Fisica I - IO

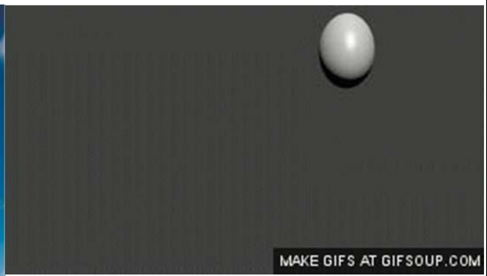
Rotação de Corpos Rígidos

Prof. Cristiano Oliveira
Ed. Basilio Jafet – sala 202
crislpo@if.usp.br

Rotação de Corpos Rígidos

Movimentos de corpos contínuos podiam em muitos casos ser descritos por um ponto material.
Quando temos ***rotações*** de corpos contínuos esta aproximação já não é válida e novos elementos devem ser considerados na análise.

Corpos reais são muito complicados pois podem apresentar deformações, elongações, torções, etc. Aqui iremos nos restringir aos chamados ***corpos rígidos***



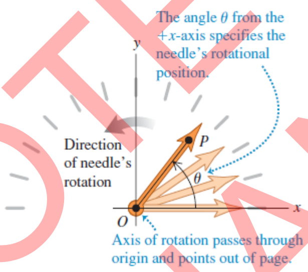
Velocidade Angular e Aceleração

Quando analisamos o movimento de rotação, vamos assumir que o corpo rígido roda em torno de um eixo fixo, um eixo que está em repouso em algum sistema de referencias inercial e não muda sua direção relativa à aquele sistema.

O corpo girante pode ser um eixo de motor, um pedaço de carne girando em um churrasco, um carrossel em um parque de diversões, etc.

A figura ao lado mostra um corpo rígido (no caso, um marcador de velocidade de ponteiro) girando em torno de um eixo fixo. O eixo passa pelo ponto *O* e é perpendicular ao plano do diagrama (plano xy).

9.1 A speedometer needle (an example of a rigid body) rotating counterclockwise about a fixed axis.

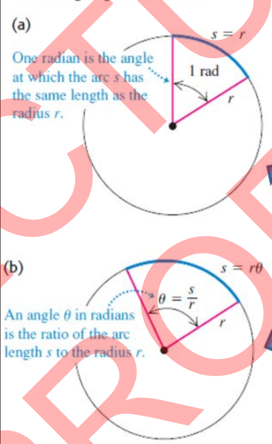


Como descrever a rotação?

Uma forma seria utilizar coordenadas cartesianas (componentes x e y), mas esta não é a forma mais conveniente... Por que?

Por outro lado, podemos notar que a linha OP está fixa no corpo e gira com ele. O ângulo θ que esta linha faz com o eixo x descreve a posição rotacional do corpo. Deste modo podemos utilizar a única quantidade θ como a coordenada de rotação.

Measuring angles in radians.



Note que esta coordenada θ pode ser positiva ou negativa, dependendo da convenção adotada.

Para descrever o movimento de rotação a maneira mais natural de se medir o angulo θ não é em graus, mas sim em ***radianos***.

<u>**Um radiano**</u> é definido como o angulo subentendido, no centro de um circulo, por um arco com comprimento igual ao raio do circulo:

$$\theta = \frac{arco}{raio} = \frac{r}{r} = 1rad$$

Com esta definição, seja um angulo θ arbitrário compreendido por um arco com comprimento s em um circulo de raio r. O valor de θ em radianos será igual a *s* dividido por *r* :

$$\theta = \frac{s}{r} \quad \text{or} \quad s = r\theta$$

Veja que este ângulo é a razão entre dois comprimentos e sendo assim é um *número puro, sem dimensão.* No entanto utilizamos o símbolo ***rad*** para distinguir este ângulo de outros possíveis (graus, rotações, etc).

A circunferência de um circulo (ou seja, o comprimento do arco sobre todo o circulo) é 2π vezes o raio. Assim o angulo completo de uma circunferência é

$$\theta_{circunferencia} = \frac{2\pi . r}{r} \Rightarrow \theta_{circunferencia} = 2\pi$$

Agora, em uma circunferência temos 360º. Assim, pode-se utilizar uma regra de 3 para converter em radianos para graus:

$$2\pi\ rad \text{ ------- } 360^{o}$$
$$\theta\ rad \text{ ------- } x$$

$$x = \frac{\theta.360}{2\pi}$$

$$\theta = \frac{x.2\pi}{360}$$

$$\theta = 1rad : x = \frac{1.360}{2\pi} = 57.3^{o}$$

$$x = 180^{o} \Rightarrow \theta = \pi\ rad$$

$$x = 90^{o} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}\ rad$$

$$x = 60^{o} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}\ rad$$

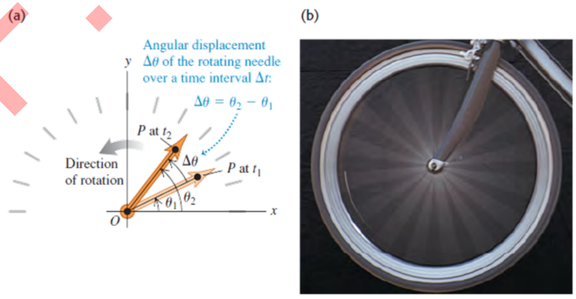
$$x = 30^{o} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}\ rad$$

