

Controle de Manipuladores usando H_∞ Não Linear

Adriano Almeida Gonçalves Siqueira

Aula 5

Controle H_∞ não linear

- David Hilbert
(1862, Rússia-1943, Alemanha)
- Godfrey H. Hardy (1877-1947, Inglaterra)
- George Zames
(1934, Polônia-1997, Canadá)



Controle H_∞ para sistemas não lineares

- Considere um sistema não linear variante no tempo com entradas afins:

$$\dot{x} = f(x, t) + g(x, t)w$$

$$z = h(x, t) + k(x, t)w$$

sendo $f(0, t) = 0$ e $h(0, t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$.

Controle H_∞ para sistemas não lineares

- O sistema não linear possui ganho $L_2 \leq \gamma$ se:

$$\int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt$$

para todo $T \geq 0$ e todo $w \in L_2(0,T)$.

- Sistema linear invariante no tempo: $\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma$

Controle H_∞ para sistemas LPV

- Considere o sistema LPV na forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(t)) & B_1(\rho(t)) & B_2(\rho(t)) \\ C_1(\rho(t)) & 0 & 0 \\ C_2(\rho(t)) & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

assumindo que o parâmetro ρ varie no conjunto:

$$F_P^v := \{\rho \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m) : \rho(t) \in P, |\dot{\rho}_i| \leq v_i, i = 1, \dots, m\}$$

Controle H_∞ para sistemas LPV

- O sistema em malha fechada, com realimentação do estado, possui ganho $L_2 \leq \gamma$ se existir $X(\rho) > 0$, para todo $\rho \in P$, que satisfaz:

$$\begin{bmatrix} E(\rho) & X(\rho)C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ C_1(\rho)X(\rho) & -I & 0 \\ B_1^T(\rho) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0$$

$$E(\rho) = -\sum_{i=1}^m \pm \left(v_i(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho_i} \right) + \hat{A}(\rho)X(\rho) + X(\rho)\hat{A}(\rho) - B_2(\rho)B_2^T(\rho)$$

com

$$u(x) = -(B_2(\rho(x))X^{-1}(\rho(x)) + C_2(\rho(x)))x.$$

- A representação: $f(x) = A(x)x$ pode ser sempre encontrada.
- Considera-se: $A(x) = A(\rho(x))$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\rho(x)) & B_1(\rho(x)) & B_2(\rho(x)) \\ C_1(\rho(x)) & 0 & 0 \\ C_2(\rho(x)) & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

Considerações computacionais

- Escolher funções como base para a matriz $X(\rho)$:

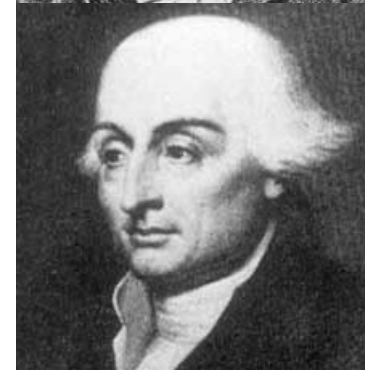
$$X(\rho) = \sum_{i=1}^M f_i(\rho) X_i$$

- Dividir o espaço dos parâmetros, P , em L pontos:

$$\{\rho_k\}_{k=1}^L$$

Robôs Manipuladores

- Sir Isaac Newton (1643-1727, Inglaterra)
- Leonhard Euler (1707,Suiça-1783, Rússia)
- Joseph-Louis Lagrange
(Giuseppe Lodovico Lagrangia)
(1736, Itália- 1813, França)



- Equação dinâmica do manipulador totalmente atuado:

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + F(\dot{q}) + G(q)$$

- $M(q) \Rightarrow$ matriz de inércia
- $C(q, \dot{q}) \Rightarrow$ matriz das forças de Coriolis e centrípetas
- $F(\dot{q}) \Rightarrow$ torques de fricção
- $G(q) \Rightarrow$ torques gravitacionais
- $\tau \Rightarrow$ torques aplicados
- $q, \dot{q}, \ddot{q} \Rightarrow$ posição, velocidade e aceleração angulares

- Com a introdução de incertezas paramétricas, ΔM , ΔC , ΔF e ΔG , e do distúrbio externo, τ_d , a equação do manipulador fica:

$$\tau + \delta = M_0 \ddot{q} + C_0 \dot{q} + F_0 + G_0$$

com $\delta = -(\Delta M \ddot{q} + \Delta C \dot{q} + \Delta F + \Delta G - \tau_d)$.

