Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica

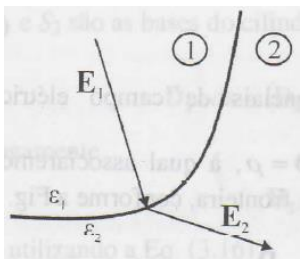
ELETROMAGNETISMO – SEL 0309

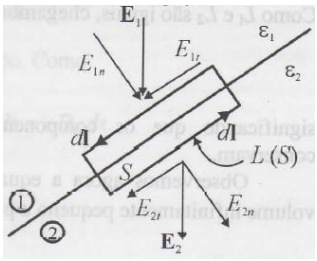
LISTA ADICIONAL DE EXERCÍCIOS SOBRE CAMPOS ELÉTRICOS E MAGNÉTICOS EM MATERIAIS

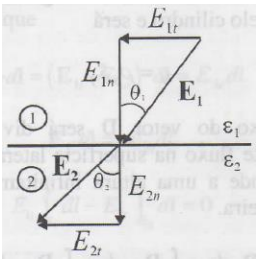
Professor: Luís Fernando Costa Alberto

Campo elétrico

1) O campo elétrico na passagem de um meio para outro pode sofrer uma variação de direção. Este efeito é chamado de refração. Suponha a existência de dois meios de permissividades elétricas diferentes: ε_1 no meio 1 e ε_2 no meio 2. Suponha também que exista na fronteira entre os dois meios uma carga estática uniformemente distribuída, e como ela está localizada na fronteira, a mesma é definida por sua densidade superficial de carga ρ_s. Não havendo variação temporal das grandezas: a) verifique que as componentes tangenciais de campo elétrico se conservam; b) verifique que a variação de densidade de fluxo elétrico na passagem de um meio para outro é igual à densidade superficial de cargas; c) examine o caso particular onde não há cargas estáticas acumuladas na fronteira entre os meios; obtenha a relação entre as permissividades e os ângulos para esta situação.







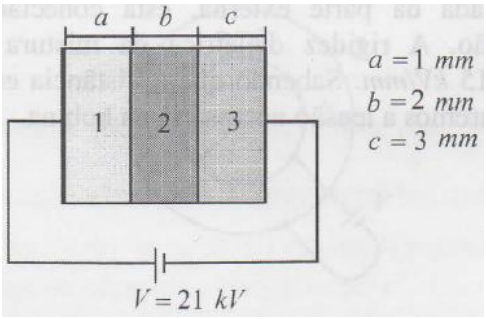
2) Defina materiais dielétricos e rigidez dielétrica.

3) Defina polarização em materiais dielétricos. Explique como se comportam as moléculas em materiais dielétricos e materiais condutores na presença de um campo elétrico.

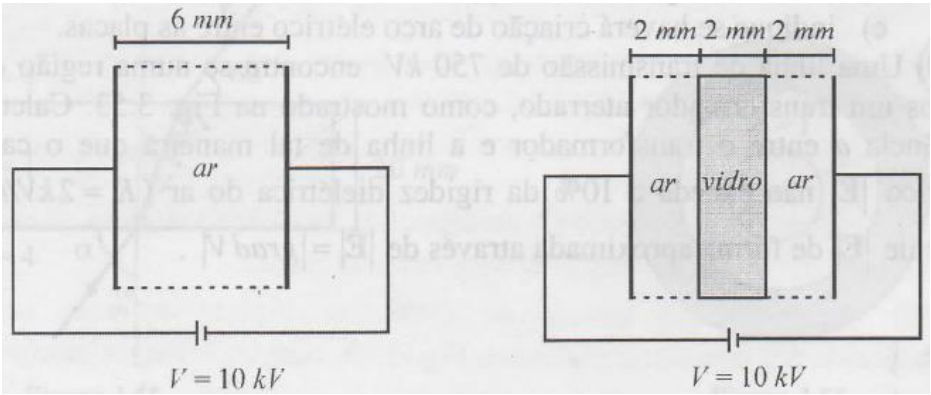
4) Defina susceptibilidade elétrica e permissividade elétrica relativa. Apresente as equações.