Velocidade Angular

Definimos velocidade angular média ω_{av-z} (letra grega ômega) de um corpo em um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ como a razão do deslocamento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ por Δt:

$$\omega_{av\text{-}z} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

9.3 (a) Angular displacement $\Delta\theta$ of a rotating body. (b) Every part of a rotating rigid body has the same average angular velocity $\Delta\theta/\Delta t$.



O índice z indica que a rotação ocorre em torno do eixo z, que é perpendicular ao plano.
A velocidade angular instantânea ω_z é o limite de ω_{av-z} quando Δt tende a zero:

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

→ ***velocidade angular***

(definition of angular velocity)

Velocidade Angular

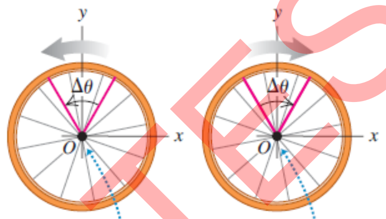
A velocidade angular ω_z pode ser positiva ou negativa, dependendo da direção de rotação do corpo.
A velocidade angular escalar ω é o módulo da velocidade angular. Sendo um módulo (assim como o modulo da velocidade linear *v*), nunca é negativo.

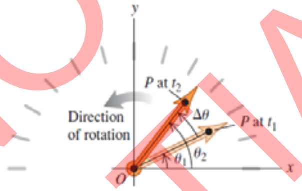
Pontos diferentes de um corpo rígido em rotação cobrem diferentes distâncias em um dado intervalo de tempo, dependendo de quão rápido cada ponto está do eixo de rotação.

No entanto, como o corpo é rígido, ***todos*** os pontos giram o mesmo angulo no mesmo intervalo de tempo. Assim, ***em qualquer instante, cada ponto de um corpo rígido em rotação tem a mesma velocidade angular.***

Esta velocidade é positiva se a rotação ocorre na direção de aumento de θ ou negativa se a rotação ocorre na direção de decréscimo de θ.

9.4 A rigid body's average angular velocity (shown here) and instantaneous angular velocity can be positive or negative.





Velocidade Angular

Se o angulo θ é dado em radianos, a unidade de velocidade angular é radianos por segundo (rad/s). Rotações podem ser dadas em outras unidades, como por exemplo revoluções por minuto (rev/minuto ou rpm). Como 1 rev = 2π rad, pode-se ter:

$$1\ \text{rev/s} = 2\pi\ \text{rad/s} \quad \text{and} \quad 1\ \text{rev/min} = 1\ \text{rpm} = \frac{2\pi}{60}\ \text{rad/s}$$

Com isso, 1 rad/s $\cong$ 10 rpm

Example 9.1 **Calculating angular velocity**

The angular position θ of a 0.36-m-diameter flywheel is given by

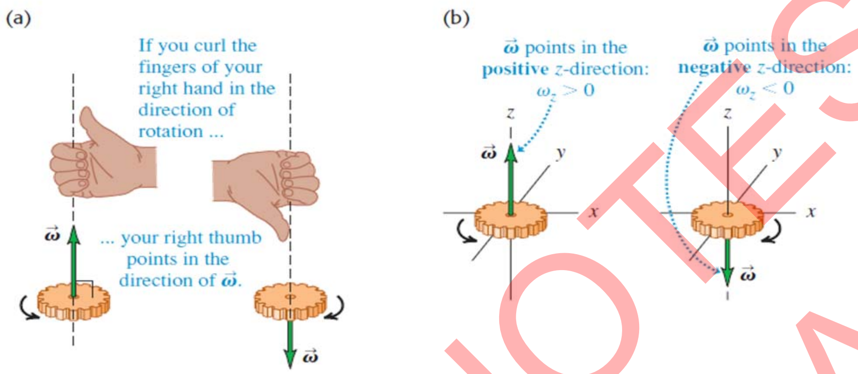
$$\theta = (2.0\ \text{rad/s}^3)t^3$$

(a) Find θ, in radians and in degrees, at $t_1 = 2.0$ s and $t_2 = 5.0$ s. (b) Find the distance that a particle on the flywheel rim moves over the time interval from $t_1 = 2.0$ s to $t_2 = 5.0$ s. (c) Find the average angular velocity, in rad/s and in rev/min, over that interval. (d) Find the instantaneous angular velocities at $t_1 = 2.0$ s and $t_2 = 5.0$ s.

