

Universidade Presbiteriana Mackenzie

Sistemas de comunicação

Prof. Marcio Eisencraft

São Paulo

2008

Capítulo 1

Introdução à análise e transmissão de sinais

Neste primeiro capítulo, são abordados os conhecimentos básicos necessários ao estudo dos sistemas de comunicação.

Inicia-se com algumas definições básicas, passando-se a seguir a uma rápida revisão sobre sinais e sistemas no domínio do tempo e da frequência.

1.1 Introdução

Neste curso, trata-se das comunicações por sinais elétricos. Apesar de não ser a única forma possível (vide correios, fala, etc.), esta adquiriu uma importância fundamental na sociedade moderna.

Só para ficar nos exemplos mais óbvios, o que seria de nossa civilização sem TV, rádio e telefonia? Alguns exemplos de sistemas de comunicação são mostrados na Figura 1.1.



Figura 1.1: Exemplos de sistemas de comunicações do dia a dia (LATHI, 1998a).

Um diagrama de blocos de um sistema de comunicação genérico é mostrado na Figura 1.2.

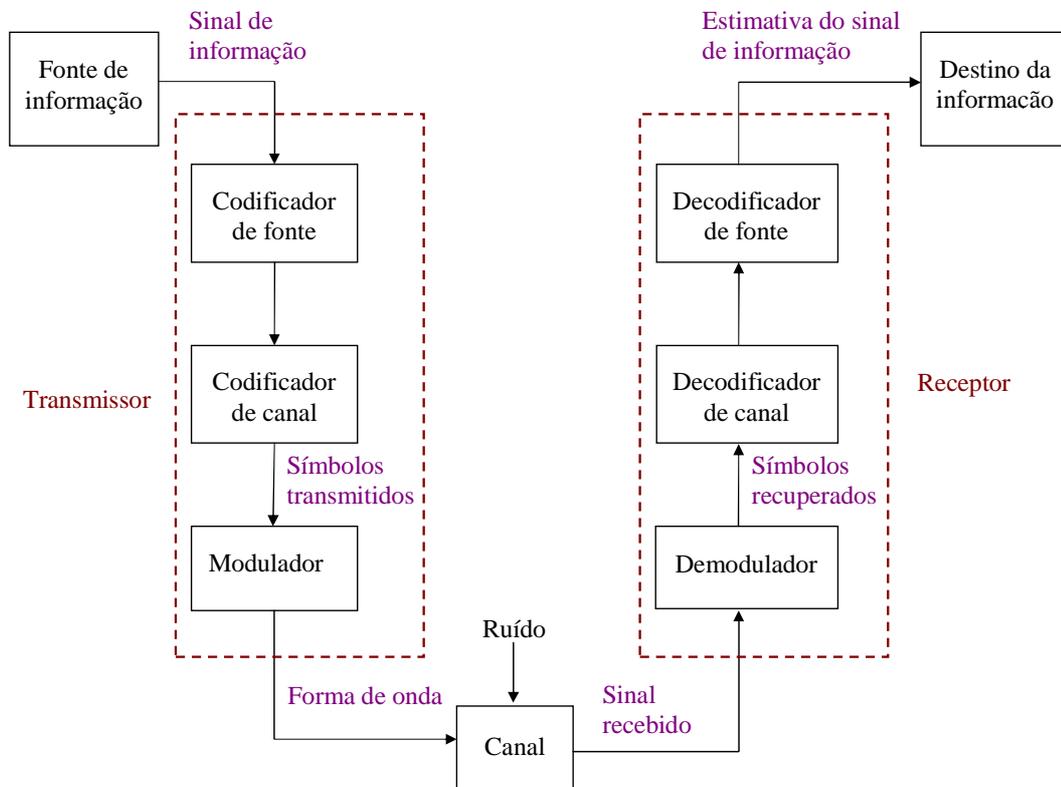


Figura 1.2: Diagrama de blocos de um sistema de comunicação.

Os elementos que compõem um sistema de comunicação são:

- **Fonte:** origem da mensagem - voz humana, imagem de televisão, dados.
- **Transdutor de entrada:** se o símbolo a ser transmitido não é elétrico, o transdutor de entrada o transforma em um. Exemplos: microfone, câmeras, etc. A forma de onda gerada é chamada de *senal em banda base* ou *senal de informação*.
- **Transmissor:** modifica o sinal em banda base buscando uma transmissão eficiente. O transmissor é constituído por um ou mais dos seguintes blocos: codificador de fonte, codificador de canal e modulador.
- **Canal:** meio pelo qual o sinal na saída do transmissor é enviado. Exemplos: par trançado, cabo coaxial, guia de ondas, fibra óptica, ar.
- **Receptor:** processa o sinal recebido do canal desfazendo as modificações feitas pelo

transmissor e pelo canal. É constituído por um ou mais dos seguintes blocos: decodificador de fonte, decodificador de canal e demodulador.

- **Destino:** unidade para a qual a mensagem é comunicada.

Problemas a serem combatidos:

- **Distorção:** mudanças sofridas pela forma de onda transmitida devido a diferentes atenuações e mudanças de fase sofridas por diferentes componentes em frequência do sinal. Por exemplo, pulso retangular é arredondado ou “espalhado” durante a transmissão (veja Figura 1.3)

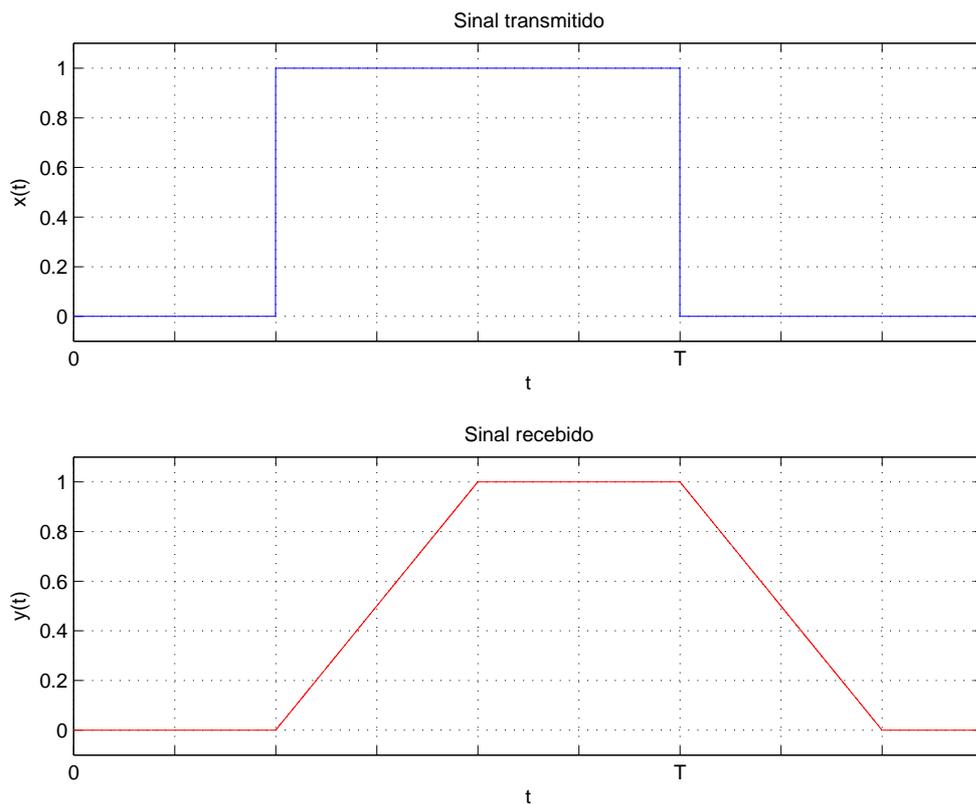


Figura 1.3: Pulso retangular distorcido por um canal média móvel.

- **Ruído:** sinais aleatórios e imprevisíveis que contaminam o sinal transmitido ao longo do canal.