5) Suponha uma esfera condutora de raio **R = 40 mm** que esteja carregada com uma densidade superficial positiva de carga **+q_s**. O ar em sua volta possui uma rigidez dielétrica **K = 3 kV/mm**. Calcule: a) o valor máximo de **q_s** para que não haja ruptura de dielétrico no ar; b) o valor máximo de potencial na casca esférica para não haver ruptura do dielétrico (considere **V = 0** no infinito).

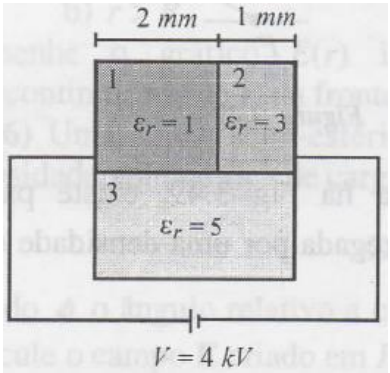
6) Entre as placas planas condutoras submetidas a uma diferença de potencial de **21 kV**, estão confinados três materiais dielétricos cujas características são: material 1 com ε_{r1} **= 2** e $\mathbf{K_1 = 4\ kV/mm}$, material 2 com ε_{r2} **= 3** e $\mathbf{K_2 = 4\ kV/mm}$ e material 3 com ε_{r3} **= 1** e $\mathbf{K_3 = 4\ kV/mm}$. Calcule os campos elétricos $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ e $\mathbf{E_3}$ e verifique se houve ruptura de algum material dielétrico.



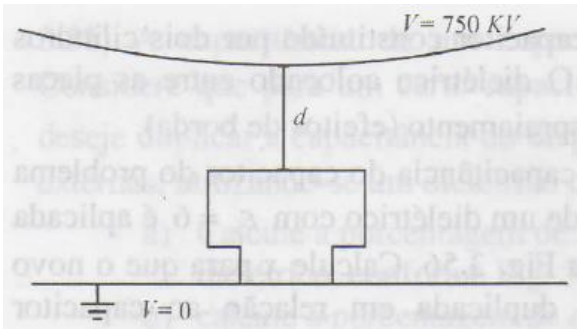
7) Nas situações das figuras abaixo, despreze o espraiamento de campo nas bordas das placas condutoras. Calcule: a) na situação da figura esquerda, o campo elétrico entre as placas e verifique se houve ruptura do dielétrico; b) na situação da figura direita, é introduzido um vidro isolante na região central entre as placas; calcule os campos elétricos no ar e no vidro e verifique se houve ruptura de algum dielétrico. Dados: $\mathbf{K_{ar} = 3\ kV/mm}$; $\mathbf{K_{vidro} = 4\ kV/mm}$; $\varepsilon_{ar} = \varepsilon_0$; $\varepsilon_{vidro} = 4\varepsilon_0$.



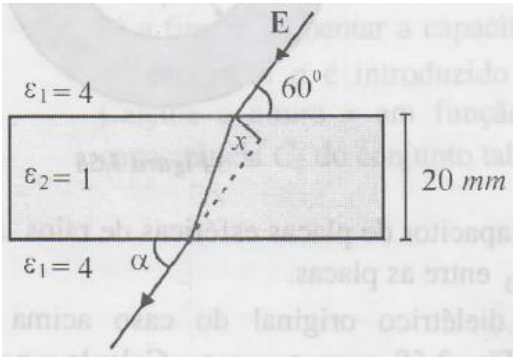
8) Na figura abaixo, as placas condutoras estão submetidas a uma diferença de potencial de **4 kV**. Entre elas temos uma combinação de dielétricos, cujos dados se encontram no desenho. Considere a aproximação segundo a qual o campo só possui componentes horizontais e não há espraiamento. Para todos os dielétricos temos **K = 1,5 kV/mm**. Calcule: a) o campo elétrico em cada material; b) verifique se houve ruptura de algum dielétrico.