- Define-se o erro de acompanhamento:

$$\tilde{x} = \begin{bmatrix} \dot{q} - \dot{q}^d \\ q - q^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \end{bmatrix}$$

- A equação no espaço de estados fica:

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -M_0^{-1}(q)C_0(q, \dot{q}) & 0 \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} M_0^{-1}(q) \delta$$

$$\dot{\tilde{x}} = A(q, \dot{q}) \tilde{x} + B_2 u + B_1 w$$

- O torque aplicado é dado por

$$\tau = M_0(\ddot{q}^d + u) + C_0 \dot{q}^d + F_0 + G_0$$

Controle H_∞ via teoria dos jogos

- Considere a equação no espaço de estados do manipulador.
- Utiliza-se a transformação de estados

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix} = T_0 \tilde{x} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \end{bmatrix}$$

sendo $T_{11} = t_{11} I$.

Controle H_∞ via teoria dos jogos

- A equação no espaço de estados fica:

$$\dot{\tilde{x}} = A_T \tilde{x} + B_T T_{11}(-F(x_e) + \tau) + B_T T_{11} \delta$$

sendo

$$A_T(\tilde{x}, t) = T_0^{-1} \begin{bmatrix} -M_0^{-1} C_0 & 0 \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} T_0$$

$$B_T(\tilde{x}, t) = T_0^{-1} \begin{bmatrix} M_0^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Controle H_∞ via teoria dos jogos

- A equação no espaço de estados fica:

$$\dot{\tilde{x}} = A_T \tilde{x} + B_T T_{11}(-F(x_e) + \tau) + B_T T_{11} \delta$$

sendo
$$x_e = \begin{bmatrix} q^T & \dot{q}^T & (q^d)^T & (\dot{q}^d)^T & (\ddot{q}^d)^T \end{bmatrix}$$

$$F(x_e) = M_0 \left(\ddot{q}^d - T_{11}^{-1} T_{12} \ddot{\tilde{q}} \right) + C_0 \left(\dot{q}^d - T_{11}^{-1} T_{12} \dot{\tilde{q}} \right) + F_0 + G_0$$

$$\tau = F(x_e) + T_{11}^{-1} u$$

Controle H_∞ via teoria dos jogos

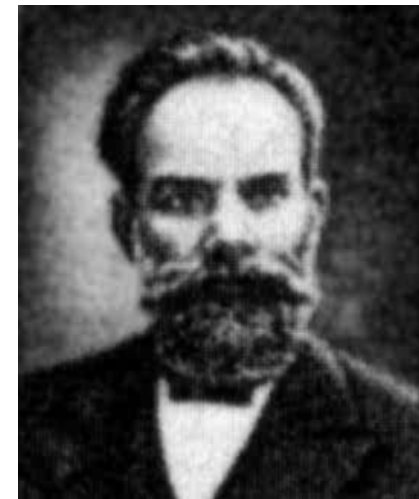
- Critério de desempenho:

$$\min_{u(\cdot) \in L_2} \max_{0 \neq w(\cdot) \in L_2} \frac{\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} \tilde{x}^T(t) Q \tilde{x}(t) + \frac{1}{2} u^T(t) R u(t) \right) dt}{\int_0^\infty \left(\frac{1}{2} w^T(t) w(t) \right) dt} \leq \gamma^2$$

- Escolhendo a função de Lyapunov na forma:

$$V(\tilde{x}, t) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T P(\tilde{x}, t) \tilde{x}$$

- Aleksandr Lyapunov (1857-1917, Rússia)



Controle H_∞ via teoria dos jogos

- A teoria dos jogos fornece a equação de Riccati:

$$\dot{P}(\tilde{x}, t) + P(\tilde{x}, t)A_T(\tilde{x}, t) + A_T^T(\tilde{x}, t)P(\tilde{x}, t) - \\ - P(\tilde{x}, t)B_T(\tilde{x}, t)\left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2}I\right)B_T^T(\tilde{x}, t)P(\tilde{x}, t) + Q = 0$$

- Jacopo Riccati (1676-1754, Itália)



Controle H_∞ via teoria dos jogos

- Escolhe-se:

$$P(\tilde{x}, t) = T_0^T \begin{bmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} T_0$$

sendo $K > 0$, uma variável a ser determinada.

- A equação de Riccati torna-se:

$$\begin{bmatrix} 0 & K \\ K & 0 \end{bmatrix} - T_0^T B \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right) B^T T_0 + Q = 0$$

sendo o controle ótimo: $u = -R^{-1} B^T T_0 \tilde{x}$.

