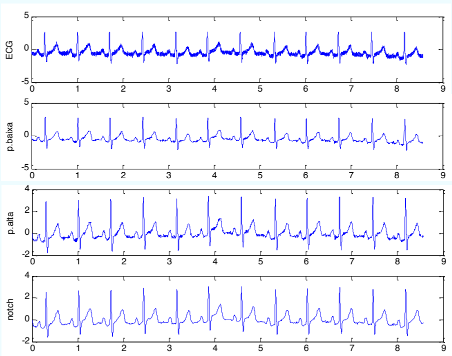
- Motivação: o que é e para que serve?
- Tipos de sinais e representação de sinais
- Ruídos
- Processos estocásticos e ergódicos
  - pdf
  - Operador E( )
  - independentes
- Correlação/correlação cruzada
  - Relação entre espectro e correlação

ECG com ruído: o que fazer?

< 70 Hz

> 0.05 Hz

exclusão
60, 180,



Motivação / Importância

- Muitos fenômenos físicos de interesse da engenharia são representados por sinais temporais
  - determinísticos: velocidade, aceleração (em condições ideais), ...
  - E aqueles que não podem ser preditos com precisão=> dados e fenômenos randômicos
    - Ex.: intervalo RR do ritmo cardíaco

Importância

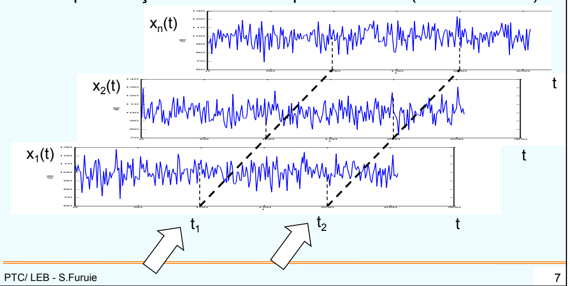
- Lidar com a indeterminação na medição
  - valor esperado
  - variabilidade
  - intervalo de confiança
  - Ex.: T=37 ± 0,5
- Caracterização do ruído
  - otimização da estimativa das variáveis
  - otimização de processos estocásticos
  - Ex.: filtro de Wiener, Maximum likelihood

Aplicações

- Filtragem de eventos de interesse
- Atenuação do ruído
- Análise de componentes
- Deteção de eventos
- Determinação de causa e efeito
- Modelagem
- Relação e correlação com outros eventos
- ...

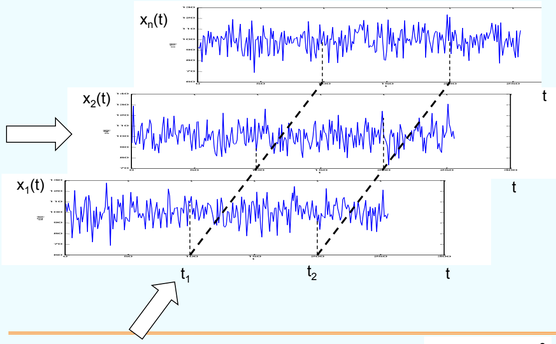
Sinais

- Sinais determinísticos: conteúdo no tempo e freq.
- Sinais aleatórios: valores “ao acaso”. São caracterizados:
  - pela probabilidade (caso discreto)
  - pela função densidade de probabilidade (caso contínuo)



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Temos vários sinais temporais de um fenômeno Ruidoso com SNR baixo: o que fazer?



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Processos estocásticos

- Manifestação de fenômenos aleatórios
- Caracterizado pela distribuição de probabilidade
- Variável aleatória com dependência temporal ou espacial (contínua ou discreta)
  - X(t)
  - Ex.: ruído em ECG

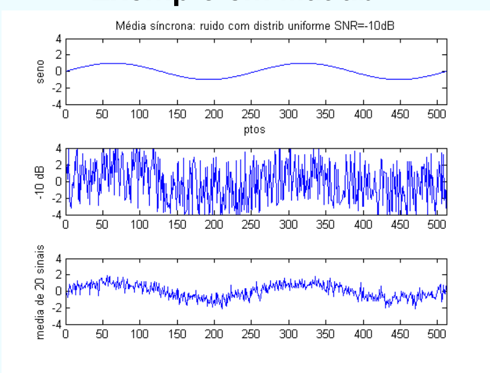
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Ruídos

- Ruídos inerentes ao fenômeno físico
  - efeito da respiração em ECG;
  - sinal da Mãe em ECG fetal
- Ruído ambiente, incluindo interferências
  - Acoplamento/indução de 60 Hz em sinais
- Ruído do transdutor
  - Detector de fótons (processo Poisson)
- Ruído eletrônico (DC a ~10^{12} Hz): branco
  - Ruído térmico (Johnson): fontes resistivas
  - Ruído de disparo (shot noise):semicondutores

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

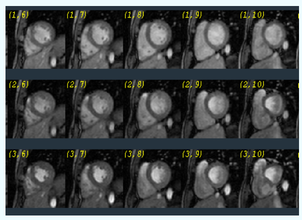
Exemplo em Matlab =>

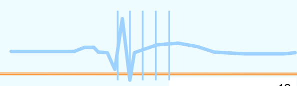


PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Exemplo

- Melhorar o estimador (variabilidade) com a raiz quadrada do número de amostras
  - potencial evocado
  - gated blood pool
  - gated SPECT
  - gated MRI





Sinais ruidosos. Como medir similaridade ou relação?