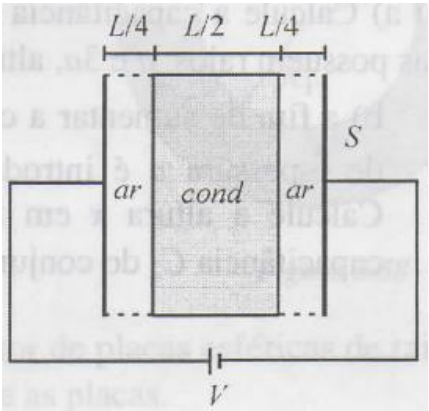
9) Uma linha de transmissão de **750 kV** encontra-se numa região onde temos um transformador aterrado, conforme figura abaixo. Calcule a distância **d** entre o transformador e a linha de tal maneira que o campo elétrico não exceda a **10 %** da rigidez dielétrica do ar (**K = 2 kV/mm**). Calcule o campo elétrico de forma aproximada por **E = |grad V|**.



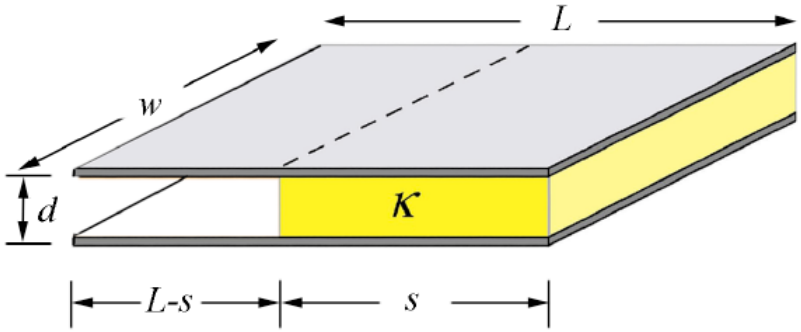
10) O campo elétrico atravessa a lâmina com ε_2 **= 1** como indicado na figura abaixo, onde os dados são fornecidos. Calcule: a) o ângulo α; b) o desvio linear **x** que o campo elétrico incidente sofre ao atravessar a lâmina.



11) Num capacitor de placas planas, tendo inicialmente ar entre as placas, é colocado um material condutor, ocupando a metade do volume conforme mostra a figura abaixo. Calcule: a) o campo elétrico em função do potencial elétrico entre as placas antes da inserção do condutor; b) os campos elétricos, no ar e no condutor. c) o valor da densidade superficial de cargas no condutor.