Controle H_∞ via teoria dos jogos

- Realiza-se a fatoração de Cholesky ($\lambda(R) < \gamma^2$):

$$R_1^T R_1 = \left(R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I \right)^{-1}$$

e particiona-se Q na forma:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1^T Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2^T Q_2 \end{bmatrix}.$$

Controle H_∞ via teoria dos jogos

- Solução para a equação algébrica:

$$T_0 = \begin{bmatrix} R_1^T Q_1 & R_1^T Q_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

e

$$K = \frac{1}{2} \left(Q_1^T Q_2 - Q_2^T Q_1 \right) - \frac{1}{2} \left(Q_{12}^T + Q_{12} \right) > 0.$$

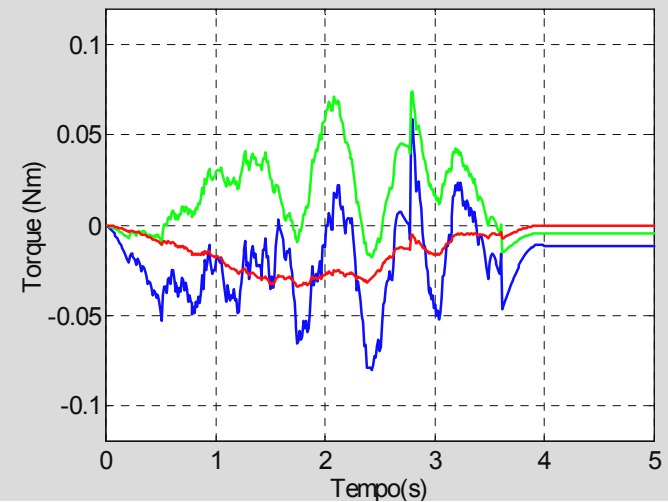
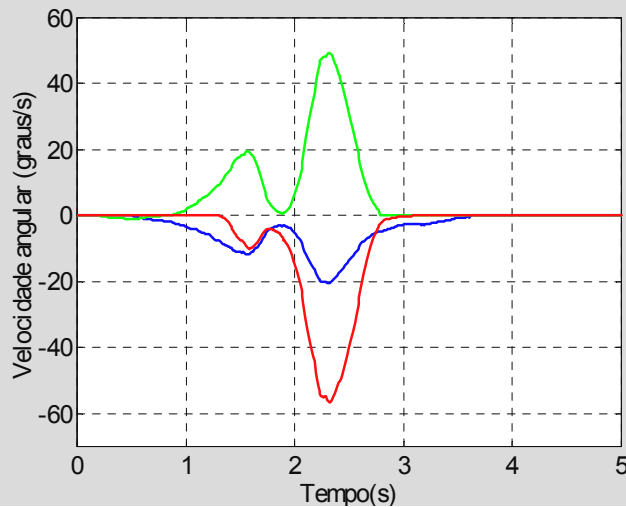
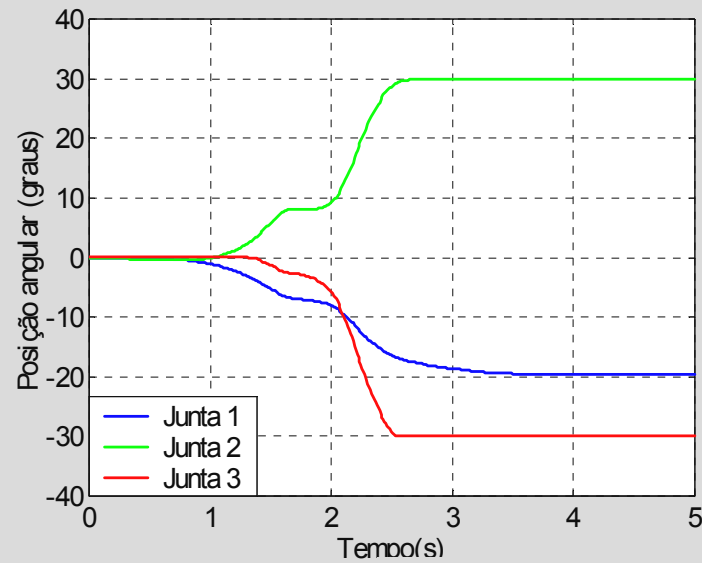
Underactuated Arm II



Controle via representação quasi-LPV

- Parâmetro: $\rho(\tilde{x}) = [\tilde{q}_2 \quad \tilde{q}_3]$
- Variação: $\rho \in [-30, 30]^\circ \times [-30, 30]^\circ$
- Taxa de variação: $|\dot{\rho}| \leq 50^\circ/\text{s}$
- Número de pontos: $L = 5$
- Funções base: $f_1 = 1$, $f_2 = \cos(\tilde{q}_2)$ e $f_3 = \cos(\tilde{q}_3)$
- Nível de atenuação: $\gamma = 1.2$

Controle via representação quasi-LPV



Controle H_∞ via teoria dos jogos

- Nível de atenuação: $\gamma = 3$
- Matrizes de peso: $Q_1 = I_3$
 $Q_2 = 2I_3$
 $Q_{12} = 0$
 $R = 5I_3$

Controle H_∞ via teoria dos jogos