Velocidade Angular como um vetor

Assim como a velocidade linear $\vec{v}$, a velocidade angular $\vec{\omega}$ também é um ***vetor***.

As *componentes* deste vetor são definidas em *termos do eixo em torno do qual ocorre a rotação*. Por exemplo, se rotação ocorre em torno do eixo *z* o vetor $\vec{\omega}$ só terá a componente ω_z. A direção de $\vec{\omega}$ é obtida pela regra da mão direita:



Esta formulação vetorial é particularmente útil quando a direção do vetor de rotação muda. Não trataremos deste caso nesta etapa, apenas consideraremos rotações sob eixos fixos.

Aceleração Angular

Definimos aceleração angular média $\alpha_{av\text{-}z}$ (letra grega alfa) de um corpo em um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ como a razão do variação da velocidade angular $\Delta\,\omega_z = \omega_{z2} - \omega_{z1}$ por Δ t:

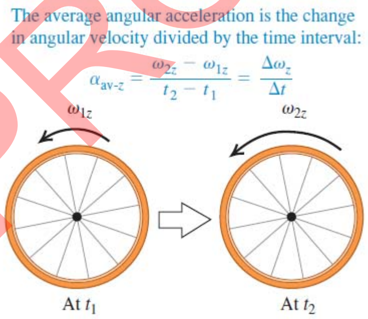
$$\alpha_{\text{av-}z} = \frac{\omega_{2z} - \omega_{1z}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}$$

A aceleração angular instantânea α_z é o limite de $\alpha_{av\text{-}z}$ quando Δt tende a zero:

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt}$$

→ ***Aceleração angular***

(definition of angular acceleration)



A unidade de aceleração angular é radiano por segundo quadrado, ou rad/s².

A aceleração angular também pode ser calculada como,

$$\alpha_z = \frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

O uso de letras gregas é feito para que se tenha uma associação com o caso linear
r ↔ θ , v ↔ ω , a ↔ α

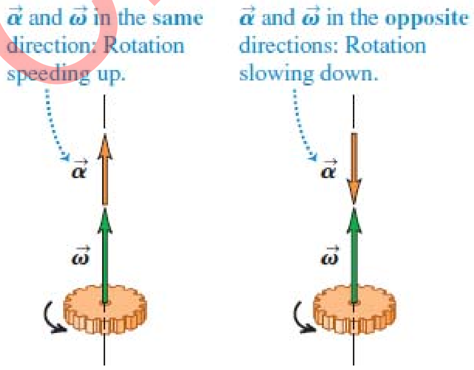
Example 9.2 Calculating angular acceleration

For the flywheel of Example 9.1, (a) find the average angular acceleration between $t_1 = 2.0$ s and $t_2 = 5.0$ s. (b) Find the instantaneous angular accelerations at $t_1 = 2.0$ s and $t_2 = 5.0$ s.

$\theta = (2.0 \text{ rad/s}^3)t^3$

Aceleração Angular como um vetor

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$



Se o objeto gira ao redor do eixo z então $\vec{\alpha}$ terá somente a componente z, α_z.

Neste caso a tem $\vec{\alpha}$ mesma direção de $\vec{\omega}$ se a rotação está aumentando e sentido oposto se a rotação estiver diminuindo

Rotação com Aceleração Angular Constante

Vimos no caso de movimento retilíneo que o caso com aceleração constante era particularmente simples.

O mesmo ocorre quando temos aceleração angular constante.

Além disso, veremos uma grande similaridade entre as equações obtidas.

Seja ω_{oz} a velocidade angular do corpo rígido em t=0 e seja ω_z a velocidade angular em qualquer instante posterior *t*. A aceleração angular α_z é constante e igual ao valor médio em qualquer intervalo. Assim,

$$\alpha_z = \frac{\omega_z - \omega_{0z}}{t - 0}$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$$

(constant angular acceleration only)

Como a aceleração é constante a velocidade angular varia uniformemente. Assim, a variação média entre *0* e *t* a média entre o valor inicial e final é,

$$\omega_{\text{av-}z} = \frac{\omega_{0z} + \omega_z}{2}$$

Rotação com Aceleração Angular Constante

Da mesma forma, $\omega_{av\text{-}z}$ é o deslocamento total, θ - θ_0 dividido pelo intervalo de tempo *t* - *0*

$$\omega_{\text{av-}z} = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0}$$

Substituindo a equação de $\omega_{av\text{-}z}$ na equação acima, temos,

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t$$

(constant angular acceleration only)

Obtemos a equação final substituindo o valor de ω_z pela equação obtida anteriormente,

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}[\omega_{0z} + (\omega_{0z} + \alpha_z t)]t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z} t + \tfrac{1}{2}\alpha_z t^2$$

(constant angular acceleration only)