Correlação entre sinais amostrados

- Média,Variância, Desvio-padrão
- Coeficiente de correlação
  - Normalizado entre [0,1]
  - Extraídas as médias
  - Normalizado pelo d. Padrão
- Covariância
  - Variação sem considerar a média
  - (sem normalização por N-1)
  - Variância de x=cov(x,x)
  - Operador correlação

$$m_x = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1} x(n)$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_0^{N-1}(x(n)-m_x)^2$$

$$\rho_{xy} = \frac{\sum_0^{N-1}(x(n)-m_x).(y(n)-m_y)}{\sqrt{\sum_0^{N-1}(x(n)-m_x)^2}.\sqrt{\sum_0^{N-1}(x(n)-m_x)^2}}$$

$$\mathrm{cov}_{xy} = \sum_0^{N-1}(x(n)-m_x).(y(n)-m_y)$$

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}_{xy}}{\sigma_x.\sigma_y}$$

$$\mathrm{cov}_{xy} = \sum_0^{N-1}(x(n)-m_x).(y(n)-m_y)$$

$$corr_{xy} = \sum_0^{N-1} x(n).y(n)$$

Matlab: corrcoef()

Escalares.Generalização: matriz de covariancias

Como analisar mais de 2 sinais?

- Matriz de covariancias
- Sinais $x_1, x_2, \ldots x_N$

$$\mathrm{cov}_{x_1,x_2,\ldots,x_N} = \mathrm{cov}_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & & c_{2N} \\ & & & \\ c_{N1} & c_{N2} & & c_{NN} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \mathrm{cov}_{x_i,x_j} = \sum_{n=0}^{N-1}(x_i(n)-m_{x_i}).(x_j(n)-m_{x_j})$$

$$corr_{\vec{x}} = \begin{bmatrix} & & \\ & \rho_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\rho_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}.c_{jj}}}$$

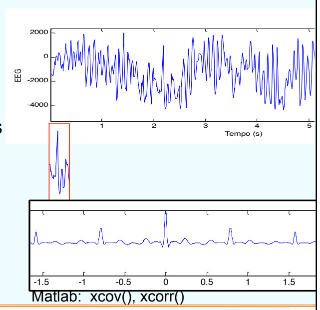
Matlab: cov(), corr()

E se quisermos verificar um sinal ao longo do outro?

Correlação cruzada ou função correlação

- Seja x(n), n=0,N-1
- y(n), n=0,M-1
- M<N
- Obs.:
  - atentar para os limites de k= [-(N-1),M-1]
  - Se necessário usar normalização pelo número de parcelas

$$corr_{xy}(k) = \sum_{n=0}^{M-1} x(n).y(n+k)$$



Matlab: xcov(), xcorr()

E se for entre o sinal e ele mesmo? Autocorrelação

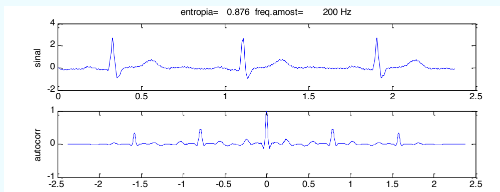
Função autocorrelação

- Seja x(n), n=0,N-1
- Obs.:
  - atentar para os limites de k= [-(N-1),N-1]
  - Número de parcelas não é constante!
  - Se necessário usar normalização pelo número de parcelas

$$corr_{xx}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n).x(n+k)$$
$$k = -(N-1),(N-1)$$

Matlab: xcorr()

Sinal ECG:quasi-periódico, quasi-estac.



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

observações

Definição mais geral (x(t), h(t): complexas, não-causais), porém não são médias (consistencia com convolução)*:

$$corr_{hx}(\tau) = h \circ x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h^*(t).x(t+\tau).dt$$

$$conv_{hx}(\tau) = h \otimes x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t).x(\tau - t).dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).h(\tau - t).dt$$

Se h(t) e x(t) forem **reais**:

$$corr_{hx}(\tau) = h \circ x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t).x(t+\tau).dt = corr_{xh}(-\tau)$$

$$h \circ x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).h(t-\tau).dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t).h[-(\tau - t)].dt$$
$$\therefore (h \circ x)(\tau) = [h(-t) \otimes x(t)](\tau)$$

Ou seja, a correlação entre um template h(t) e sinal x(t) em um ponto t_0:
a) Corresponde à ponderação de x(t) com h(t-t_0);
b) Corresponde também à convolução entre [x(t),h(-t)]
c) É a saída de um filtro com resposta impulsiva h(-t)

EPUSP

*Oppenheim (1989);Gonzalez(1993)

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

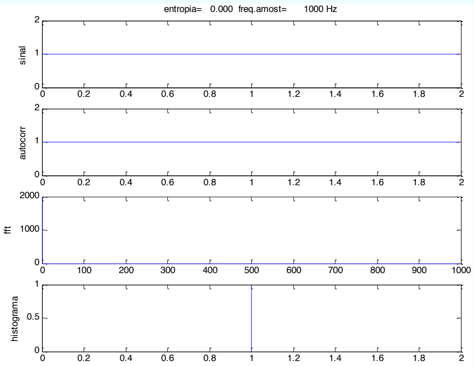
Representação de sinais

1. Sinal no tempo x(t)
   – Evolução temporal
   – Derivadas, duração, amplitudes, ...
2. Qual o conteúdo em frequência do sinal? Tipos de ruído? => Sinal no domínio da frequência [reversível]
3. Qual a distribuição das amplitudes do sinal x(t)? Variabilidade? Valores com maior ocorrência? => função densidade de probabilidade (pdf) [irreversível]
4. Como se relaciona com os pontos vizinhos? => Autocorrelação [irreversível] (obs.: relacionado com 2)
5. Qual o padrão (assinatura) do sinal? Representação multidimensional. Qual a correlação entre sinais?=> scatterplot [reversível]