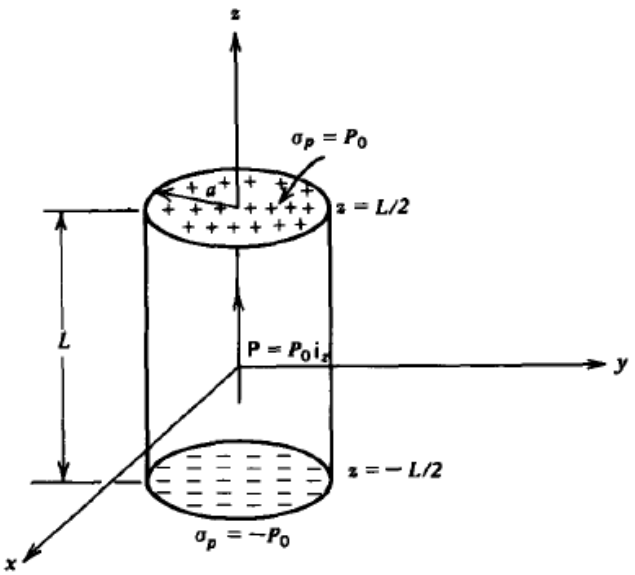


12) Uma placa retangular tem comprimento **w**, largura **s**, espessura **d** e uma constante dielétrica **K**. Esta placa é inserida no lado direito de um capacitor de placas planas condutoras de comprimento **w** e largura **L**. A distância de separação entre as placas condutoras é **d**. O lado esquerdo do capacitor de largura **L – s** está vazio. O capacitor é carregado de tal forma que o lado esquerdo apresente uma densidade superficial de carga $+\sigma_L$ na superfície superior e $-\sigma_L$ na superfície inferior. Já para o lado direito, a densidade superficial de carga é $+\sigma_R$ na superfície superior e $-\sigma_R$ na superfície inferior. A carga total na placa superior é **+Q** e na inferior **–Q**. A bateria é então removida do circuito. Despreze todos os efeitos de borda. a) encontre uma expressão para a magnitude do campo elétrico referente ao lado esquerdo em termos de σ_L, σ_R, **K**, **s**, **w**, **L**, **d** e ε_0. b) encontre uma expressão para a magnitude do campo elétrico referente ao lado direito em termos de σ_L, σ_R, **K**, **s**, **w**, **L**, **d** e ε_0. c) encontre uma expressão que relacione as densidades superficiais de cargas σ_L e σ_R em termos de **K**, **s**, **w**, **L**, **d** e ε_0. d) calcule a carga total **+Q** em toda a placa superior em termos de σ_L, σ_R, **K**, **s**, **w**, **L**, **d** e ε_0.



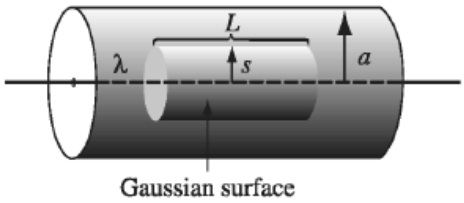
13) Encontre todos os campos elétricos e cargas devido a uma carga pontual positiva **+q** dentro de uma esfera de material dielétrico linear de raio **R** e permissividade elétrica ε. Considere a esfera imersa no espaço livre.

14) Um cilindro de raio **a** e altura **L** é centralizado sobre o eixo **z** e apresenta uma polarização uniforme ao longo deste eixo, $\mathbf{P} = P_0\mathbf{i}_z$, conforme mostra a figura abaixo. As densidades superficiais de cargas superior e inferior são $+\sigma_p$ e $-\sigma_p$, respectivamente. Encontre o campo elétrico e a densidade de fluxo elétrico sobre o eixo **z**. Apresente os gráficos do campo elétrico e da densidade de fluxo elétrico para variações sobre o eixo **z**.



15) Encontre o potencial elétrico interno e externo de uma esfera uniformemente polarizada de raio **R**. Encontre também o campo elétrico interior à esfera.

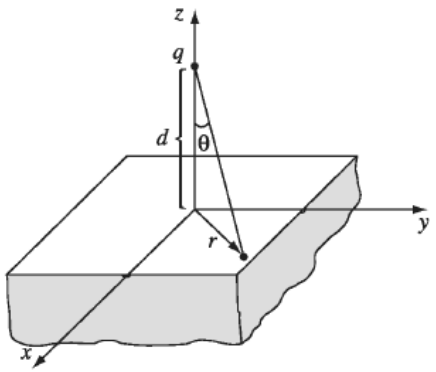
16) Um fio muito longo apresenta uma densidade linear de carga uniforme λ. Este fio é envolto por borracha, num espaço compreendido por um cilindro de raio **a**. Calcule o campo elétrico e a densidade de fluxo elétrico para **s > a**.



17) Uma esfera de metal de raio a possui uma carga positiva **+Q**. A mesma é envolta por uma esfera de raio **b** composta por um material dielétrico linear de permissividade elétrica ε. Calcule: a) o potencial elétrico no centro (relativo a **V = 0** no infinito); b) a polarização **P**; c) a carga nas superfícies de cada material.

18) Uma esfera composta de material dielétrico linear e homogêneo está imersa em um campo elétrico uniforme $\mathbf{E_0}$. Encontre o campo elétrico dentro da esfera.

19) Suponha um semi-espaço abaixo de um plano **z = 0**, composto por um material dielétrico linear uniforme de susceptibilidade elétrica χ_e. Calcule a força em uma carga pontual positiva **+q** situada a uma distância **d** acima da origem, conforme mostra a figura abaixo.