Rotação com Aceleração Angular Constante

Seguindo os mesmos passos feitos para o caso retilíneo, podemos obter uma relação entre θ e ω_z que não contem o tempo. Como as equações obtidas são similares obtemos a equação de Torricelli para o movimento rotacional,

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$$

(constant angular acceleration only)

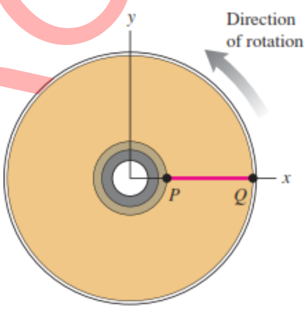
- A similaridade entre as equações foi obtida para o caso de aceleração constante em torno de um eixo fixo.
- Tenha em mente que os movimentos são intrinsicamente diferentes e deste modo deve-se ter cuidado quando na aplicação dos resultados na resolução de problemas

Straight-Line Motion with Constant Linear Acceleration	Fixed-Axis Rotation with Constant Angular Acceleration
$a_x = \text{constant}$	$\alpha_z = \text{constant}$
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$
$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t$

Example 9.3 Rotation with constant angular acceleration

You have finished watching a movie on Blu-ray and the disc is slowing to a stop. The disc's angular velocity at $t = 0$ is 27.5 rad/s, and its angular acceleration is a constant $-10.0\ \text{rad/s}^2$. A line PQ on the disc's surface lies along the $+x$-axis at $t = 0$ (Fig. 9.8). (a) What is the disc's angular velocity at $t = 0.300$ s? (b) What angle does the line PQ make with the $+x$-axis at this time?

A line PQ on a rotating Blu-ray disc at $t = 0$.



Relacionando cinemática linear e angular

Para poder utilizar os conceitos de energia que desenvolvemos anteriormente (ex. energia cinética) precisamos obter a velocidade escalar linear e aceleração linear de um ponto no corpo rígido em rotação.

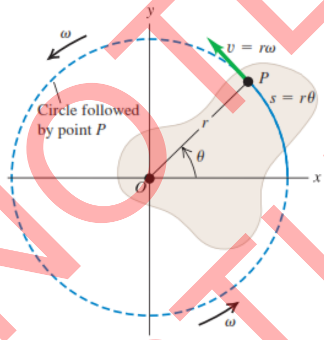
Velocidade linear escalar em um corpo rígido em rotação

Quando um corpo rígido gira ao redor de um eixo fixo, cada partícula no corpo se move em um caminho circular. Este circulo cai no plano perpendicular ao eixo e o centro do circulo é o próprio eixo.

A velocidade escalar da partícula é diretamente proporcional à velocidade angular do corpo: quanto mais rápido o corpo gira, maior será a velocidade escalar de cada partícula.

Na figura ao lado o ponto P é a distancia constante r a partir do eixo de rotação, ou seja, ele se move em um circulo de raio r. Em qualquer instante, o angulo θ (em radianos) e o comprimento do arco, s, estao relacionados por:

$$s = r\theta$$



Velocidade linear escalar em um corpo rígido em rotação

Podemos tomar a derivada temporal desta relação, notando que r é constante para qualquer ponto neste circulo, e tomamos o valor absoluto nos dois lados:

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = r\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

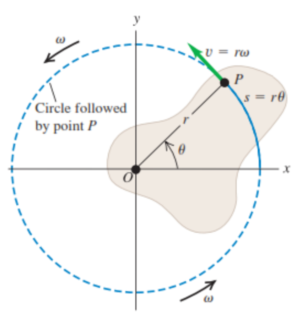
$|ds/dt|$ é o valor absoluto da taxa de variação do comprimento do arco, que é igual à velocidade escalar instantânea v da partícula.

$|d\theta/dt|$, a taxa absoluta de mudança do angulo, é a velocidade angular escalar instantânea ω, isto é, o módulo da velocidade angular instantânea em rad/s.

$|ds/dt| \rightarrow v$; $|d\theta/dt| \rightarrow \omega$, logo

$$v = r\omega$$

(relationship between linear and angular speeds)

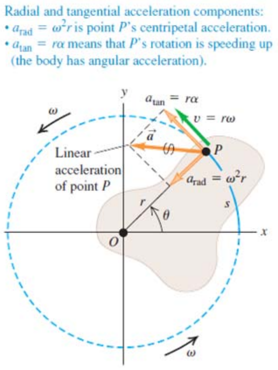


Quanto mais longe o ponto estiver do eixo, maior sua velocidade escalar linear. A direção do vetor velocidade linear é tangente ao circulo de rotação de cada ponto.

Aceleração linear escalar em um corpo rígido em rotação

Podemos representar a aceleração de partículas movendo em um circulo em termos das componentes centrípeta e tangencial, a_{rad} e a_{tan}, como feito anteriormente.