O objetivo de um sistema de comunicação é transportar informações de uma fonte para um destino da forma mais eficiente possível. As distorções podem ser parcialmente corrigidas com

o uso de equalizadores que desfaçam os efeitos do canal. Já os efeitos do ruído externo podem ser minimizados com cuidados suficientes; porém, os efeitos do ruído interno ao sistema nunca podem ser totalmente eliminados. “Ruído é um dos fatores básicos que estabelecem limites na taxa de comunicação”

Desta forma, vê-se que para entender e estudar os diversos sistemas de comunicação é necessário ter um conhecimento sólido de conceitos fundamentais:

- **Sinais:** o que é um sinal? Como modelar e caracterizar matematicamente um sinal? Como medir sua intensidade?
- **Sistemas:** como um dado ente (um canal, por exemplo) modifica um sinal? Como caracterizar e estudar essas modificações?
- **Sinais aleatórios:** o que é o ruído? Existem diversas formas de ruído? Como combater seus efeitos? Como caracterizá-lo? Como operar com quantidades definidas apenas em termos estatísticos?

São exatamente estas questões que serão abordadas nos Capítulos 1 e 2 antes da abordagem dos sistemas de comunicação propriamente ditos que será feita no Capítulo 3.

1.2 Introdução a sinais

Definição de sinal: função (geralmente do tempo) que carrega algum tipo de informação.

Exemplos:

1. variação da temperatura da sala durante um dia (Figura 1.4).

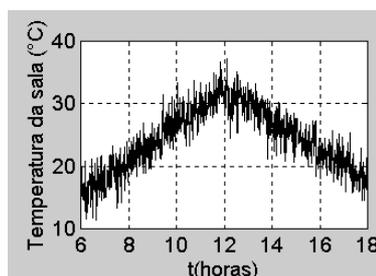


Figura 1.4: Variação da temperatura de uma sala.

2. Sinal de voz (Figura 1.5).

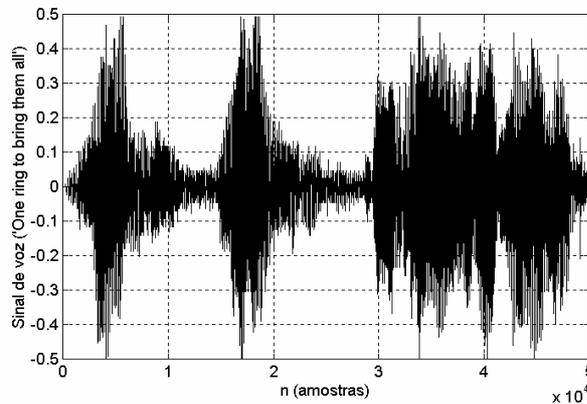


Figura 1.5: Exemplo de sinal de voz.

3. Número de e-mails que chegam a sua caixa de entrada verificada a cada meia hora. (Figura 1.6).

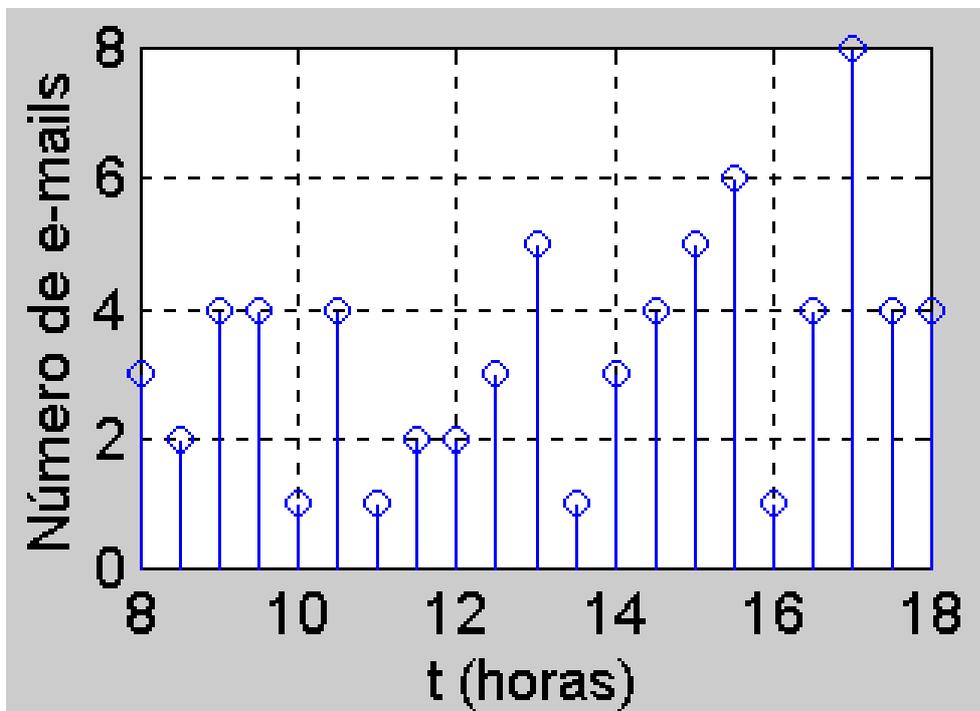


Figura 1.6: Exemplo de sinal de tempo discreto.

Definição de sistemas: ente que processa um sinal de entrada $x(t)$ e gera um sinal de saída $y(t)$ (Figura 1.7). Este sistema é representado matematicamente como $y(t) = H[x(t)]$.

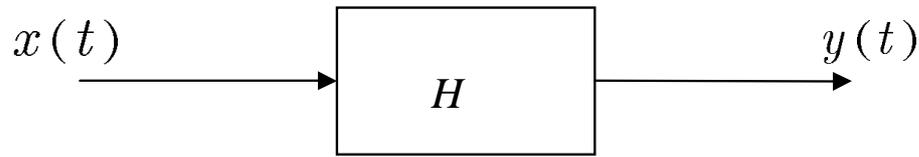


Figura 1.7: Sistema com uma entrada $x(t)$ e uma saída $y(t)$.

1.2.1 Medindo um sinal: energia e potência

A medida de um dado ente é um número que indica a grandeza ou força deste ente. Como medir um sinal? A forma utilizada para se medir um sinal é através de sua energia ou potência.

Como motivação para definição dessas grandezas, considere-se o caso de circuitos elétricos: neste caso, um sinal pode representar uma tensão ou uma corrente. Considere uma tensão $v(t)$ aplicada a um resistor R , produzindo uma corrente $i(t)$. A potência dissipada no resistor é dada por:

$$p(t) = \frac{v^2(t)}{R} \quad \text{ou} \quad p(t) = Ri^2(t). \quad (1.1)$$

Assim, a potência instantânea $p(t)$ é proporcional à amplitude do sinal elevada ao quadrado. Além do mais, para $R = 1\Omega$, a potência $p(t)$ é exatamente igual à amplitude ao quadrado do sinal. Baseando-se nisso, em comunicações, costuma-se definir a potência instantânea de um sinal $g(t)$ como:

$$p_g(t) = g^2(t). \quad (1.2)$$

Lembrando que a energia é o produto da potência pelo tempo, costuma-se definir a *energia* do sinal real $g(t)$ como:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt. \quad (1.3)$$

Também definimos a *potência média* de um sinal como:

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt. \quad (1.4)$$

Para sinais periódicos, pode-se calcular a potência média tomando-se a média apenas num

período ao invés de considerar-se todo o eixo dos tempos. Para um sinal periódico de período fundamental T , tem-se

$$P_g = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g^2(t) dt. \quad (1.5)$$

A raiz quadrada da potência média P_g é chamada de *valor eficaz* ou rms (*root-mean-square*) do sinal $g(t)$.

Se $g(t)$ for limitado e tiver duração finita, $P_g = 0$ e sua energia deve ser usada como medida. Se $g(t)$ for periódico ou tiver uma regularidade estatística, então $E_g = \infty$ e sua potência média deve ser usada como medida.

Um sinal com energia positiva e finita é chamado de *sinal de energia* e um sinal com potência positiva e finita é um *sinal de potência*.