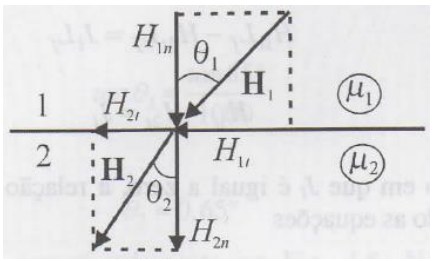


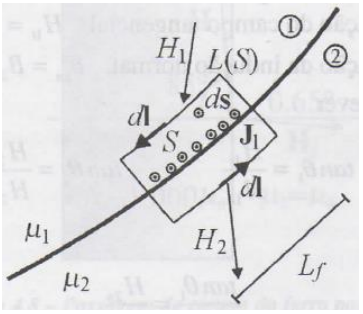
20) Um cilindro muito longo de material dielétrico linear está imerso em um campo elétrico uniforme $\mathbf{E_0}$. Calcule o campo elétrico resultante dentro do cilindro. O raio deste cilindro é **a**, a susceptibilidade elétrica é χ_e e o eixo longitudinal do cilindro é perpendicular a $\mathbf{E_0}$.

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Engenharia Elétrica

Campo magnético

21) Assim como para o campo elétrico, a intensidade de campo magnético também sofre uma variação angular na passagem de um meio 1 de permeabilidade magnética μ_1 para um meio 2 de permeabilidade magnética μ_2, conforme mostra a figura 21.1. Assumindo que existe uma corrente na interface entre os meios: a) verifique que a variação de intensidade de campo magnético na passagem de um meio para outro é igual à densidade linear de corrente; b) examine o caso particular onde não há correntes na fronteira entre os meios; verifique a conservação da intensidade de campo magnético tangencial e do campo magnético normal; obtenha a relação entre as permeabilidades e os ângulos para esta situação.





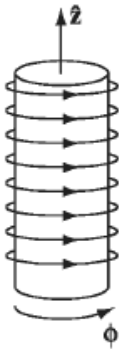
22) Defina permeabilidade magnética relativa e susceptibilidade magnética. Apresente as equações.

23) Defina saturação magnética.

24) Defina materiais diamagnéticos, paramagnéticos , ferromagnéticos e ímãs permanentes. Encontre exemplos destes materiais e aplicações dos mesmos.

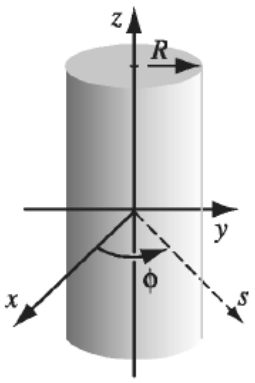
25) Verifique quais são os principais ímãs permanentes e as respectivas curvas **B x H**.

26) Um solenóide infinito (**N** espiras por unidade de comprimento e corrente **i**) é preenchido com material linear de susceptibilidade magnética χ_m. Encontre a intensidade de campo magnético e o campo magnético dentro do solenóide.



27) Um cilindro muito longo apresenta uma magnetização **M** paralela a seu eixo longitudinal. Encontre o campo magnético devido à **M** dentro e fora do cilindro.

28) Um cilindro muito longo de raio **R** apresenta uma magnetização $\mathbf{M} = \mathbf{ks}^2\,\hat{\phi}$, onde **k** é uma constante, **s** é a distância em relação ao eixo longitudinal e $\hat{\phi}$ é o vetor unitário azimutal. Encontre o campo magnético devido à **M**, para pontos dentro e fora do cilindro.



29) Um cabo coaxial consiste de dois tubos cilíndricos muito longos, separados por um material de susceptibilidade magnética χ_m. Uma corrente **i** flui pelo condutor interno e retorna pelo condutor externo. Em cada caso, a corrente se distribui uniformemente sobre a superfície. Encontre o campo magnético na região entre os tubos.