Como visto, a componente tangencial da aceleração a_{tan}, a componente paralela da velocidade instantânea, age para mudar a magnitude da velocidade da partícula (ie, velocidade escalar) e é igual à taxa da mudança desta velocidade. Tomando a derivada,



$$a_{tan} = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$ (tangential acceleration of a point on a rotating body)

Esta componente é sempre tangencial ao movimento da partícula.

$d\omega/dt$ -> taxa de mudança na **velocidade escalar**

$d\omega_z/dt$ -> taxa de mudança na **velocidade vetorial**

A componente da aceleração direcionada para o eixo de rotação, a aceleração centrípeta a_{rad} está associada à mudança de direção da velocidade da partícula. Como mostrado antes, $a_{rad} = v^2/r$, assim:

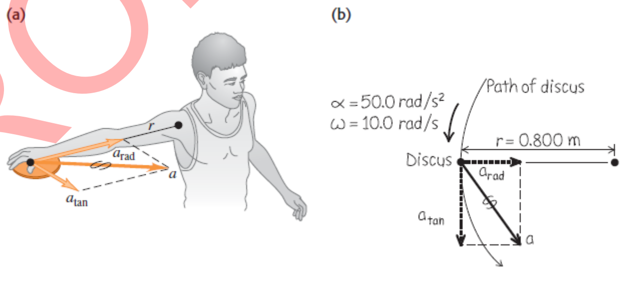
$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$ (centripetal acceleration of a point on a rotating body)

Isto é verdade a cada instante, mesmo quando ω e v não são constantes. A componente centrípeta sempre aponta para o eixo de rotação. A soma vetorial das componentes tangencial e centrípeta em um corpo girando fornecem o vetor aceleração linear $\vec{a}$.

Example 9.4 **Throwing a discus**

An athlete whirls a discus in a circle of radius 80.0 cm. At a certain instant, the athlete is rotating at 10.0 rad/s and the angular speed is increasing at 50.0 rad/s². At this instant, find the tangential and centripetal components of the acceleration of the discus and the magnitude of the acceleration.

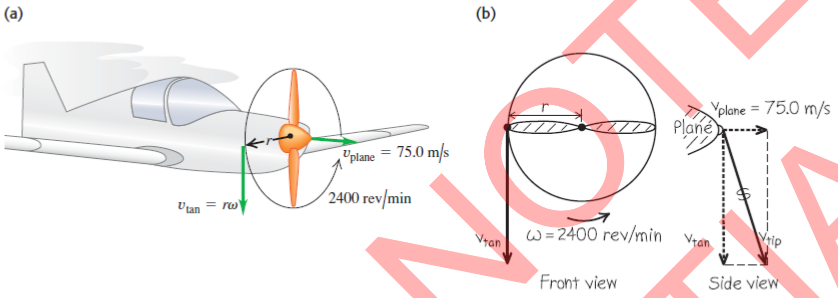
(a) Whirling a discus in a circle. (b) Our sketch showing the acceleration components for the discus.



Example 9.5 **Designing a propeller**

You are designing an airplane propeller that is to turn at 2400 rpm (Fig. 9.13a). The forward airspeed of the plane is to be 75.0 m/s, and the speed of the tips of the propeller blades through the air must not exceed 270 m/s. (This is about 80% of the speed of sound in air. If the speed of the propeller tips were greater than this, they would produce a lot of noise.) (a) What is the maximum possible propeller radius? (b) With this radius, what is the acceleration of the propeller tip?

9.13 (a) A propeller-driven airplane in flight. (b) Our sketch showing the velocity components for the propeller tip.



Energia no movimento de Rotação

Um corpo em rotação consiste de massa em movimento: assim possui energia cinética. Como veremos poderemos representar a energia cinética em termos da velocidade escalar rotacional do corpo e de uma nova quantidade, o momento de inércia, que depende da massa e de como ela está distribuída.

Vamos assumir um corpo composto por um numero grande de partículas com massas m_1, m_2,... localizadas nas distancias r_1, r_2, etc, a partir de um eixo de rotação. A massa da *i*-ésima partícula será localizada à uma distancia r_i do eixo de rotação. Definimos a distancia r_i como sendo a distancia perpendicular da partícula até o eixo (depois relacionaremos isso com um produto vetorial).

Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo, a velocidade v_i da *i*-ésima partícula é dada por, vi= $r_i\ \omega$, onde ω é a velocidade angular do corpo. Partículas diferentes possuem diferentes valores de r, mas ω é o mesmo para todas (corpo rígido). A energia cinética da *i*-ésima partícula é dada por:

$$\tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

A energia cinética total do corpo é a soma das energias cinéticas de todas as partículas:

$$K = \tfrac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2 + \tfrac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2 + \cdots = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2$$

Tomando o termo $\omega^2/2$ em evidencia,

$$K = \tfrac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots)\omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2$$