Observação: caso $g(t)$ seja complexo, as Equações (1.3), (1.4) e (1.5) devem ser substituídas por:

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt. \quad (1.6)$$

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt. \quad (1.7)$$

$$P_g = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt. \quad (1.8)$$

respectivamente

Exercícios

- (LATHI, 1998a) Determine a medida adequada para os sinais da Figura 1.8.
- (LATHI, 1998a) Determine a potência e o valor rms de:

(a) $g(t) = C \cos(\omega_0 t + \theta)$

(b) $g(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2)$, $\omega_1 \neq \omega_2$

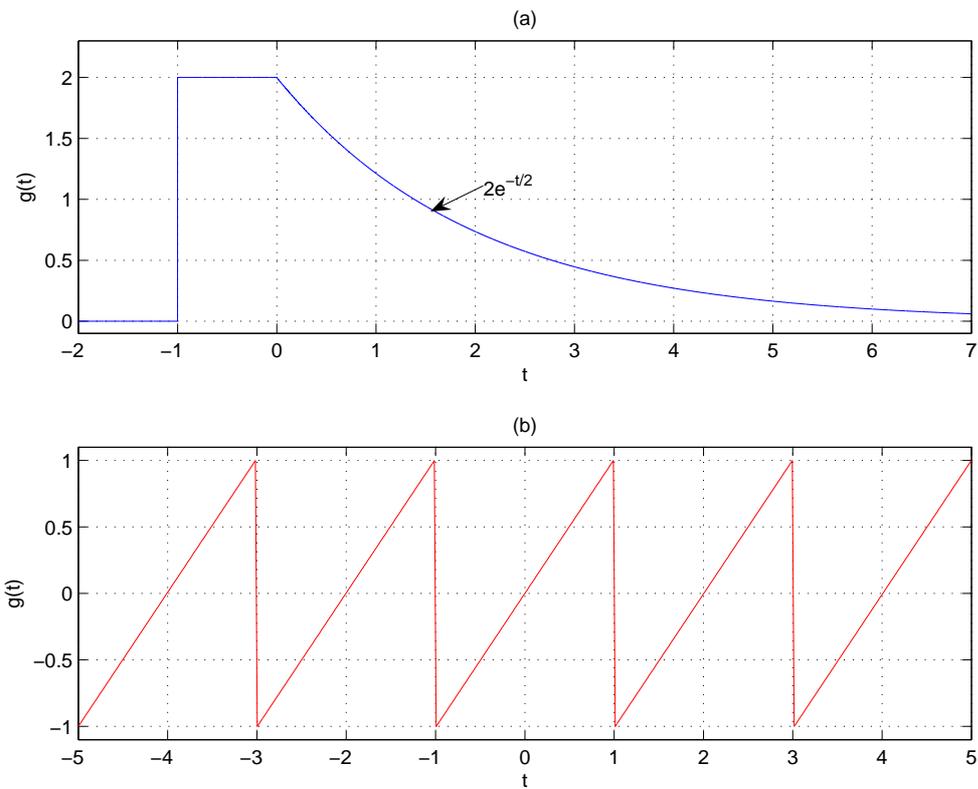


Figura 1.8: Sinais do Exercício 1.

$$(c) \quad g(t) = D e^{j\omega_0 t}$$

1.2.2 Algumas operações úteis com sinais

Como sinais são funções matemáticas, podem ser operadas como tal. Resolva os seguintes exercícios.

Exercícios

3. (LATHI, 1998a) As Figuras 1.9(a) e (b) mostram os sinais $g(t)$ e $z(t)$ respectivamente.

Esboce (a) $g(3t)$ e (b) $z\left(\frac{t}{2}\right)$.

4. Para o sinal $g(t)$ mostrado na Figura 1.10, esboce $g(-t)$.

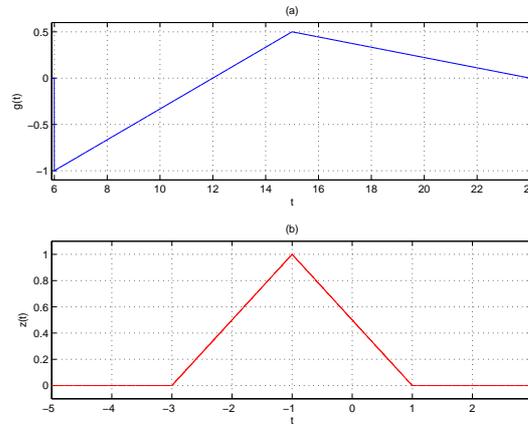


Figura 1.9: Sinais do Exercício 3.

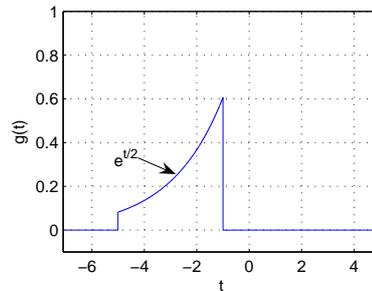


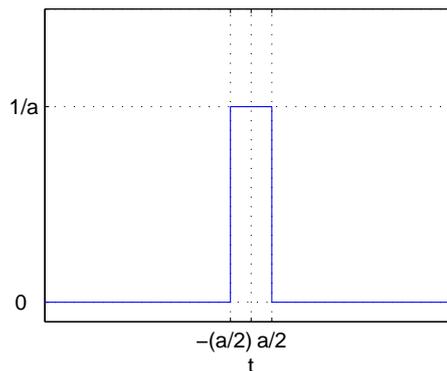
Figura 1.10: Sinal do Exercício 4.

1.2.3 A função impulso unitário $\delta(t)$

Definição:

$$\begin{cases} \delta(t) = 0, & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Pode-se visualizar um impulso como sendo um retângulo estreito e alto, como mostrado na Figura 1.11

Figura 1.11: Aproximação do impulso unitário. A função $\delta(t)$ é obtida quando $a \rightarrow 0$.

Sua largura é um número muito pequeno, a e sua altura, um número muito grande $1/a$. Assim, sua área é 1. O impulso $\delta(t)$ é obtido quando $a \rightarrow 0$.

A função $\delta(t)$ é representada como na Figura 1.12.

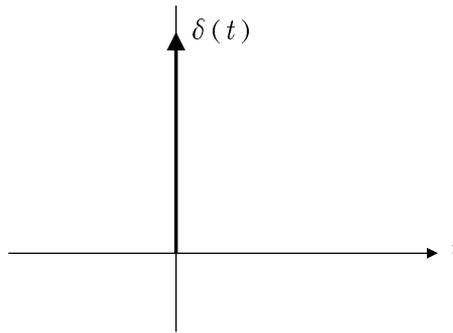


Figura 1.12: Representação gráfica do impulso $\delta(t)$.

Algumas propriedades importantes da função $\delta(t)$ são:

1. Multiplicação de uma função por um impulso

$$g(t)\delta(t) = g(0)\delta(t) \quad (1.10)$$

$$g(t)\delta(t - T) = g(T)\delta(t - T) \quad (1.11)$$

2. Propriedade da amostragem da função impulso unitário

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t) dt = g(0) \quad (1.12)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(t - T) dt = g(T) \quad (1.13)$$

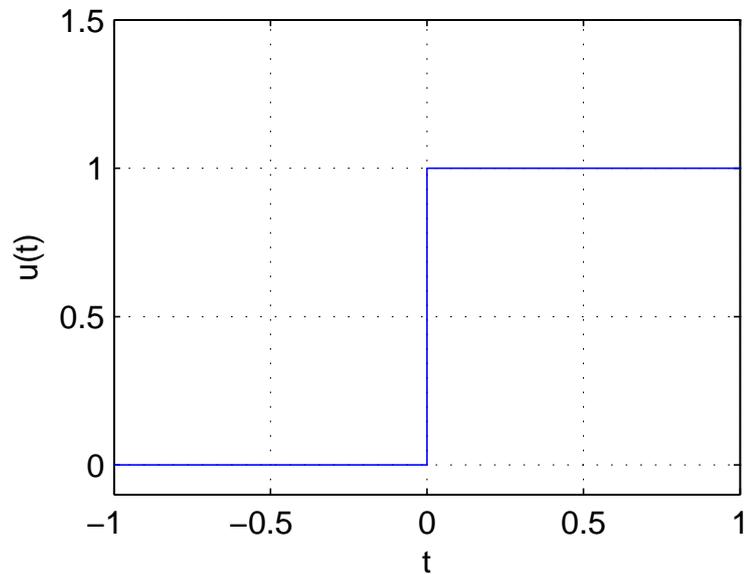
Função degrau unitário

Definição:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

Na Figura 1.13 é mostrado um gráfico de $u(t)$.