EPUSP

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

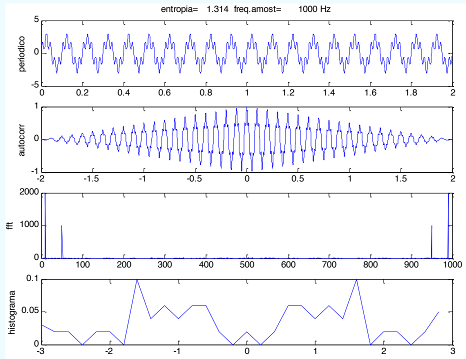
Sinal constante: determinístico



EPUSP

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

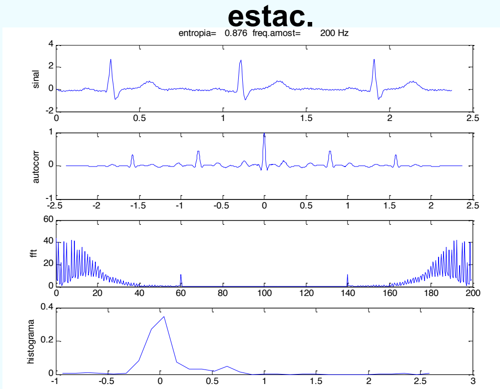
Sinal periódico: determinístico



EPUSP

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

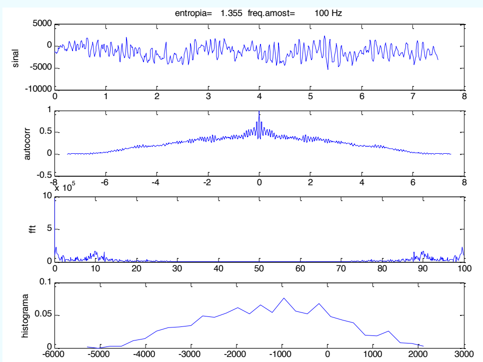
Sinal ECG:quasi-periódico, quasi-estac.



EPUSP

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

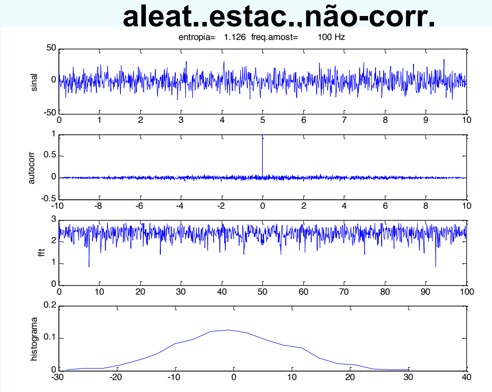
sinal estacionário



EPUSP

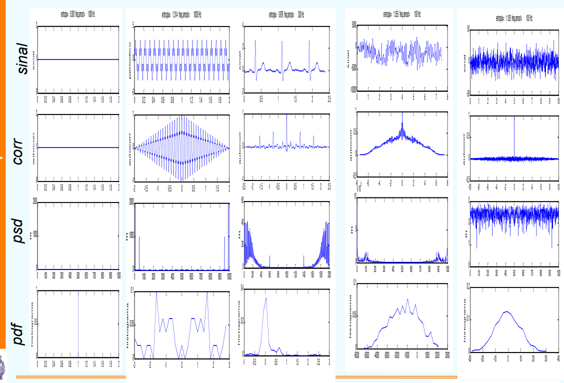
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Sinal branco gauss.: aleat..estac..não-corr.



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

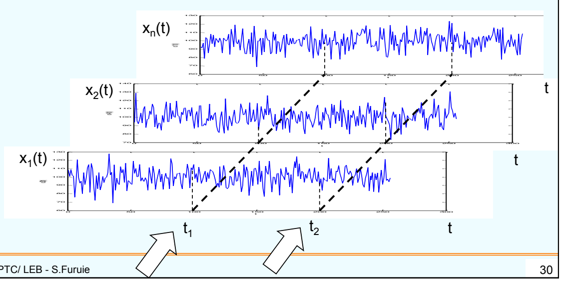
sinais



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Resumindo: Sinais

- Sinais determinísticos: conteúdo no tempo e freq.
- Sinais aleatórios: valores “ao acaso”. São caracterizados:
  - pela probabilidade (caso discreto)
  - pela função densidade de probabilidade (caso contínuo)



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

PROBABILIDADE

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

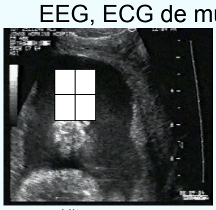
Teoria: definição de V.A

- Dado um fenômeno aleatório com observável X
- Probabilidade: função Prob: A -> [0,1]
  - A é subconjunto do espaço amostral Ω
  - Prob(Ω)=1
  - Prob(U {A_j})=Σ Prob(A_j), $A_j$disjuntos

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Campos aleatórios

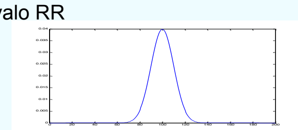
- Extensão multi-variada de v.a
- vetores de v.a
  - **X**=[X_1 X_2 ... X_n]’
  - Ex.: pixels vizinhos em imagens médicas, EEG, ECG de múltiplos canais, ...