A quantidade entre parênteses é obtida multiplicando cada elemento de massa pelo quadrado da distancia ao eixo de rotação.
Denotamos esta quantidade pela letra *I* e a denominamos ***momento de inercia*** de um corpo para este eixo de rotação:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2 \quad \text{(definition of moment of inertia)}$$

A palavra "momento" indica que *I* depende em como a massa está distribuída no espaço. Para um corpo com um dado eixo de rotação e uma dada massa, quanto maior a distancia com relação ao eixo, maior será o momento de inércia. As unidades de momento de inercia no SI são kg-m^2.
Em termos do momento de inercia *I*, a energia cinética rotacional de um corpo rígido é,

$$K = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{(rotational kinetic energy of a rigid body)}$$

Note que esta energia cinética não é uma nova forma de energia: é simplesmente a soma das energias cinéticas dos elementos de massa em um corpo em rotação. Nesta definição ω deve estar em radianos por segundo, para que K esteja em Joules. Isto ocorre pois utilizamos $v_i = r_i\,\omega$ no calculo!

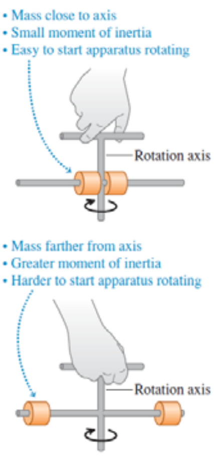
$$K = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \qquad I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots = \sum_i m_i r_i^2$$

Esta equação fornece uma interpretação física para o momento de inércia:

"Quanto maior o momento de inércia, maior a energia cinética do corpo rígido em rotação com uma dada velocidade angular ω."

Alterando o eixo de rotação alteramos também o valor do momento de inércia *I*. ***Sendo assim, um corpo não possui um único momento de inércia!***

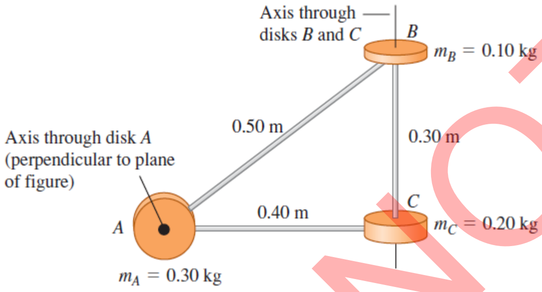
9.14 An apparatus free to rotate around a vertical axis. To vary the moment of inertia, the two equal-mass cylinders can be locked into different positions on the horizontal shaft.



Example 9.6 Moments of inertia for different rotation axes

A machine part (Fig. 9.15) consists of three disks linked by lightweight struts. (a) What is this body's moment of inertia about an axis through the center of disk A, perpendicular to the plane of the diagram? (b) What is its moment of inertia about an axis through the centers of disks B and C? (c) What is the body's kinetic energy if it rotates about the axis through A with angular speed $\omega = 4.0\ \text{rad/s}$?

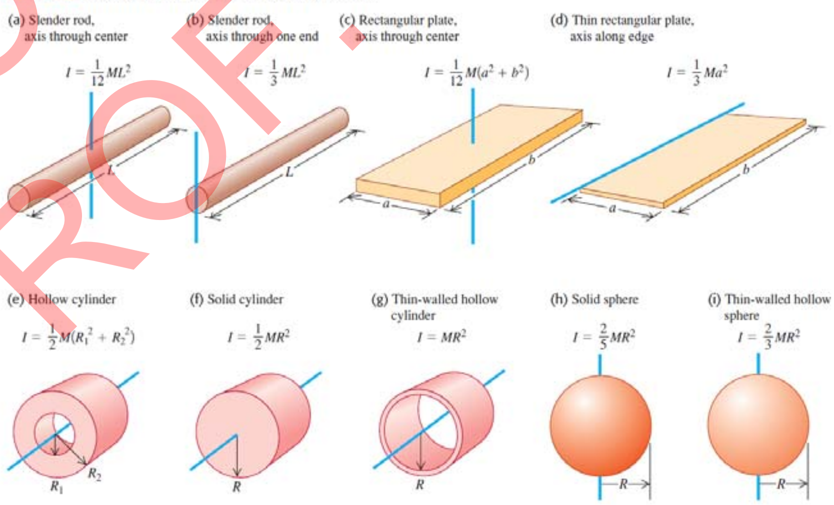
9.15 An oddly shaped machine part.



Quando a distribuição de matéria é continua, como um cilindro solido ou um prato, a soma é substituída por uma integral e podemos utilizar cálculo para calcular momentos de inércia:

$$I = \int r^2\, dm$$

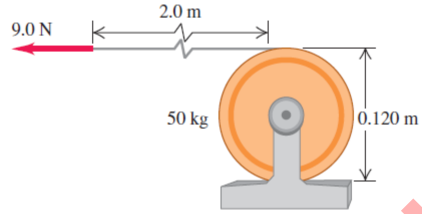
Table 9.2 Moments of Inertia of Various Bodies



Example 9.7 An unwinding cable I

We wrap a light, nonstretching cable around a solid cylinder of mass 50 kg and diameter 0.120 m, which rotates in frictionless bearings about a stationary horizontal axis (Fig. 9.16). We pull the free end of the cable with a constant 9.0-N force for a distance of 2.0 m; it turns the cylinder as it unwinds without slipping. The cylinder is initially at rest. Find its final angular speed and the final speed of the cable.