Repare que $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$.

Figura 1.13: Gráfico de $u(t)$.

Se desejar-se que um sinal comece em $t = 0$, pode-se multiplicá-lo por $u(t)$. Por exemplo, o sinal e^{-at} representa uma exponencial que começa em $t = -\infty$. Se desejar-se que ele se inicie em $t = 0$, pode-se descrevê-lo por $e^{-at}u(t)$. Um gráfico deste sinal é mostrado na Figura 1.14.

Observação: Um sinal que possui valores não-nulos apenas para $t \geq 0$ é chamado de *sinal causal*.

Exercícios

5. (LATHI, 1998a) Simplifique as seguintes expressões:

(a) $\left(\frac{\sin t}{t^2+2}\right) \delta(t)$

(b) $\left(\frac{j\omega+2}{\omega^2+9}\right) \delta(\omega)$

(c) $[e^{-t} \cos(3t - 60^\circ)] \delta(t)$

(d) $\left[\frac{\sin \frac{\pi}{2}(t-2)}{t^2+4}\right] \delta(t)$

6. (LATHI, 1998a) Calcule as seguintes integrais:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) g(t - \tau) d\tau$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt$

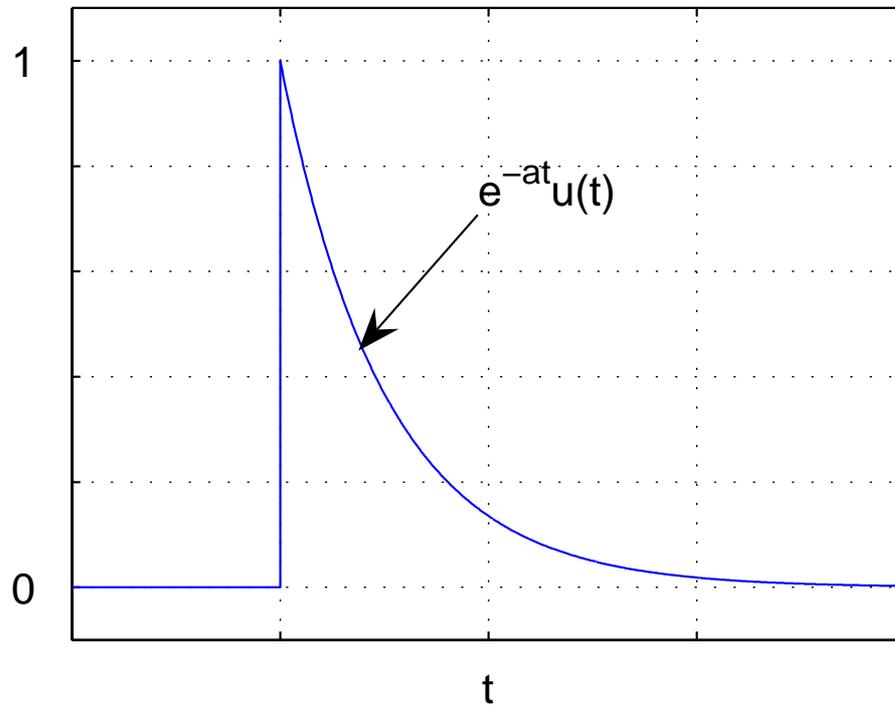


Figura 1.14: Gráfico de $e^{-at}u(t)$.

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - 2) \sin \pi t dt$

7. (LATHI, 1998a) Para a onda quadrada $g(t)$ mostrada na Figura 1.15, encontre a componente em $g(t)$ da forma $\sin(t)$. Em outras palavras, aproxime $g(t)$ em termos de $\sin(t)$

$$g(t) \approx c \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (1.15)$$

de forma que a energia do sinal de erro seja mínima.

1.2.4 Algumas funções úteis

A seguir define-se algumas funções que serão úteis ao longo do curso.

1. Função porta unitária

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, & |x| = \frac{1}{2} \\ 1, & |x| < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.16)$$

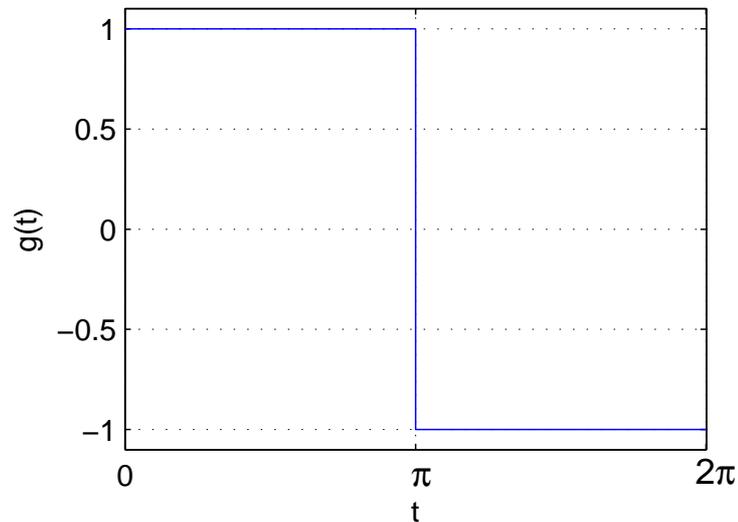
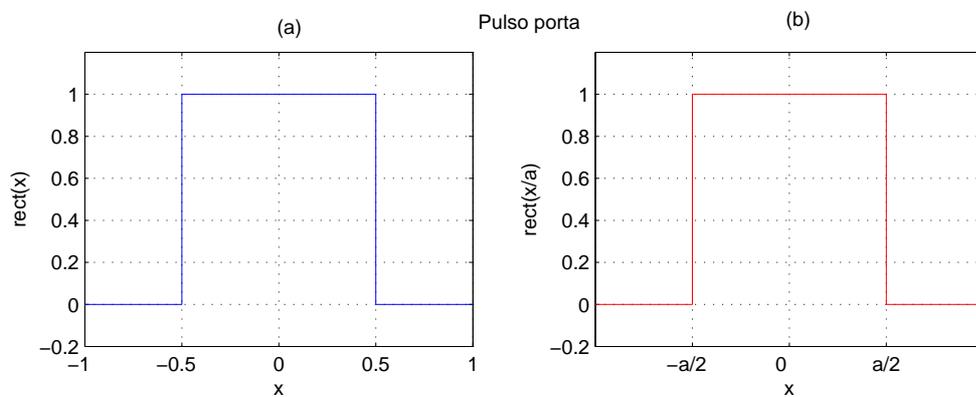


Figura 1.15: Sinal do Exercício 7.

A Figura 1.16 mostra um gráfico da função $\text{rect}(x)$ e de $\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$, uma porta de comprimento a .

Figura 1.16: Pulso porta: (a) $\text{rect}(x)$, (b) $\text{rect}\left(\frac{x}{a}\right)$.

2. Função triângulo unitário

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \frac{1}{2} \\ 1 - 2|x|, & |x| \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1.17)$$

A Figura 1.17 mostra um gráfico de $\Delta(x)$ e de $\Delta\left(\frac{x}{a}\right)$, um triângulo de largura a .

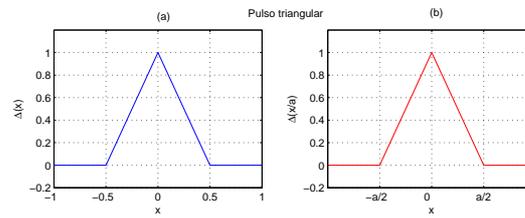


Figura 1.17: Pulso triangular: (a) $\Delta(x)$, (b) $\Delta\left(\frac{x}{a}\right)$.

3. Função de interpolação $\text{sinc}(x)$

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (1.18)$$

Algumas propriedades dessa função

- $\text{sinc}(x)$ é par
- $\text{sinc}(x) = 0$ quando $\sin x = 0$ exceto em $x = 0$ em que é indeterminada. Isto significa que $\text{sinc}(x) = 0$ para $x = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$
- Usando a regra de L'Hospital, $\text{sinc}(0) = 1$
- $\text{sinc}(x)$ exhibe oscilações periódicas de período 2π com amplitude continuamente decrescente com $\frac{1}{x}$.

