Matemática Aplicada à Economia – LES 201

Aulas 19 e 20

Funções exponenciais e logarítmicas

Márcia A.F. Dias de Moraes

Funções Exponenciais e Logaritmicas

Chiang, cap. 10

Funções exponenciais e logarítmicas

⇒ várias aplicações em economia : variável de escolha é o tempo

- Cálculo de juros aplicações financeiras ou empréstimos bancários
- Taxas Crescimento
  - População
  - Aprendizagem
  - Inflação

Funções exponenciais

Natureza das funções exponenciais: são aquelas que a variável independente aparece como um expoente

- Nas funções polinomiais

$$y = \underbrace{x}_{\text{Base Variável}}{}^{a} \rightarrow \text{expoente fixo} \qquad y = x^3 + 10x^2 + 20$$

- Nas funções exponenciais:

$$y = \underbrace{a}_{\text{Base Fixa}}{}^{x} \rightarrow \text{expoente variável} \qquad \text{Ex: } y = \underbrace{8}_{\text{Base Fixa}}{}^{x - \sqrt{x}} \rightarrow \text{expoente variável}$$

Funções exponenciais

Uma função que tem base fixa e expoente variável é chamada de função exponencial

$y = a^x$

Para $a > 0$ e $a \neq 1$

Domínio da função: Conjunto dos números reais R

Por que a > 0?

$$y = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

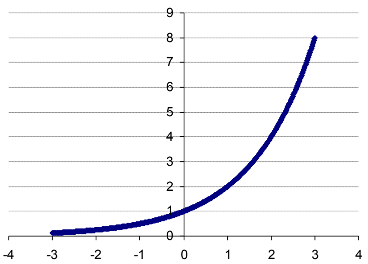
A função exponencial é a inversa da logaritma: o logaritmando > 0

Comportamento da Função Exponencial

1º caso: $f(x) = a^x$, com $a > 1$

Ex: $y = 2^x$

x	y
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = \infty$$

Comportamento da Função Exponencial

1º caso: $f(x) = a^x$, com $a > 1$

Note que:

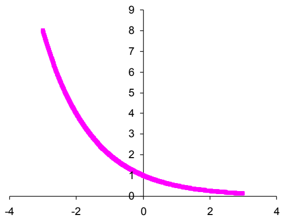
- Intersecção com o eixo y: sempre ponto (0,1)
- Não há intersecção com o eixo x (Não existe $x / f(x) = 0$)
  - (y é assintótica ao eixo x)
- Quando x cresce, y cresce infinitamente
- Quando x decresce, y decresce infinitamente
- Domínio = R
- Imagem = R^+

Comportamento da Função Exponencial

2º caso: $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$

Ex: $y = (\frac{1}{2})^x$

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	½
2	¼
3	1/8



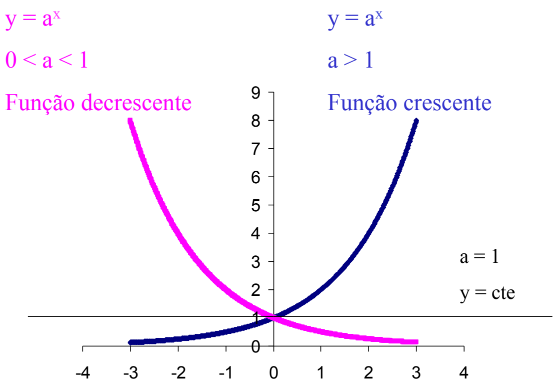
$\lim_{x \to -\infty} a^x = \infty$ $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$

Comportamento da Função Exponencial

2º caso: $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$

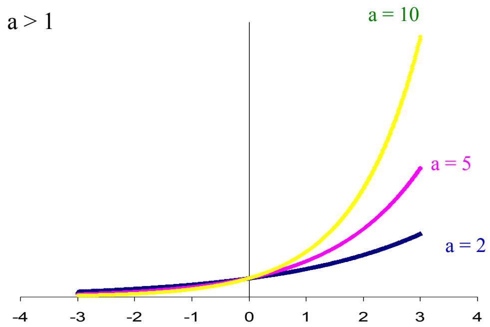
Note que:

- Intersecção com o eixo y: sempre ponto (0,1)
- Não há intersecção com o eixo x (Não existe x / f(x) = 0)
  - (y é assintótica ao eixo x)
- Quando x cresce, y decresce infinitamente
- Quando x decresce, y cresce infinitamente
- Domínio = R
- Imagem = R^+