Ultra-som

I	II	III	aVF	...

Variável aleatória

- Variável aleatória
  - v.a discreta: assume valores num conjunto enumerável com certa probabilidade [Prob (X=a)=p]
    - número de enfartes
  - v.a contínua: assume valores num intervalo de números reais [Prob(a≤X<b)=p]
    - temperatura, intervalo RR
- Função
- E(X)
- Momentos

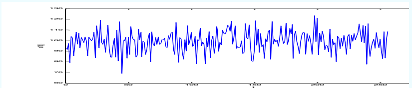


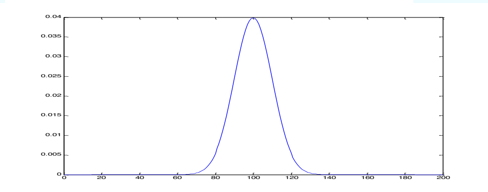
Teoria: função distr. Prob.

- Função discreta de probabilidade
  - X: v.a <u>discreta</u> com espaço amostral Ω
  - f(x)=Prob(X=x)
- Função densidade de probabilidade
  - X: v.a <u>contínua</u>
  - $\int_a^b$ f(x)dx=Prob(a ≤ X ≤ b)
  - f(x) >=0
- Função de distribuição de probabilidade
  - F(x)=Prob(X ≤ x)

Exemplos: distribuição normal

$$p(x) = N(\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

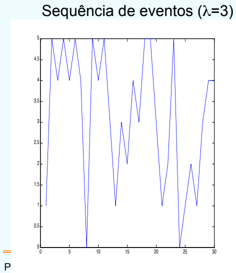




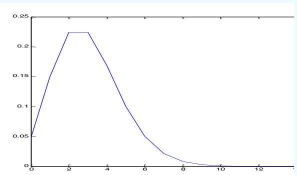
Distribuição Poisson

$$P_\lambda(X = n) = \frac{e^{-\lambda}.\lambda^n}{n!}$$

Sequência de eventos (λ=3)



Ex. de fdp com λ=3



Olhando o sinal de 2 formas distintas

x(n), n=1, N

n	x(n)
1	20
2	10
3	20
4	20
5	10
N=5	
m	

k	x(k)	Ocorrencias	P(x)
1	10	2	2/5
2	20	3	3/5
K=2	E(x)		

$$E(x) = \sum_{k=1}^{K} x_k.P(x_k)$$

$$m = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n)$$

Valor esperado: E( )

v.a discreta	v.a contínua
$E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_i.x_i$	$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.p(x).dx$
$E[g(X)] = \sum_{k=1}^{n} p_i.g(x_i)$	$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x).p(x).dx$

Momentos de VA

$$E(X^k) = \sum_{k=1}^{n} p_i . x_i^k \qquad E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k . p(x).dx$$

Valor médio (momento de ordem 1): $\mu = E(X\ )$

Momento de ordem 2: $\mu_2 = E(X^2)$

Momentos centrais de ordem k: $\sigma_k = E[(X - \mu)^k]$

Estimadores

Dada uma amostra da v.a X: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$\mu = E(X\ ) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_i$$

$$\sigma_2 = E[(X-\mu)^2] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

Êrro de tendência (bias) do estimador $= E(\hat{\phi}) - \phi = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \hat{\phi}_i - \phi$

Coef. Variação do estimador $= \varepsilon_r = \dfrac{\sqrt{E[(\hat{\phi} - E(\hat{\phi}))^2]}}{\phi}$

Por que 1/(N-1)?

$x_i : amostras - independentes - de - X$

$\mu = E(x)$

$\sigma^2 = E[(x-\mu)^2]$

$estimadores - de - \mathrm{var}iancias$

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2$

$\hat{s}^2 = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$

$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$

$E(\hat{s}^2) = \frac{N-1}{K} \sigma^2$

Deduzir!

Variabilidade na estimativa da média

	Estimador	variabilidade ε_r
Média em ensemble	$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} x_i$	$\frac{\sigma_x}{\mu_x \sqrt{n}}$
Média no tempo	$\hat{\mu} = \frac{1}{T} \int_0^T x\ (t).dt$	$\frac{\sigma_x}{\mu_x \sqrt{2BT}}$

Filtro de média síncrona

Tirando proveito da aleatoriedade do ruído

Ruído aditivo com média zero

Exemplo de redução da variância na média

- Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_N$: amostras independentes de uma variável aleatória X com média 0 e variância σ^2
- Y: a média de X
- Qual a média e variância de Y?

$$Y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$E(Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = 0$$

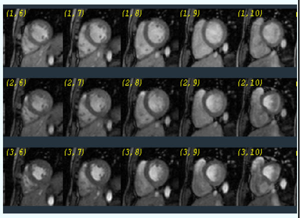
$$\mathrm{var}(Y) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{var}(X_i)$$

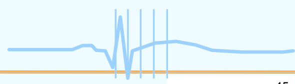
$$= \frac{N.\sigma_X{}^2}{N^2} = \frac{\sigma_X{}^2}{N}$$

$$\therefore \sigma_Y = \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}}$$