Um gráfico de $\text{sinc}(x)$ é mostrado na Figura 1.18.

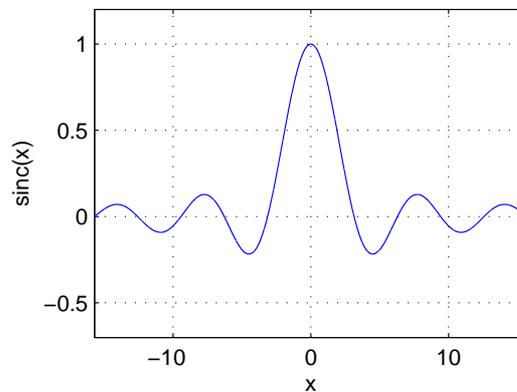


Figura 1.18: Pulso sinc.

1.2.5 Breve revisão de números complexos

Um número complexo $a + jb$ pode ser representado como um ponto cujas coordenadas cartesianas são (a, b) no plano complexo, como mostra a Figura 1.19

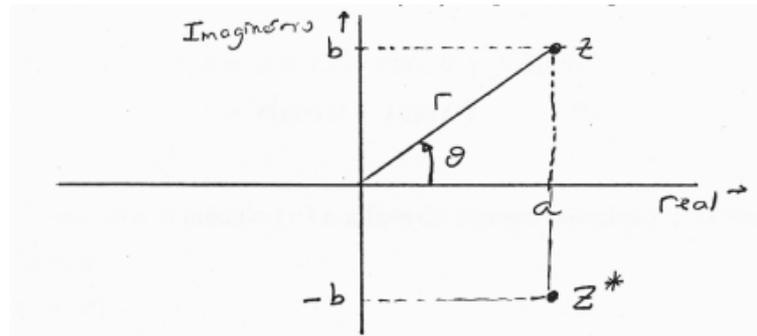


Figura 1.19: Representação do número $a + jb$ no plano complexo.

Denota-se este número por z , assim $z = a + jb$. Os números a e b são as partes *real* e *imaginária* de z respectivamente. Isso pode ser expresso por

$$\operatorname{Re}\{z\} = a \text{ e } \operatorname{Im}\{z\} = b \quad (1.19)$$

Os números complexos podem também ser expressos em termos de suas coordenadas polares. Se (r, θ) são coordenadas polares do ponto $z = a + jb$ então

$$a = r \cos(\theta) \quad (1.20)$$

$$b = r \sin(\theta) \quad (1.21)$$

e

$$z = a + jb = r \cos \theta + jr \sin \theta = r(\cos \theta + j \sin \theta) \quad (1.22)$$

O número não-negativo r é o *módulo* e θ é a *fase* do número z .

A fórmula de Euler estabelece que

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (1.23)$$

Substituindo (1.23) em (1.22), obtém-se

$$z = a + jb = re^{j\theta} \quad (1.24)$$

Assim, um número complexo pode ser expresso na forma cartesiana como $a + jb$ ou na forma polar como $re^{j\theta}$ com:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad e \quad (1.25)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right). \quad (1.26)$$

Observe que r é a distância do ponto z à origem. Por esta razão, r também é chamado de *magnitude* (ou *valor absoluto*) de z e denotado por $|z|$. Da mesma forma, θ é chamado de ângulo ou fase de z e denotado por $\angle z$. Assim,

$$|z| = r \quad (1.27)$$

e

$$z = |z|e^{j\angle z}. \quad (1.28)$$

Pode-se dizer também que

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{re^{j\theta}} = \frac{1}{r}e^{-j\theta} = \frac{1}{|z|}e^{-j\angle z}. \quad (1.29)$$

Define-se z^* , o *conjugado* de $z = a + jb$ como

$$z^* = a - jb = re^{-j\theta}. \quad (1.30)$$

A representação gráfica de um número z e o seu conjugado z^* é mostrada na Figura 1.19. Observe que z^* é uma imagem refletida de z pelo eixo horizontal. Para encontrar o conjugado de qualquer número, precisa-se apenas trocar j por $-j$ neste número (o que é o mesmo que trocar o sinal de seu ângulo).

No plano complexo, $re^{j\theta}$ representa um ponto a uma distância r da origem e a um ângulo θ do eixo horizontal, como mostrado na Figura 1.20. Por exemplo, o número -1 está a uma distância unitária da origem e tem um ângulo de π ou $-\pi$ (de fato qualquer múltiplo ímpar

de $\pm\pi$) como mostrado na mesma figura.

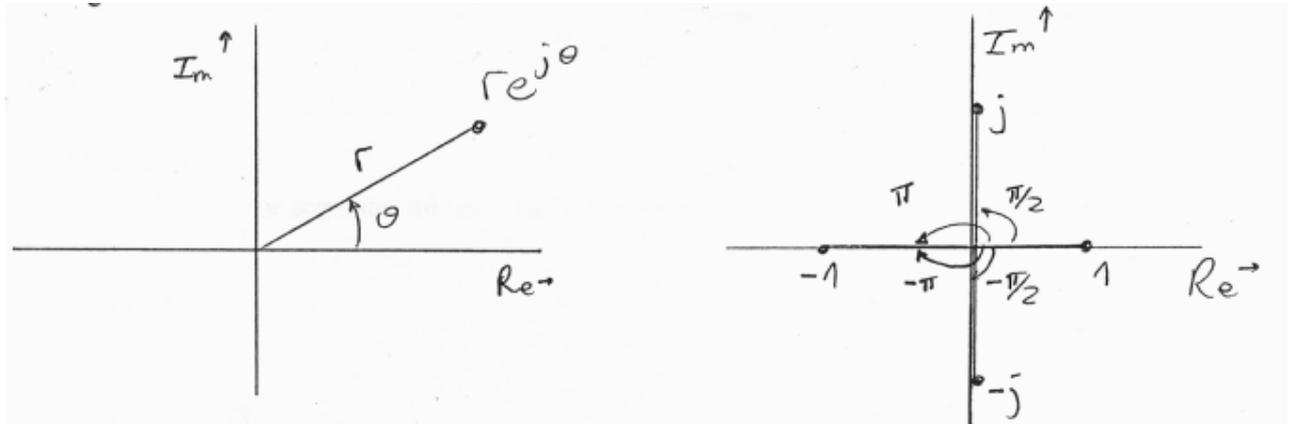


Figura 1.20: Representação polar de números complexos.

Assim,

$$e^{\pm j\pi} = -1. \quad (1.31)$$

De fato,

$$e^{jk\pi} = -1, \quad (1.32)$$

com k inteiro ímpar.

O número 1, por outro lado, está também a uma distância unitária da origem, mas tem um ângulo de 2π (na verdade, $\pm 2k\pi$ para qualquer valor inteiro de k). Assim,

$$e^{\pm j2k\pi} = 1, \quad (1.33)$$

com k inteiro.

O número j está a uma distância unitária da origem e seu ângulo é $\frac{\pi}{2}$. Assim,

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j. \quad (1.34)$$

Da mesma forma,

$$e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j. \quad (1.35)$$

Assim,

$$e^{\pm j\frac{\pi}{2}} = \pm j. \quad (1.36)$$

Exercícios

8. Calcule e escreva os seguintes números na forma polar:

(a) $2 + j3$

(b) $-2 + j1$

9. Represente os seguintes números no plano complexo e expresse-os em forma cartesiana.

(a) $2e^{j\frac{\pi}{3}}$

(b) $2e^{j\frac{\pi}{2}}$

1.2.6 Representação de sinais por conjuntos de sinais ortogonais

Da mesma forma como representa-se vetores no espaço por projeções em sistemas de eixos ortogonais (coordenadas), pode-se fazê-lo também com sinais.