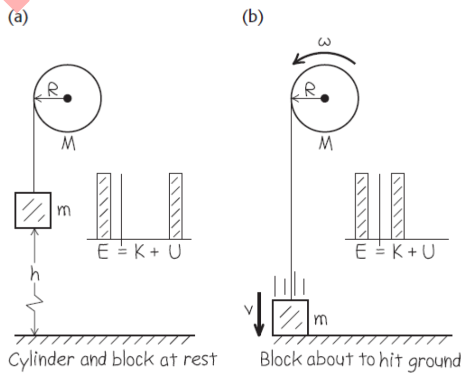
A cable unwinds from a cylinder (side view).



Example 9.8 An unwinding cable II

We wrap a light, nonstretching cable around a solid cylinder with mass M and radius R. The cylinder rotates with negligible friction about a stationary horizontal axis. We tie the free end of the cable to a block of mass m and release the block from rest at a distance h above the floor. As the block falls, the cable unwinds without stretching or slipping. Find expressions for the speed of the falling block and the angular speed of the cylinder as the block strikes the floor.

9.17 Our sketches for this problem.



Energia potencial gravitacional de um corpo extenso

Em casos onde a massa do corpo não é desprezável, é necessário calcular a energia potencial gravitacional associada ao corpo extenso.
Se a aceleração gravitacional g é a mesma para todos os pontos no corpo, a energia potencial gravitacional pode ser descrita como se toda a massa estivesse concentrada no centro de massa do corpo. Se assumimos o eixo y como sendo vertical, um corpo de massa M possui energia gravitacional dada por

$$U = Mgy_{\text{cm}} \quad \text{(gravitational potential energy for an extended body)}$$

onde y_{cm} é a coordenada y do centro de massa. Esta expressão se aplica a um corpo extenso, rígido ou não!

Para demonstrar esta propriedade, assumimos que o corpo seja descrito por uma coleção de elementos de massa m_i. A energia potencial do elemento de massa m_i é $m_i g\, y_i$, assim, a energia potencial total é:

$$U = m_1gy_1 + m_2gy_2 + \cdots = (m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots)g$$

$$m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots = (m_1 + m_2 + \cdots)y_{\text{cm}} = My_{\text{cm}} \qquad M = m_1 + m_2 + \cdots$$

$$\longrightarrow U = Mgy_{\text{cm}}$$

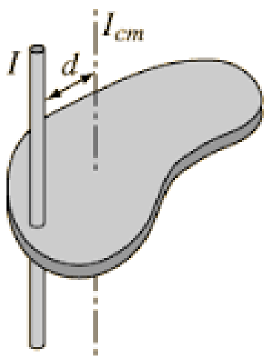
Teorema dos eixos paralelos

O momento de inércia de um corpo não é único. Na realidade para um dado corpo pode-se ter um numero infinito de momentos de inercia pois podemos definir um numero infinitido de eixos em torno do qual o corpo pode rotacionar.

No entanto é possível relacionar o momento de inercia do dentro de massa de uma partícula de massa M, I_{cm} para com um eixo passando pelo eixo de massa e o momento de inercia I_p relacionado a qualqer eixo paralelo a este do centro de massa mas deslocado por uma distancia d. Esta relação, chamada de teorema dos eixos-paralelos, afirma que:

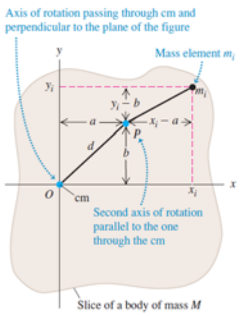
$$I_P = I_{\text{cm}} + Md^2$$

(parallel-axis theorem)



Demonstração do teorema

Consideremos dois eixos, ambos paralelos ao eixo z: um passando pelo eixo de massa e outro por um ponto P. Primeiro tomamos uma fina fatia do corpo, paralelo ao plano xy e perpendicular ao eixo z.



9.19 The mass element m_i has coordinates (x_i, y_i) with respect to an axis of rotation through the center of mass (cm) and coordinates $(x_i - a, y_i - b)$ with respect to the parallel axis through point P.

Assumimos como origem de nosso sistema de coordenadas o centro de massa do corpo. Assim, $x_{cm}=y_{cm}=z_{cm}=0$. O eixo passando pelo centro de massa atravessa esta fina camada no ponto O e o eixo paralelo passa pelo ponto P, cujas coordenadas x, y são (a,b). Sendo assim a distancia do eixo para com o centro de massa é d, $d^2=a^2+b^2$.