Exemplo

- Melhorar o estimador (variabilidade) com a raiz quadrada do número de amostras
  - potencial evocado
  - gated blood pool
  - gated SPECT
  - gated MRI





Vetor (campo) randômico

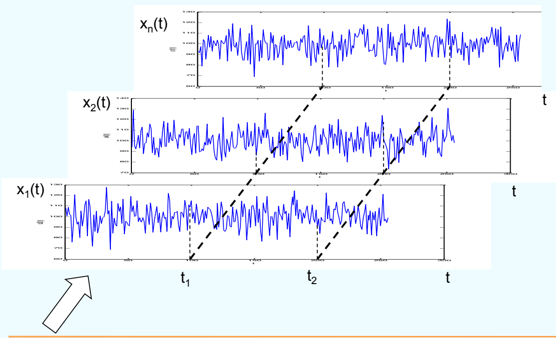
$$\vec{X} = [X_1, X_2, \ldots, X_n]'$$
$$P(X) = \text{Prob}\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots X_n \le x_n\}$$
$$p(x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{\partial^n P(X)}{\partial x_1 . \partial x_2 .. \partial x_n}$$

FORMALIZANDO OS CONCEITOS: PROC. ESTOC.

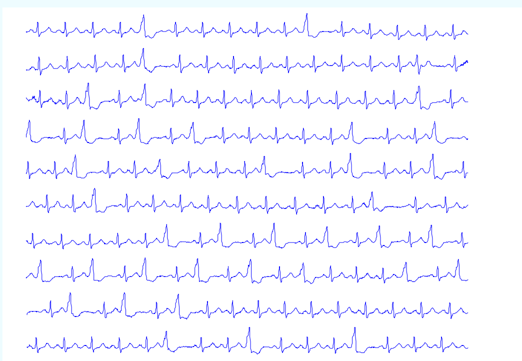
Processo estocástico

- Para um dado fenômeno aleatório, que produz o registro x(t):
  - *Ensemble*: conjunto de todos os registros que poderiam ter sido produzidos: $\{x_i(t)\}$
  - processo aleatório: descrição do fenômeno representado por $\{x_i(t)\}$ i=1,2,...

Ensemble de processos estocásticos



ECGs adquiridos em instantes de tempo diferentes:50000ptos



Processos estacionários

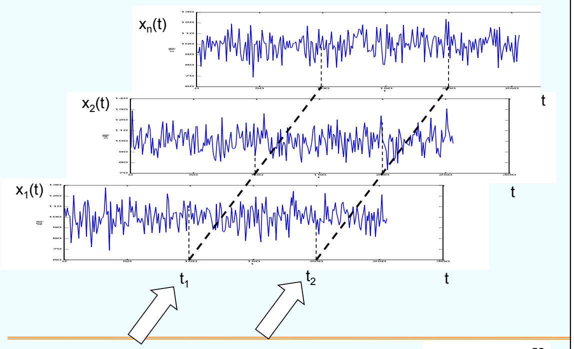
- Dado *ensemble* {x(t)}, X(t) é:
- fortemente estacionário se:
  - momentos de qq ordem independem de t (em geral 1 e 2)

$$\mu^k = E[X_t^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x_t^k . f(x_t).dx_t \qquad \forall t$$

- fracamente estacionário se:
  - média e autocorrelação independem do instante t $\quad \forall t$

$$\mu = E[X_t]$$
$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(t,\tau) = E[X_t . X_{t+\tau}]$$

processos estocásticos estacionários

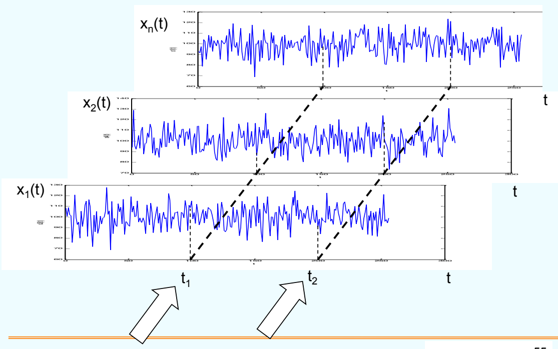


Processos estocásticos: exemplos

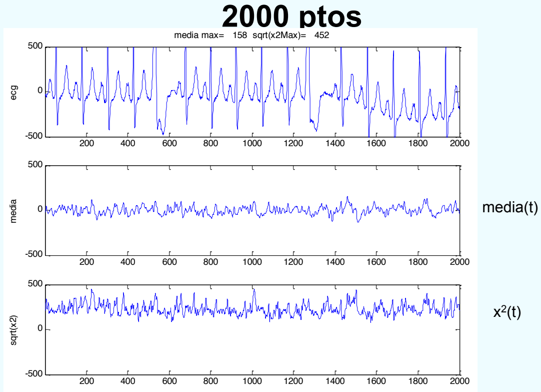
- v.a contínua com tempo contínuo
  - ECG
- v.a discreta com tempo contínuo
  - número de fótons em imagens de excreção renal em Medicina Nuclear
- v.a contínua com tempo discreto
  - série de pressão sistólica, intervalo RR
- v.a discreta com tempo discreto
  - número de nascimentos por região por dia