Dois sinais $x_m(t)$ e $x_n(t)$ são ditos *ortogonais* num intervalo $[t_1, t_2]$ se

$$\int_{t_1}^{t_2} x_m(t)x_n^*(t) dt = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ E_n, & m = n \end{cases}. \quad (1.37)$$

Considerando-se um conjunto de sinais ortogonais $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots$ completo¹ então para um sinal qualquer $g(t)$ num intervalo $[t_1, t_2]$ (LATHI, 1998a),

$$g(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \dots + c_nx_n(t) + \dots \quad (1.38)$$

¹Completividade aqui significa que é impossível encontrar outro sinal $x_0(t)$ que seja ortogonal a $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots$

em que

$$c_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x_n^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x_n^2(t)dt} = \frac{1}{E_n} \int_{t_1}^{t_2} g(t)x_n^*(t)dt. \quad (1.39)$$

A série do membro direito de (1.38) é chamada de *série de Fourier generalizada* de $g(t)$ com relação ao conjunto $\{x_n(t)\}$.

A igualdade na Eq. (1.38) significa que a energia do erro, isto é, a energia da diferença entre os dois membros da equação se aproxima de zero.

Exemplos de conjuntos de sinais ortogonais são: funções trigonométricas, exponenciais, funções de Walsh, funções de Bessel, polinômios de Legendre, polinômios de Laguerre, entre outros.

1.2.7 Série de Fourier exponencial

Um conjunto $\{x_n(t)\}$ muito utilizado para representar sinais periódicos é $\{e^{jn\omega_0 t}\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Este conjunto é ortogonal sobre qualquer intervalo de duração $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

A série de Fourier exponencial de um sinal periódico $g(t)$ com período T_0 é dada por

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}. \quad (1.40)$$

Usando a Eq.(1.39), pode-se mostrar que os coeficientes D_n são dados por (LATHI, 1998a)

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t)e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (1.41)$$

Repare que para $g(t)$ real, $D_{-n} = D_n^*$.

O *espectro* de um sinal são gráficos de $|D_n|$ e de $\angle D_n$ em função de ω .

O espectro de um sinal é a sua *descrição no domínio da frequência*.

Exercícios

10. (LATHI, 1998a) Encontre a série de Fourier exponencial para o sinal da Figura 1.21

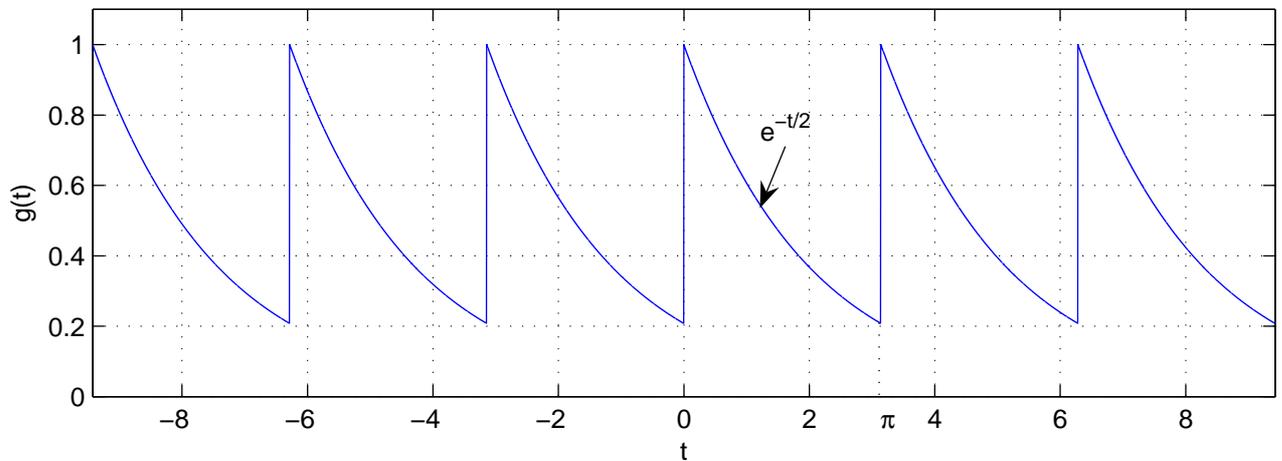


Figura 1.21: Sinal periódico do Exercício 10.

11. (LATHI, 1998a) Encontre a série de Fourier exponencial para a forma de onda periódica $g(t)$ da Figura 1.22.

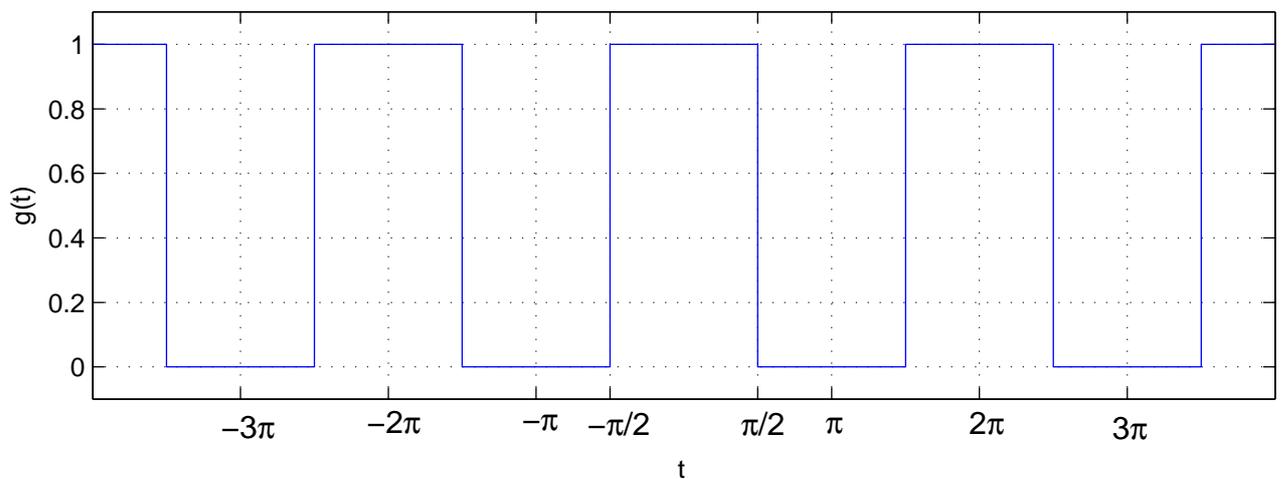


Figura 1.22: Sinal periódico do Exercício 11.

12. (LATHI, 1998a) Encontre a série de Fourier exponencial e esboce o correspondente espectro para o trem de impulsos $\delta_{T_0}(t)$ mostrado na Figura 1.23.

Teorema de Parseval O teorema de Parseval para a série de Fourier trigonométrica afirma que a potência de um sinal $g(t)$ periódico pode ser calculada por

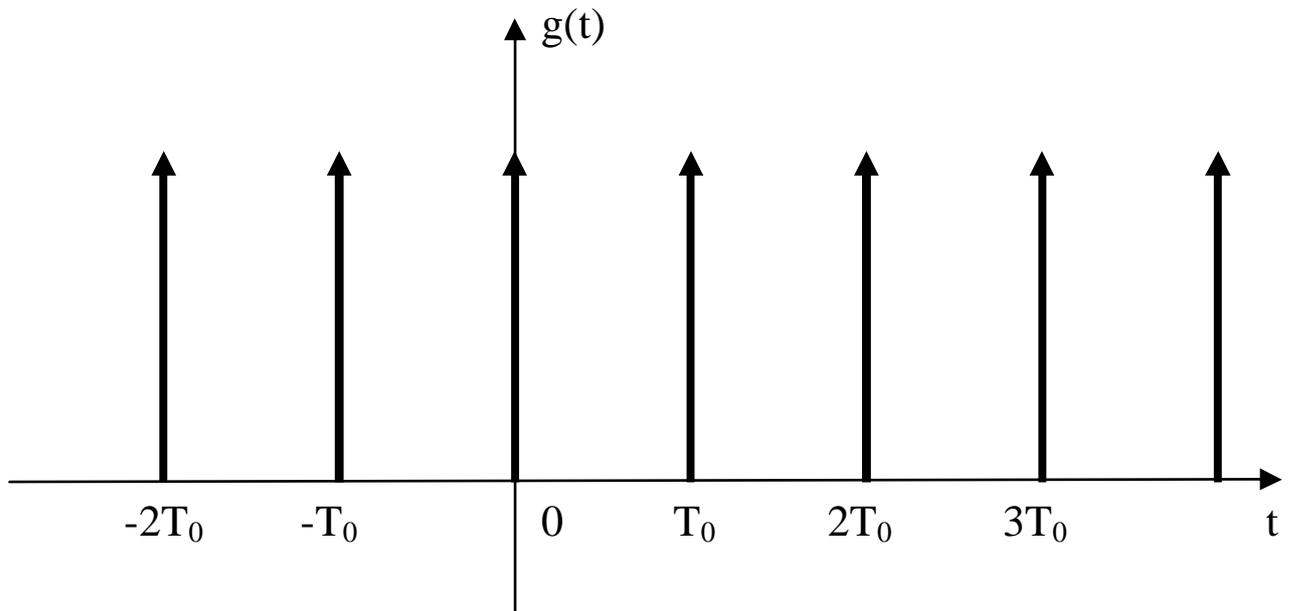


Figura 1.23: Trem de impulsos.