A curvatura da função

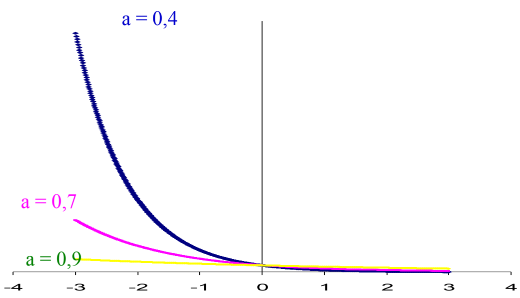
- O valor do parâmetro a determina a curvatura da função



A curvatura da função

- O valor do parâmetro a determina a curvatura da função

$0 < a < 1$



Propriedades de Função Exponecial

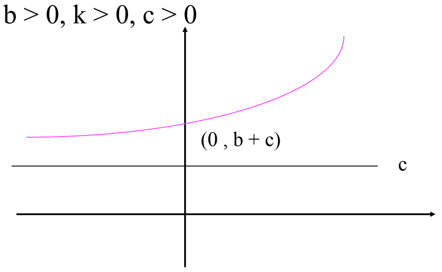
A função exponencial y = a $(a > 0, a \neq 1)$:

- Domínio é $(-\infty, +\infty)$
- A imagem é $(0, +\infty)$
- Gráfico passa pelo ponto (0,1)
- É função contínua em $(-\infty, +\infty)$
- É monotonicamente crescente em $(-\infty, +\infty)$ se $a > 1$
- É monotonocamente decrescente em $(-\infty, +\infty)$ se $0 < a < 1$
- É assintótica ao eixo x

Forma mais geral da função exponencial

$y = b.a^{kx} + c$ Curva assintótica à reta $y = c$

a) $a > 0, b > 0, k > 0, c > 0$



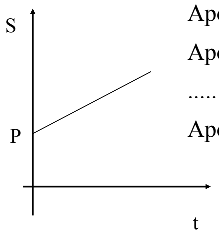
Aplicações funções exponenciais em economia Juros simples e Juros compostos

JUROS SIMPLES

- É o juros calculado somente sobre o montante inicialmente investido
- Se uma quantia P (principal) é emprestada (ou investida) a juros simples, a uma taxa de r% ao ano, a quantia S = S(t) devida (ou acumulada) após t anos será de:

$$\underbrace{S}_{\text{Dívida ou Poupança}} = \overbrace{P}^{\text{Principal}} \left(1 + \underbrace{r}_{\text{taxa juros}} \cdot \overbrace{t}^{\text{número períodos}}\right)$$

Juros Simples



Após 1º. ano: S = P + rP

Após 2º. ano: S = (P + rP) + rP = P+2rp

Após 3º. ano: S = (P+2rp) + rP = P +3rP

.....

Após t anos: S = P + trP

S = P(1+rt)

$(y = a + bx)$

Juros compostos

Juros compostos: quando o juros obtido após o primeiro período é INCORPORADO ao principal, e daí para frente esta soma é continuamente reinvestida à mesma taxa de juros nos períodos subsequentes

- Se uma quantia P (principal) é emprestada (ou investida) a juros compostos, a uma taxa de r % ao ano, e os juros são capitalizados anualmente, a quantia S = S(t) devida (ou acumulada) após t anos será de:

Juros compostos

Após 1º. ano: $S(1) = P + rP = P(1+r)$

Após 2º. ano: $S(2) = P(1 + r) + P(1+r)r = [P(1+r)][(1+r)]$

$S(2) = P(1+r)^2$

Após 3º. ano: $S(3) = P(1+r)^2 + (P(1+r)^2)r =$

$= [P(1+r)^2](1+r) = P(1+r)^3$

.....

Após t anos: $S(t) = P(1+r)^t$

Juros compostos - Exercício

João depositou R$1.000 na poupança, que lhe pagará juros compostos de 6% ao ano, ao serem incorporados ao principal ao fim de cada ano. Qual o montante acumulado após 5 anos?