ECGs adquiridos em instantes de tempo diferentes:50000ptos

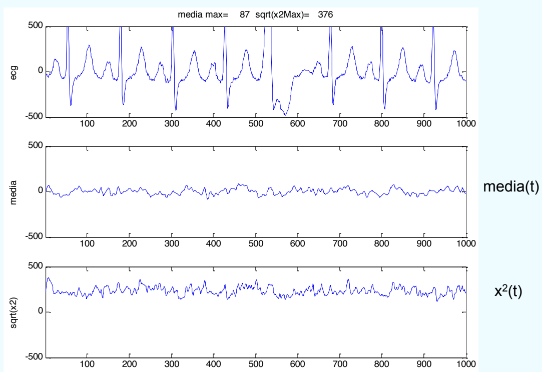
processos estocásticos estacionários



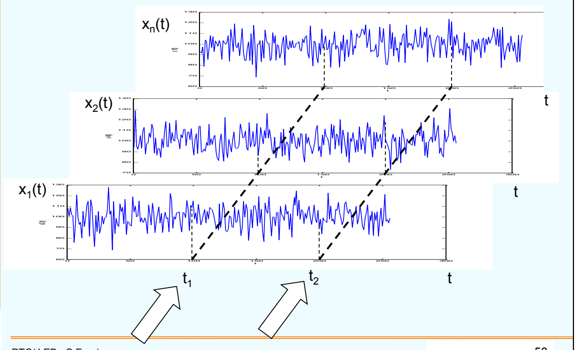
Estatística sobre 25 segmentos de 2000 ptos



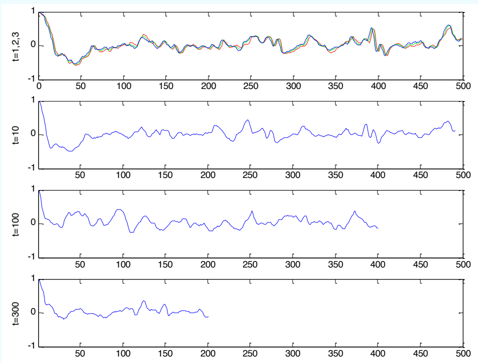
Estatística sobre 50 segmentos de 1000 ptos



Correlação em instantes de tempo



Correlação (normalizado) entre V.A



50 blocos de 500

xcorr(τ ;Δt) {entre x(t) e x(t+ Δt)}

 Note o efeito do do xcorr devido ao preenchimento por zeros

Processos ergódicos

- Processos estacionários com momentos e autocorrelações iguais aos obtidos nos sinais temporais

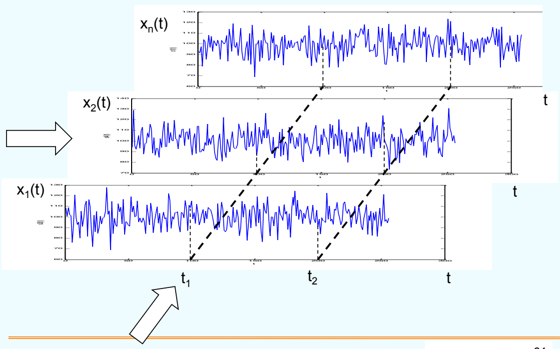
$$E[X_t^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x_t^k . f(x_t).dx_t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^k(t).dt$$

$$R_{XX}(\tau) = E[X_t . X_{t+\tau}]$$

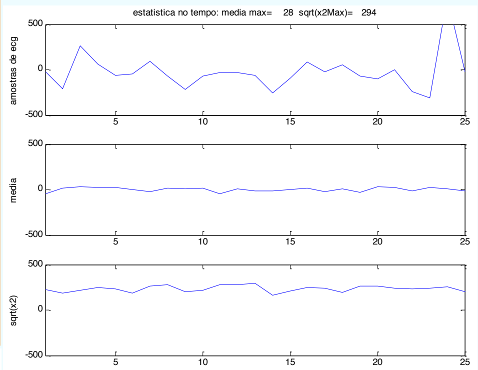
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t).x_i(t+\tau) \qquad \forall t$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x_i(t).x_i(t+\tau)dt \qquad \forall i$$