$$P_g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |D_n|^2. \quad (1.42)$$

1.3 Análise e transmissão de sinais

1.3.1 Representação de sinais aperiódicos pela integral de Fourier

Um sinal aperiódico $g(t)$ pode ser visto como caso limite em que $T_0 \rightarrow \infty$ ou $\omega_0 \rightarrow 0$. Neste caso, a somatório da série de Fourier torna-se uma integral e

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.43)$$

com

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (1.44)$$

O par $g(t)$ e $G(\omega)$ é chamado de par transformado e é representado de forma simbólica por

$$G(\omega) = \mathfrak{F}[g(t)] \quad e \quad g(t) = \mathfrak{F}^{-1}[G(\omega)] \quad (1.45)$$

ou

$$g(t) \Leftrightarrow G(\omega) \quad (1.46)$$

Propriedade da simetria conjugada. O espectro $G(\omega)$ é complexo e pela Eq. (1.44):

$$G(-\omega) = G^*(\omega) \quad (1.47)$$

$$|G(-\omega)| = |G(\omega)| \quad (1.48)$$

$$\angle G(-\omega) = -\angle G(\omega) \quad (1.49)$$

Assim, o espectro de amplitude $|G(\omega)|$ é uma função par e o espectro de fase $\angle G(\omega)$ é uma função ímpar para $g(t)$ real.

A Figura 1.24 (LATHI, 1998a) mostra uma tabela dos principais pares transformados. Todos podem ser diretamente deduzidos a partir da definição (1.44).

Um conjunto de propriedades das transformadas de Fourier é mostrada na tabela da Figura 1.25 (LATHI, 1998a). As demonstrações são deixadas como exercício (LATHI, 1998a).

Exercícios

13. (LATHI, 1998a) Encontre a transformada de Fourier de $g(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$.
14. (LATHI, 1998a) Encontre a transformada de Fourier do impulso unitário $\delta(t)$.
15. (LATHI, 1998a) Encontre a transformada de Fourier inversa de $\delta(\omega)$.
16. (LATHI, 1998a) Encontre a transformada de Fourier inversa de $\delta(\omega - \omega_0)$.
17. (LATHI, 1998a) Encontre a transformada de Fourier de $\cos \omega_0 t$.

Short Table of Fourier Transforms

| | $g(t)$ | $G(\omega)$ | |
|----|---|--|-----------------------------|
| 1 | $e^{-at}u(t)$ | $\frac{1}{a + j\omega}$ | $a > 0$ |
| 2 | $e^{at}u(-t)$ | $\frac{1}{a - j\omega}$ | $a > 0$ |
| 3 | $e^{-a t }$ | $\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$ | $a > 0$ |
| 4 | $te^{-at}u(t)$ | $\frac{1}{(a + j\omega)^2}$ | $a > 0$ |
| 5 | $t^n e^{-at}u(t)$ | $\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$ | $a > 0$ |
| 6 | $\delta(t)$ | 1 | |
| 7 | 1 | $2\pi\delta(\omega)$ | |
| 8 | $e^{j\omega_0 t}$ | $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ | |
| 9 | $\cos \omega_0 t$ | $\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$ | |
| 10 | $\sin \omega_0 t$ | $j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$ | |
| 11 | $u(t)$ | $\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$ | |
| 12 | $\text{sgn } t$ | $\frac{2}{j\omega}$ | |
| 13 | $\cos \omega_0 t u(t)$ | $\frac{\pi}{2}[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ | |
| 14 | $\sin \omega_0 t u(t)$ | $\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$ | |
| 15 | $e^{-at} \sin \omega_0 t u(t)$ | $\frac{\omega_0}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$ | $a > 0$ |
| 16 | $e^{-at} \cos \omega_0 t u(t)$ | $\frac{a + j\omega}{(a + j\omega)^2 + \omega_0^2}$ | $a > 0$ |
| 17 | $\text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)$ | $\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ | |
| 18 | $\frac{W}{\pi} \text{sinc}(Wt)$ | $\text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$ | |
| 19 | $\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$ | $\frac{\tau}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$ | |
| 20 | $\frac{W}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{Wt}{2}\right)$ | $\Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$ | |
| 21 | $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$ | $\omega_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0)$ | $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ |
| 22 | $e^{-t^2/2\sigma^2}$ | $\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$ | |

Figura 1.24: Pares transformados importantes (LATHI, 1998a).

| Fourier Transform Operations | | |
|------------------------------|----------------------------|--|
| Operation | $g(t)$ | $G(\omega)$ |
| Addition | $g_1(t) + g_2(t)$ | $G_1(\omega) + G_2(\omega)$ |
| Scalar multiplication | $kg(t)$ | $kG(\omega)$ |
| Symmetry | $G(t)$ | $2\pi g(-\omega)$ |
| Scaling | $g(at)$ | $\frac{1}{ a } G\left(\frac{\omega}{a}\right)$ |
| Time shift | $g(t - t_0)$ | $G(\omega)e^{-j\omega t_0}$ |
| Frequency shift | $g(t)e^{j\omega_0 t}$ | $G(\omega - \omega_0)$ |
| Time convolution | $g_1(t) * g_2(t)$ | $G_1(\omega)G_2(\omega)$ |
| Frequency convolution | $g_1(t)g_2(t)$ | $\frac{1}{2\pi} G_1(\omega) * G_2(\omega)$ |
| Time differentiation | $\frac{d^n g}{dt^n}$ | $(j\omega)^n G(\omega)$ |
| Time integration | $\int_{-\infty}^t g(x) dx$ | $\frac{G(\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$ |

Figura 1.25: Propriedades da Transformada de Fourier (LATHI, 1998a).

18. (LATHI, 1998a) Encontre a transformada de Fourier da função $\text{sgn}(t)$. A definição desta função é:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases} \quad (1.50)$$

19. (LATHI, 1998a) Mostre que

$$g(-t) \Leftrightarrow G(-\omega) \quad (1.51)$$

Usando este resultado e o fato de que $e^{-at}u(t) \Leftrightarrow \frac{1}{a+j\omega}$, encontre a transformada de Fourier de $e^{at}u(-t)$ e de $e^{-a|t|}$.

1.3.2 Sistemas LIT - a integral de convolução

Na Seção 1.2, página 6, já foi discutido o conceito de sistema. Foi visto que um sistema é uma *interconexão de operações* que transforma um ou mais sinais de entrada em um ou mais sinais de saída (HAYKIN; VAN VEEN, 2001).

Matematicamente, um sistema é expresso por um operador. Por exemplo, para informar que um sinal $y(t)$ é a saída de um sistema H cuja entrada é $x(t)$ escreve-se

$$y(t) = H[x(t)]. \quad (1.52)$$

A Figura 1.26 representa esta situação.

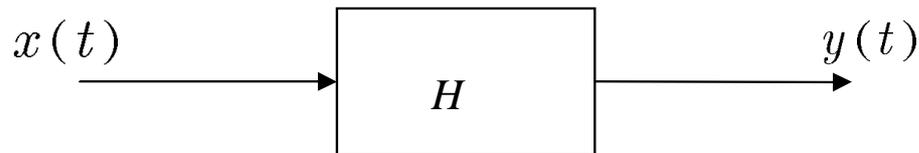


Figura 1.26: Sistema com uma entrada $x(t)$ e uma saída $y(t)$.