Podemos escrever uma expressão para o momento de inercia I_p em torno do eixo passando pelo ponto P. Seja m_i o elemento de massa da fatia, com coordenadas, x_i, y_i, e z_i. Então o momento de inercia I_{cm} da fatia com relação ao eixo passando pelo centro de massa (O) é,

$$I_{cm} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

O momento de inércia da fatia com relação ao eixo passando por P é,

$$I_P = \sum_i m_i[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]$$

Estas expressões não envolvem as coordenadas z_i medidas perpendicularmente às fatias. sendo assim podemos entender a soma para incluir todas as partículas em todas as fatias. Assim o eixo I_p se torna o eixo de inercia do corpo todo com relação ao eixo P. Expandindo as somas, temos

$$I_P = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) - 2a\sum_i m_i x_i - 2b\sum_i m_i y_i + (a^2 + b^2)\sum_i m_i$$

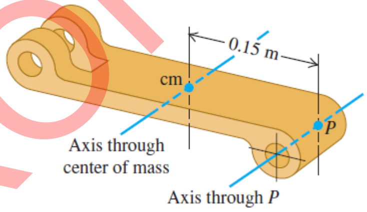
A primeira soma é I_{cm}. A segunda e a terceira soma são as coordenadas do centro de massa que, por definição, assumimos como serem zero. O termo final é d^2 multiplicado pela massa total, ou seja, M d^2. Assim,

$$I_P = I_{cm} + Md^2$$

Example 9.9 **Using the parallel-axis theorem**

A part of a mechanical linkage (Fig. 9.20) has a mass of 3.6 kg. Its moment of inertia I_P about an axis 0.15 m from its center of mass is $I_P = 0.132\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. What is the moment of inertia I_{cm} about a parallel axis through the center of mass?

Calculating I_{cm} from a measurement of I_P.



Cálculo de momentos de Inércia

Se um corpo rígido é descrito por uma distribuição continua de massa, como em um cilindro ou esfera solida, não podemos utilizar representações pontuais de massa. Neste caso a soma das massas que distancias que define o momento de inercia se torna uma integral:

$$I = \int r^2\, dm$$

Para corpos tridimensionais é usual representarmos dm em termos do elemento de volume dV e de uma densidade rho do corpo. A densidade é massa por unidade de volume, rho=dm/dV, assim,

$$I = \int r^2 \rho\, dV$$

Se a densidade de massa é uniforme podemos tirar rho para fora da integral,

$$I = \rho \int r^2\, dV$$

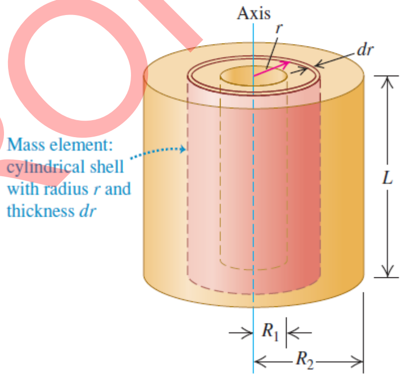
Nesta expressão o elemento de volume dV deve ser escrito em termos das variaveis de integração, como por exemplo $dV = dx\, dy\, dz$.

A escolha do sistema de coordenadas e dos limites de integração dependem das características do corpo.

Example 9.10 **Hollow or solid cylinder, rotating about axis of symmetry**

Figure 9.22 shows a hollow cylinder of uniform mass density ρ with length L, inner radius R_1, and outer radius R_2. (It might be a steel cylinder in a printing press.) Using integration, find its moment of inertia about its axis of symmetry.

9.22 Finding the moment of inertia of a hollow cylinder about its symmetry axis.



Example 9.11 Uniform sphere with radius R, axis through center

Find the moment of inertia of a solid sphere of uniform mass density ρ (like a billiard ball) about an axis through its center.

9.23 Finding the moment of inertia of a sphere about an axis through its center.

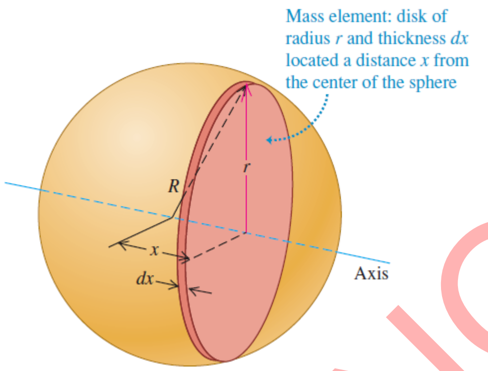


Figure 9.24 shows a slender uniform rod with mass M and length L. It might be a baton held by a twirler in a marching band (less the rubber end caps). (a) Use integration to compute its moment of inertia about an axis through O, at an arbitrary distance h from one end.

A thin rod with an axis through O.