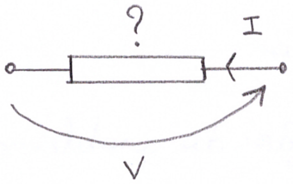
Resolução teste nº 7



$V \sim$ uniforme $(0, 10)$ (V)

I) Distribuição mais adequada para a corrente no bipolo é uma uniforme entre 0 e 20 A, pois:

- Não sabemos nada sobre esta corrente
- A potência máxima nos informa qual a corrente máxima, dada a tensão (200 W, 10 V)

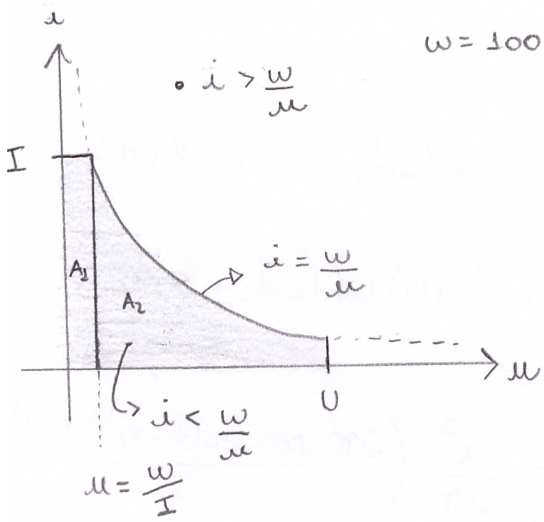
$$E[I] = \int_{-\infty}^{+\infty} i \cdot f_I(i)\,di = \frac{1}{20}\int_0^{20} i\,di = \frac{1}{20}\cdot\frac{400}{2} = 10 \text{ (A)}$$

$$Var[I] = E[I^2] - (E[I])^2 = \frac{1}{20}\int_0^{20} i^2\,di - 100 = \frac{1}{20}\cdot\frac{20^3}{3} - 100 = \frac{400-300}{3} =$$
$$= 33{,}3333 \text{ (A}^2\text{)}$$

II) $U \sim$ uniforme $(0, U)$; $Pot_{máx} = U \cdot I$ (W)

$I \sim$ uniforme $(0, I)$

$$P[U \cdot I > 100\,W] = ? = 1 - P[U \cdot I \leq 100\,W]$$



$w = 100$ (W)

$$P[U \cdot I \leq 100] = \iint_{A_1} f_{UI}(u,i)\,du\,di + \iint_{A_2} f_{UI}(u,i)\,du\,d$$

Assumindo independência:

$$P[UI \leq 100] = \int_0^I \int_0^{\frac{w}{I}} f_U(u) \cdot f_I(i)\,du\,di + \int_{\frac{w}{I}}^{U} \int_0^{\frac{w}{u}} f_U(u)\, f_I(i)\,di\,du =$$

$$= \int_0^I \frac{1}{I}\,di \cdot \int_0^{\frac{w}{I}} \frac{1}{U}\,du + \int_{\frac{w}{I}}^{U} \int_0^{\frac{w}{u}} \frac{1}{I}\cdot\frac{1}{U}\,di\,du = \frac{w}{IU} + \int_{\frac{w}{I}}^{U} \frac{1}{IU}\cdot\frac{w}{u}\,du =$$

$$= \frac{w}{UI} + \frac{w}{IU}\left[\ln(U) - \ln(w/I)\right] = \frac{w}{UI}\left[1 + \ln\left(\frac{UI}{w}\right)\right] = \frac{w}{UI}\left[1 - \ln\left(\frac{w}{UI}\right)\right]$$

$$\therefore P[UI > 100\,W] = 1 - \frac{100}{U \cdot I}\left[1 - \ln\left(\frac{100}{UI}\right)\right]$$

III) O bipolo é um resistor $\Rightarrow$ $U = r \cdot I$

$U \sim$ uniforme $(0, U)$; $pot_{máx} = 200\,W$

$P[U \cdot I > 100\,W] = 1 - P[U \cdot I \leq 100\,W]$

Temos que $U \cdot I = U \cdot \frac{U}{r} = \frac{U^2}{r}$ (perceba que U e I não são independentes)

Logo: $P[U \cdot I \leq 100\,W] = P\left[\frac{U^2}{r} \leq 100\,W\right] = P[U^2 \leq 100 r] =$

$= P[-10\sqrt{r} \leq U \leq 10\sqrt{r}] = F_U(10\sqrt{r}) - F_U(-10\sqrt{r})$

$$F_U(u) = \begin{cases} \frac{u}{U}, & 0 \leq u \leq U \\ 0, & u < 0 \\ 1, & u > U \end{cases}$$

Logo:

$F_U(10\sqrt{r}) - F_U(-10\sqrt{r}) = \frac{10\sqrt{r}}{U} - 0 = \frac{10\sqrt{r}}{U}$,

para $0 \leq 10\sqrt{r} \leq U$

Quanto vale r?

$Pot_{máx} = \frac{U_{máx}^2}{r} \Rightarrow 200\,W = \frac{U^2}{r} \Rightarrow r = \frac{U^2}{200}\ (\Omega)$

Logo, temos que:

$P[UI > 100\,W] = 1 - \frac{10}{U} \cdot \sqrt{\frac{U^2}{200}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}293$ //