processos estocásticos ergódicos

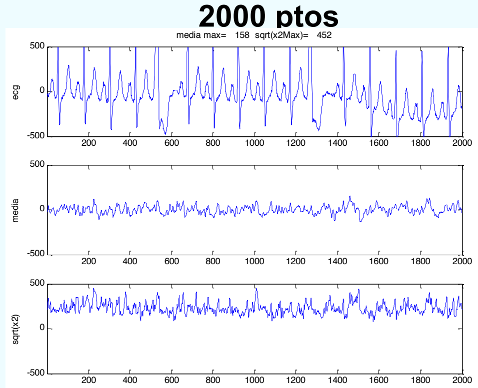


Ergodicidade: amostras no instante

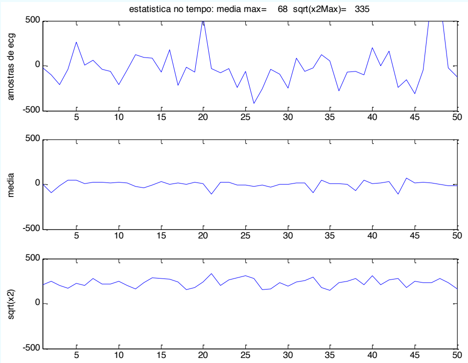


k=1
25 sinais

Estatística sobre 25 segmentos de 2000 ptos

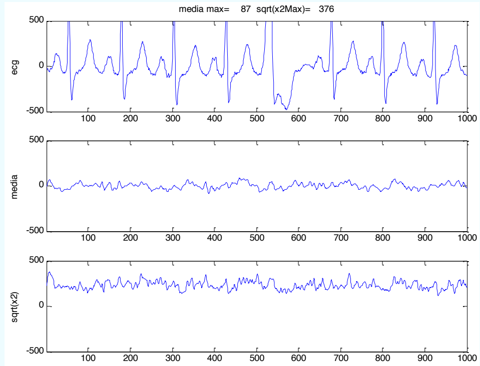


Ergodicidade: amostras no instante



k=1
50 sinais

Estatística sobre 50 segmentos de 1000 ptos



Estimadores

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t).x(t+\tau).dt$$

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} x(t).y(t+\tau).dt$$

Estimadores sem bias:

$$\lim_{T\to\infty} E(R_{xx} - \hat{R}_{xx}) \to 0$$
$$\lim_{T\to\infty} E(R_{xx} - \hat{R}_{xx})^2 \to 0$$

via dens. espectrais

Periodogramas de x(t)
Sinais estacionários

$$\hat{S}_{xx}(w) = \frac{1}{N}|X(w)|^2$$

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{T}{T-\tau} F^{-1}\{S_{xy}(f)\}$$

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{n.T}\sum_{k=1}^{n} | X_k(f,T) |^2$$

Bartlett: particionamento
R(τ) negligível p/ τ > T

$$\hat{S}_{xy}(f) = \frac{1}{n.T}\sum_{k=1}^{n} X_k^*(f,T).Y_k(f,T)$$

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(f) = \frac{|\hat{S}_{xy}(f)|^2}{\hat{S}_{xx}(f).\hat{S}_{yy}(f)}$$

Exemplo

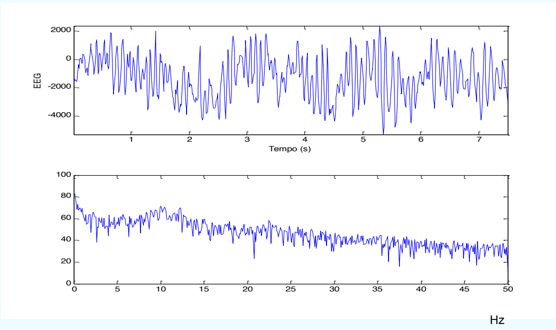
Welch: estimador de $S_{xx}(f)$
1) Janelamento c/ Hamming, Hanning... de x(n) p/ evitar descontinuidades
2) Periodogramas
3) Média

$$S_i(w) = \frac{1}{M.E_w} | \sum_{k=0}^{M-1} x_i(n).w(n).e^{-jwn} |^2$$

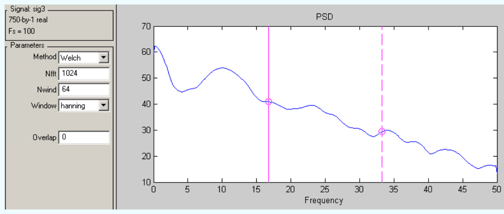
$$E_w = \frac{1}{M}\sum_{n=0}^{M-1} w^2(n)$$

$$\hat{S}_{xx}(w) = \frac{1}{K}\sum_{i=1,K} S_i(w)$$

Periodograma do sinal inteiro (sem partição)



Espectro estimado pelo método de Welch



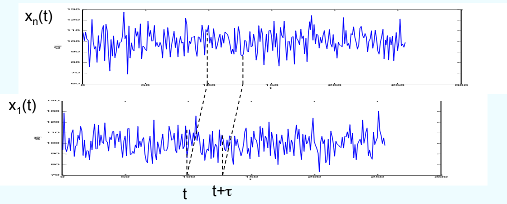
Window de Hanning
64 pontos
overlap de 0%

RESUMINDO: PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Correlação, covariância, dens. espect

- Análise facilitada se processo for ergódico
  - espaço amostral <=> sinal temporal
- Processo estocástico ergódico
  - {x(t)} e {y(t)}
  - representados pelas amostras x(t), y(t)

Correlação entre x(t) e x(t+τ)



$$R_{xx}(\tau) = E[x(t).x(t+\tau)]$$

Se ergódicos=> autocorrelação:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x\ (t).x\ (t+\tau)dt$$

Correlação: variáveis aleatórias

Correlação [X e Y]
- Correlação: corr(X,Y) $\boxed{corr(X,Y) = E[X.Y]}$
- Função correlação cruzada: X(t), Y(t)
- F. autocorrelação: X (t), X(t+ τ)

$$\boxed{\begin{aligned} corr_{xy}(\tau) &= E[X(t).Y(t+\tau)] \\ corr_{xx}(\tau) &= E[X(t).X(t+\tau)] \end{aligned}}$$

Coeficiente de correlação
- Normalizado entre [0,1]
- Extraídas as médias
- Normalizado pelo d. padrão

$$\boxed{\begin{aligned} \rho_{xy} &= \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_x.\sigma_y} \\ \sigma_x^{\ 2} &= E[(X-\mu_X)^2] \\ \sigma_y^{\ 2} &= E[(Y-\mu_Y)^2] \end{aligned}}$$

Matlab*: xcorr(x,y), corr(x,y), corrcoef(x,y)