30) Uma esfera de material magnético linear esta imersa em um campo magnético uniforme $\mathbf{B_0}$. Encontre o novo campo magnético dentro da esfera.

Respostas

1) a) $E_{1t} = E_{2t}$ b) $D_{2n} - D_{1n} = \rho_s$ c) $\tan\Theta_1/\tan\Theta_2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2$
5) a) $q_s = 0{,}265\times10^{-4}$ C/m^2 b) V = 120 kV
6) $E_1 = 2{,}5$ kV/mm $E_2 = 1{,}68$ kV/mm $E_3 = 5{,}04$ kV/mm - $E_3 > K_3$
7) a) Não há ruptura. b) $E_{ar} = 2{,}22$ kV/mm $E_v = 0{,}55$ kV/mm - Não há ruptura
8) $E_1 = 1{,}71$ kV/mm $E_2 = 0{,}57$ kV/mm $E_3 = 1{,}33$ kV/mm - $E_1 > K_1$
9) d = 3,75 m E = 0,2 kV/mm
10) a) $\alpha = 60^o$ b) x = 7,5 mm
11) a) E = V/L b) E = 2V/L c) $\rho_s = 2\varepsilon_0 V/L$
12) a) $E_L = \sigma_L/\varepsilon_0$ b) $E_R = \sigma_R/k\varepsilon_0$ c) $\sigma_R/k = \sigma_L$ d) $Q = \sigma_L(L\text{-}s)w + \sigma_R sw$
13) $E = q/4\pi\varepsilon r^2$ para r < R $E = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ para r > R $D = q/4\pi r^2$ para todo r $q_T = q\varepsilon_0/\varepsilon$ para r < R $q_T = 0$ para r > R $\sigma_p = q(\varepsilon - \varepsilon_0)/4\pi\varepsilon R^2$ para r = R
14) $E_z = D_z/\varepsilon_0$ para $|z| > L/2$ $E_z = (D_z - P_o)/\varepsilon_0$ para $|z| < L/2$ $D_z = P_0/2\{(z+L/2)/[a^2+(z+L/2)^2]^{1/2} - (z-L/2)/[a^2+(z-L/2)^2]^{1/2}\}$
15) $V = Pr\cos\Theta/3\varepsilon_0$ para $r \leq R$ $V = PR^3\cos\Theta/3\varepsilon_0 r^2$ para $r \geq R$ $E = -P/3\varepsilon_0$ para r < R
16) $D = \lambda/2\pi s\,\hat{s}$ $E = \lambda/2\pi\varepsilon_0 s\,\hat{s}$
17) $V = Q/4\pi(1/\varepsilon_0 b + 1/\varepsilon a - 1/\varepsilon b)$ $P = \varepsilon_0\chi_e Q/4\pi\varepsilon r^2\,\hat{r}$ $\sigma_b = \varepsilon_0\chi_e Q/4\pi\varepsilon b^2$ (superfície externa) $\sigma_b = -\varepsilon_0\chi_e Q/4\pi\varepsilon a^2$ (superfície interna)
18) $E = E_0 3/(\varepsilon_r + 2)$
19) $F = -\chi_e q^2/(16\pi\varepsilon_0 d^2(\chi_e+2))\,\hat{z}$
20) $E = E_0/(1+\chi_e/2)$

21) a) $H_{1t} - H_{2t} = J_l$ b) $H_{1t} = H_{2t}$ $B_{1n} = B_{2n}$ $\tan\Theta_1 / \tan\Theta_2 = \mu_1/\mu_2$

26) $H = Ni\,\hat{z}$ $B = \mu_0(1+\chi_m)Ni\,\hat{z}$

27) B = 0 (fora) $B = \mu_0 M$ (dentro)

28) B = 0 (fora) $B = \mu_0 k s^2\,\hat{\emptyset} = \mu_0 M$ (dentro)

29) $B = \mu_0(1+\chi_m) i/2\pi s\,\hat{\emptyset}$

30) $B = B_0\,(1+\chi_m)/(1+\chi_m/3)$