Base e

- Funções exponenciais de base e (e = 2,7182818 ...) são muito usadas em economia
- Função exponencial natural tem derivada conveniente:

$$\frac{d}{dt}e^{t} = e^{t}$$

$$y = Ae^{rt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \underbrace{Ae^{rt}}_{y} r = yr$$

A base e

Considere a função: $f(m) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}$

m	10	100	1000	10000	100000	1000000
$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$	2,59374	2,70481	2,71692	2,71815	2,71827	2,71828

$$e = \lim_{m \to \infty} f(m) = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}$$

Interpretação econômica de *e*

Matematicamente: *e* é o limite da expressão

$$f(m) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}$$

Economicamente: resultado da composição de juros compostos

Suponha que os juros sejam compostos (ou capitalizados) mais de uma vez ao ano. O intervalo de tempo entre sucessivos cálculos de juros é chamado de:

período de conversão ou período de capitalização.

Interpretação econômica de *e*

Economicamente: *e* é o resultado da composição de juros compostos

-Montante (ou principal) aplicado: R$1

-Taxa juros r = 100% ao ano (R$1 ao ano)

-Juros composto uma vez ao ano, ao final do 1º. ano o montante final será R$2

-Se os juros forem compostos continuamente ao longo do ano, ao final do 1º. ano o montante atingirá R$2,71828...

Interpretação econômica de *e*

V(1) = (principal inicial) (1+r)

$$V(1) = 1(1 + 100\%) = (1 + \frac{1}{1})^{1} = 2$$

Se o juro for composto por semestre

$$V(2) = (1 + 50\%)(1 + 50\%) = (1 + \frac{1}{2})^{2}$$

Se o juro for composto por trimestre

$$V(3) = (1 + \frac{1}{3})^{3}$$

Se for composto m vezes ao ano

$$V(m) = (1 + \frac{1}{m})^{m}$$

Juros compostos continuamente

$$\lim_{m\to\infty} V(m) = \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} = e = 2,71828...$$

Juros Compostos Continuamente

Valor do principal = A

Taxa juros = r

$$V(m) = A(1 + \frac{r}{m})^{mt}$$

$$V = \lim_{m\to\infty}(V) = Ae^{rt}$$

Principal (S)	Taxa Juro	Anos de juros Compstos continuamente	Valor do ativo ao final doperíodo
1	100% (=1)	1	e
1	100% (=1)	t	e^t
A	100% (=1)	t	Ae^t
A	r	t	Aer^t

Valor Presente (A)

Valor do principal = A
Taxa juros = r

Caso Discreto:
Juros capitallizado uma vez por período

$$S(t) = P(1 + r)^t$$

ou

$$V(t) = A(1+i)^t$$

$$A = V(1+i)^{-t}$$

Caso contínuo:
Juros capitalizados continuamente

$$V(m) = A(1 + \frac{r}{m})^{mt}$$

$$V = \lim_{m \to \infty} (V) = Ae^{rt}$$

$$A = Ve^{-rt}$$

Valor Presente

Questão: quanto preciso investir hoje, a uma taxa de juros fixada r, para obter certo montante em uma data futura?

Dada a fórmula de juros compostos: $S = P(1 + i)^n$

Isolando P:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}$$

Exercícios

1) Quanto deve ser depositado hoje em um banco que paga juros de 6% ao ano, composto mensalmente, de forma a se obter um montante acumulado de R$20.000 ao final de 3 anos?

Exercícios

2) Em 01/01/1999 aplica-se R$1.000 com juros compostos de poupança de 6% ao ano, composição anual. Quanto terá em 31/12/01?

Resposta: R$ 1191,02

Exemplos Aplicações Funções Exponenciais

Suponha que uma população tenha hoje 40.000 habitantes e que haja um crescimento populacional de 2% ao ano. Qual o número de habitantes daqui a x anos?

Taxa Geométrica de Crescimento

$V_F = V_i (1 + r)^t$

Isolando r:

$$\frac{V_F}{V_i} = (1 + r)^t$$

$$(1 + r) = \sqrt[t]{\frac{V_F}{V_I}}$$

$$r = \sqrt[t]{\frac{V_F}{V_I}} - 1$$

Evolução Produção Cana-de-Açúcar (milhões t)

Região	98/99	99/00	00/01	01/02	02/03	03/04
NNE	45,1	43	50,5	48,8	50,2	39,7
CS	269,8	263,9	207,1	244,2	270,4	298,6
Brasil	314,9	307	257,6	293	320,6	338,3

$$r = \sqrt[t]{\frac{V_F}{V_I}} - 1$$

314,9	307,0	257,6	293,0	320,6	338,3

$$r = \sqrt[5]{\frac{338,3}{314,9}} - 1$$

1,0142

(1,0142*314,9) (1,0142*319,5) (1,0142*324) (1,0142*328,6) (1,0142*333,3)