*Cuidado com fatores de normalização

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Covariância: variáveis aleatórias

Covariância [X e Y]
- Covariância: cov(X,Y) $\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X-\mu_X).(Y-\mu_Y)]$
- Função Covariância cruzada: X(t), Y(t) $\mathrm{cov}_{XY}(\tau) = E[(X(t)-\mu_X).(Y(t+\tau)-\mu_Y)]$
- F. autocov: X(t), X(t+ τ) $\mathrm{cov}_{xx}(\tau) = E[(X(t)-\mu_X).(X(t+\tau)-\mu_X)]$

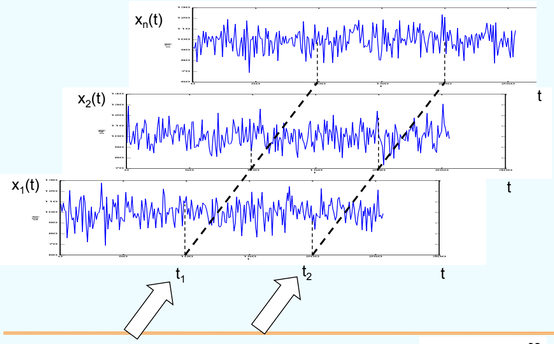
Coeficiente de correlação
- Normalizado entre [0,1]
- Extraídas as médias
- Normalizado pelo d. padrão

$$\rho_{xy} = \frac{E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]}{\sigma_x.\sigma_y}$$
$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}_{XY}(0)}{\sqrt{\mathrm{cov}_{XX}(0).\mathrm{cov}_{YY}(0)}}$$
$$\sigma_x^{\ 2} = E[(X-\mu_X)^2]$$
$$\sigma_y^{\ 2} = E[(Y-\mu_Y)^2]$$

Matlab: xcov(x,y), cov(x,y), corrcoef(x,y)

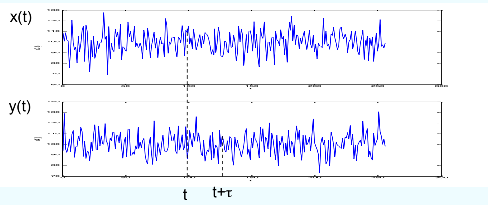
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Correlação em instantes de tempo



PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Correlação cruzada entre x(t) e y(t+τ)



Estacionários:

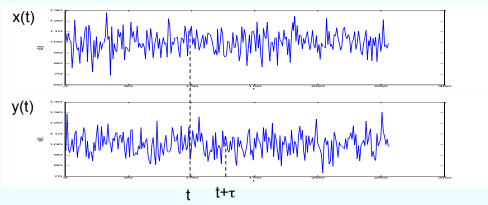
$$R_{xy}(\tau) = E[x(t).y(t+\tau)]$$

Se ergódicos:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x\ (t).y\ (t+\tau)dt$$

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Covariância entre x(t) e y(t+τ)



Estacionários:

$$\mathrm{cov}_{xy}(\tau) = E[(x(t)-\mu_x)(y(t+\tau)-\mu_y)]$$

Se ergódicos:

$$\mathrm{cov}_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (x(t)-\mu_x).(y(t+\tau)-\mu_y)dt$$

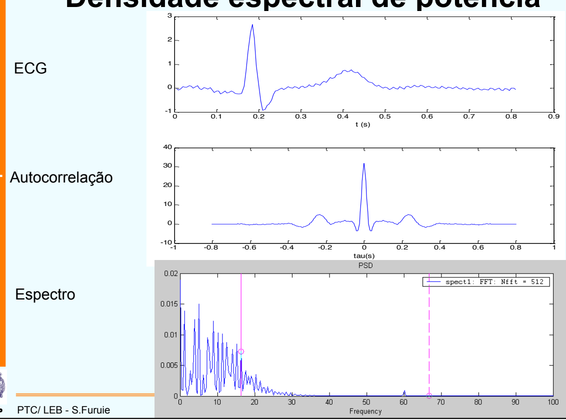
PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Densidade espectral de potência

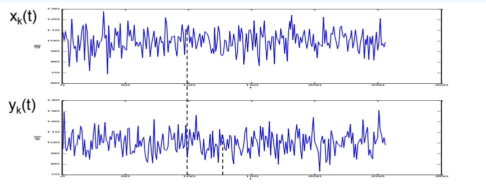
- Motivação
  - energia do sinal para cada banda de frequência
  - espectro cruzado entre sinais
  - relação entre SDF e correlação

PTC 2456 – Proc. Sinais Biomédicos
Sinais biomédicos: processos estocásticos

Densidade espectral de potência



Densidade espectral de potência: conceito



$$S_{xx}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E[|X_k(f,T)|^2]$$

$$S_{xy}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} E[X_k^*(f,T).Y_k(f,T)]$$

Correlação <=> espectro

$$F\{R_{xy}(\tau)\} = S_{xy}(f)$$

$$F\{R_{xx}(\tau)\} = S_{xx}(f)$$

Função coerência [0,1]:

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_{xx}(f).S_{yy}(f)}$$

Bibliografia

- Biomedical Signal Analysis. R.M. Rangayyan. Wiley Interscience, 2002
- Signals and Systems (2nd Edition) A.V. Oppenheim, A. S. Willsky, S. H. Nawab Hardcover: 957 pages. Publisher: Prentice Hall; 1996. ISBN-10: 0138147574.