319,5 324,0 328,6 333,3 338,0

$$r = 0,0142$$

Propriedades dos expoentes:

1) $a^m . a^n = a^{m+n}$

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3) $(a^m)^n = a^{m.n}$

4) $(a . b)^m = a^m . b^m$

5) $(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$

Por definição: se $a \neq 0$, $a^0 = 1$

Funções Logarítmicas

- Inversa da Exponencial
- Útil: transforma relações multiplicativas em aditivas (+ fáceis de trabalhar)
- Muito usada em modelos econométricos:
  - Quando as váriáveis são expressas em log, os coeficientes das variáveis indicam as elasticidades da curva
  - Ou seja,como o *log y* varia a medida que o *log x* se altera

Aplicação modelos econométricos

b) Transformações das variáveis para se obter relação linear

Ex: $y = a\,x^{b}$

Aplicando-se logaritmo de ambos os lados:

$$\log y = \log a + b \log x$$
$$z = k + b . v$$

É linear nas variáveis log y e log x

Funções Logarítmicas

O significado do logarítmo: quando temos 2 números, por exemplo, 4 e 16, que podem ser relacionados entre si pela equação: $4^2 = 16$, definimos:

$$\log_4^{16} = 2$$

- $4^2 = 16$
- O expoente 2 é o logarítmo de 16 na base 4

∴ O logarítmo é a POTÊNCIA a qual uma base deve ser elevada para se obter um número específico

Funções Logarítmicas

Generalizando:

$x = b^y \quad \rightarrow \quad y = \log_b x$

- O log de x na base b é y
- O log de x na base b é a potência a qual a base b precisa ser elevada para que se obtenha o valor x
- O logarítmo $\log_b x$ é definido somente para valores positivos de x
- Números negativos ou zero não possuem logarítmos

Funções Logarítmicas

- $\log 10 = 1$
- $\log 100 = 2$
- $\log_5 125 = 3$
- $\log_3 1/27 = -3$
- $\log_{20} 20 = 1$
- $\log 1 = 0$
- $\log_{10} 0,1 = -1$
- $\log_{10} 0,01 = -2$

Funções Logarítmicas

Resolver as equações em x:

a) $\log_3 x = 4 \quad \rightarrow x = 3^4 = 81$

b) $\log_{16} 4 = x \quad \rightarrow 16^x = 4$

$4^{2x} = 4$

$2x = 1, \quad x = 1/2$

c) $\log_x 8 = 3 \quad \rightarrow x^3 = 2^3$

$x = 2$

d) $a^m = b^m$ então $a = b$

Sistemas de Logarítmos mais comuns

- Base 10: $\log_{10} x = \log x$
- Base e: $\log_e x = \ln x$
- $\ln e^3 = 3$ $\qquad \ln e^2 = 2$
- $\ln e = 1$ $\qquad \ln 1 = 0$
- $\ln 1/e = -1$ $\qquad \ln 1/e^2 = -2$

Generalizando: $\ln e^n = n$

Por definição: Base > 0 e $\neq$ 1 e logaritmando > 0

1) $\log_a 1 = 0$
2) $\log_a a = 1$

Propriedades dos Logaritmos

(P1) $\log_a (uv) = \log_a u + \log_a v \quad (u,v > 0)$

OBS: $\log_a (b \pm c) \neq \log_a b \pm \log_a c$

(P2) $\log_a (u/v) = \log_a u - \log_a v$

(P3) $\log_a u^\alpha = \alpha \log_a u$

(P4) $\log_a M = \dfrac{\log_c M}{\log_c a}$ (mudança de base)

Usando as propriedades conjuntamente:

$\ln (a.b^c) = \ln a + \ln b^c = \ln a + c \ln b$

Exemplos aplicação

a) $\ln (e^6 . e^4) =$

b) $\ln (A. e^7) =$

c) $\log (5/3) =$

d) Admitindo que $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$ calcule:

d.1) $\log 16$

d.2) $\log 36$

d.3) $\log (1/3)$

d.4) $\log_3 2$

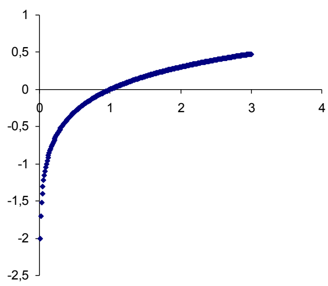
Exemplos aplicação

d.5) Resolva a equação exponencial: $2^x = 3$

d.6) Resolva a equação exponencial: $a.b^x - c = 0$

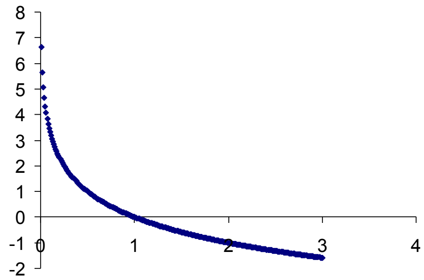
Funções Logaritmicas e seus gráficos

$y = \log_b x$ Caso 1: $b > 1$



Funções Logaritmicas e seus gráficos

$y = \log_b x$ Caso 2: $0 < b < 1$



Propriedades de Função Logaritmica

A função logarítmica $y = f(x) = \log_b x \quad (b > 0, b \neq 1)$:

- O gráfico da função logarítmica está sempre à direita de y
- Domínio é: R^+
- A imagem é : $(-\infty, +\infty)$
- Intercepta o eixo Ox no ponto (1,0)
- É monotonicamente crescente em $\underline{(0, +\infty)}$ se b>1
- É monotonicamente decrescente em $\underline{(0, +\infty)}$ se b<1
- É assintótica ao eixo y

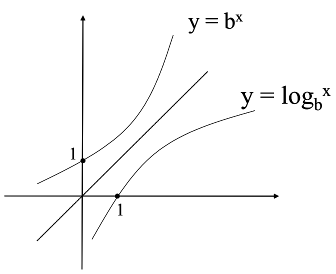
Relação entre as funções Logarítmicas e Exponenciais

- As funções logaritmicas são INVERSAS das funções exponenciais
- Funções inversas: inverte-se os papéis das variáveis dependentes e independentes

$$\underbrace{y}_{\text{dependente}} = b^{\overset{\text{independente}}{\downarrow}\,x} \Leftrightarrow \log_b y = x$$

$$\text{Inversa} : y = \log_b x$$

- Graficamente: qual a relação existente entre as funções inversas e a reta y = x?
- Se pensarmos na reta y = x como espelho, o ponto (u,v) é a imagem especular do ponto (v,u)



Exercícios

1) O número de habitantes de uma cidade é igual a 7000 e cresce a taxa de 3% ao ano. Daqui a quanto tempo a população dobrará? Dados: log 2 = 0,3010 e log (1,03) = 0,0128

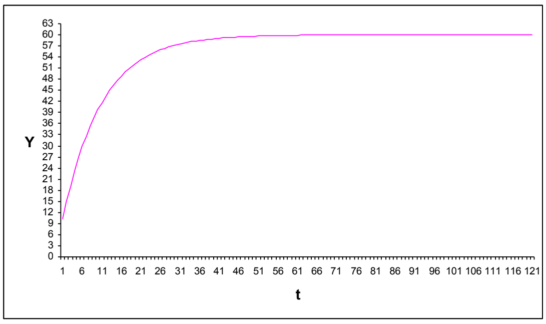
Exercícios

2) Um imóvel vale hoje R$150.000 e a cada ano sofre uma desvalorização de 3%. Daqui a quantos anos seu valor se reduzirá à metade?

Exercícios

3)Um digitador após t dias de experiência consegue digitar *p* palavras por minuto. Suponha que $p = 60 - 55e^{-0,1t}$.

a) Quantas palavras ele digitava por minuto quando não tinha experiência?
b) Quantas palavras digitará por minuto após 20 dias de experiência?
c) Quantas palavras conseguirá digitar por minuto no máximo?
d) Esboce o gráfico de p em fç de t.



Exemplo aplicação : Taxa de Crescimento Chiang pag 272

Dada a função $y=f(t)$, sua taxa instantânea de crescimento é definida por:

$$r_y \equiv \frac{dy/dt}{y} \equiv \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\textit{função marginal}}{\textit{função total}} \equiv \textit{derivada de } \ln f(t)$$

Para achar a taxa de crescimento de uma funçao:

1) Diferenciar a função em relação a t e depois dividir por t
ou
2) Aplicar ln dos dois lados e depois diferenciar em relaçao a t

Exemplo aplicação: Taxa de Crescimento

Calcule a taxa de crescimento de

$$V = ae^{rt}$$

$$\ln V = \ln A + rt \ln e = \ln A + rt$$

$$r_v = \frac{d}{dt}\ln V = 0 + \frac{d}{dt} rt = r$$