Classificações de sistemas

Memória

Diz-se que um sistema possui *memória* se sua saída depende de valores passados ou futuros do sinal de entrada. A extensão temporal de valores passados dos quais a saída depende define quão longe a memória se estende no passado (HAYKIN; VAN VEEN, 2001).

Em contrapartida, diz-se que um sistema é *sem memória* se seu sinal de saída depende somente do valor presente do sinal de entrada.

Por exemplo, um resistor é *sem memória*, uma vez que a corrente $i(t)$ que flui através dele em resposta à tensão aplicada $v(t)$ é definida por

$$i(t) = \frac{1}{R}v(t) \quad (1.53)$$

em que R é a resistência do resistor. Por outro lado, um indutor tem memória, uma vez que a corrente $i(t)$ é dada por

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau. \quad (1.54)$$

Assim, é necessário o conhecimento de todos os valores anteriores da tensão para o cálculo da corrente.

Causalidade

Diz-se que um sistema é causal se o valor atual do sinal de saída depender somente dos valores presentes ou passados do sinal de entrada. Em contrapartida, o sinal de saída de um sistema *não-causal* depende de valores futuros do sinal de entrada.

Por exemplo, um sistema com relação entrada-saída

$$y(t) = x(t) + x(t - 1) \quad (1.55)$$

é causal. Por outro lado, o sistema descrito por

$$y(t) = x(t) + x(t + 1) \quad (1.56)$$

é não-causal.

Invariância no tempo

Diz-se que um sistema é *invariante no tempo* se um retardo de tempo ou avanço de tempo do sinal de entrada levar a um deslocamento idêntico no sinal de saída. Isto implica que um sistema invariante no tempo reage de maneira idêntica, não importa quando o sinal de entrada é aplicado.

Dizendo com outras palavras, as características de um sistema invariante no tempo não se modificam com o tempo. Caso contrário, diz-se que o sistema é variante no tempo.

Para um sistema H invariante no tempo, pode-se escrever que se $H[x(t)] = y(t)$ então $H[x(t - T)] = y(t - T)$, qualquer que seja T .

Por exemplo, o sistema $y(t) = 2x(t - 1)$ é invariante no tempo. Já o sistema $y(t) = tx(t)$ é variante no tempo.

Linearidade

Dizemos que um sistema é *linear* quando são válidos os princípios da superposição e da homogeneidade explicados a seguir. Caso contrário, o sistema é *não-linear*.

Princípio da superposição

Seja um sistema $y(t) = H[x(t)]$ e sejam $y_1(t)$ a resposta à entrada $x_1(t)$ e $y_2(t)$ a resposta à entrada $x_2(t)$. Um sistema satisfaz o princípio da superposição se, quando aplica-se a ele a entrada $x_s(t) = x_1(t) + x_2(t)$, sua saída é $y_s(t) = y_1(t) + y_2(t)$.

Princípio da homogeneidade

Seja um sistema $y(t) = H[x(t)]$ e seja $y_1(t)$ a resposta à entrada $x_1(t)$. Um sistema satisfaz o princípio da homogeneidade se quando aplicamos a ele a entrada $x_H(t) = ax_1(t)$, $a \in \mathbb{R}$, sua saída é $y_H(t) = ay_1(t)$.

Assim, para verificar se um sistema é linear, é necessário testar as duas condições acima.

Os sistemas que são ao mesmo tempo Lineares e Invariantes no Tempo formam uma classe de sistemas muito especial conhecida como sistemas LIT ou LTI (*Linear Time Invariant*), em inglês.

Exercício

20. Um sistema linear e invariante no tempo tem a resposta à entrada $x(t) = \delta(t)$ (resposta impulsiva) indicada na Figura 1.27. Faça um esboço da saída $y(t)$ deste sistema quando a entrada é:

(a) $x(t) = 3\delta(t)$

(b) $x(t) = \delta(t - 2)$

(c) $x(t) = 2\delta(t) + 0,5\delta(t - 1)$

A integral de convolução

Os sistemas mais utilizados em quase todas as áreas da Engenharia são os sistemas LIT. O principal motivo para esta preferência é que este tipo de sistema fica totalmente caracterizado pela sua resposta impulsiva, ou seja, pela saída do sistema quando colocamos em sua entrada

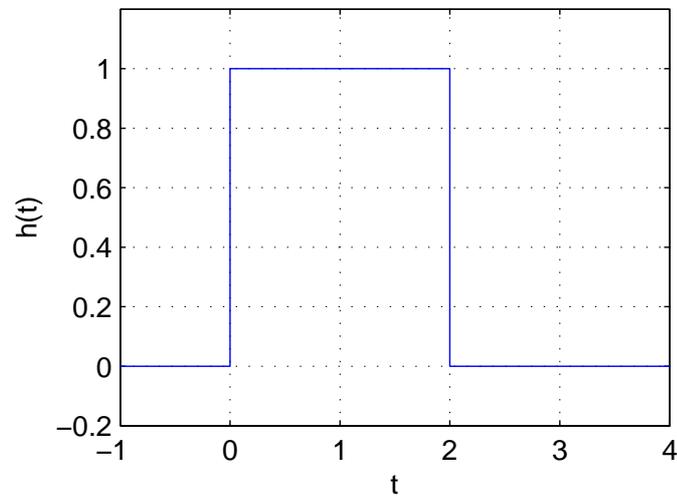


Figura 1.27: Resposta impulsiva de um sistema LIT.

o sinal impulso unitário $\delta(t)$. Em outras palavras, se sabe-se a resposta de um sistema LIT a uma entrada impulsiva, consegue-se calcular sua resposta a qualquer entrada.

Veja, por exemplo, o que ocorreu no Exercício 20.

Qualquer sinal pode ser descrito como uma superposição ponderada de impulsos deslocados no tempo:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad (1.57)$$

Analisa-se agora a saída de um sistema LIT a uma entrada $x(t)$ descrita pela Eq. (1.57). Denota-se por H o operador que representa a operação realizada por este sistema e por $h(t)$ a resposta deste sistema a um impulso, ou seja,

$$y(t) = H[x(t)] \quad (1.58)$$

$$h(t) = H[\delta(t)]. \quad (1.59)$$

Sendo assim, para uma entrada qualquer $x(t)$, pode-se escrever usando as Eqs. (1.57-1.59) que

$$y(t) = H[x(t)] = H\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right]. \quad (1.60)$$

Levando-se em conta que o sistema é linear, pode-se aplicar a superposição e a homogeneidade para passar o operador para dentro da integral. Obtém-se assim

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H[\delta(t-\tau)]d\tau. \quad (1.61)$$

e, como o sistema é invariante no tempo, tem-se

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (1.62)$$

Desta forma, a resposta de um sistema LIT qualquer é dada por uma soma ponderada de respostas impulsivas deslocadas no tempo. Ou seja, ela é totalmente descrita pela entrada e pela resposta impulsiva.

A integral da Eq. (1.62) é chamada de *integral de convolução* e representada pelo símbolo $*$, ou seja,

$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (1.63)$$

A Figura 1.28 (HAYKIN; VAN VEEN, 2001) ilustra o processo de convolução. A parte (a) descreve a resposta ao impulso de um sistema LIT arbitrário. Na parte (b) a entrada é representada como uma integral de impulsos ponderados e deslocados no tempo $p_{\tau}(t) = x(\tau)\delta(t-\tau)$. A saída do sistema associada a cada impulso $p_{\tau}(t)$ é

$$v_{\tau}(t) = x(\tau)h(t-\tau). \quad (1.64)$$

Ou seja, $v_{\tau}(t)$ é obtida deslocando-se, no tempo, a resposta impulsiva de τ unidades e multiplicando-a por $x(\tau)$. A saída $y(t)$ à entrada $x(t)$ é obtida integrando-se os sinais $v_{\tau}(t)$,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_{\tau}(t)d\tau. \quad (1.65)$$

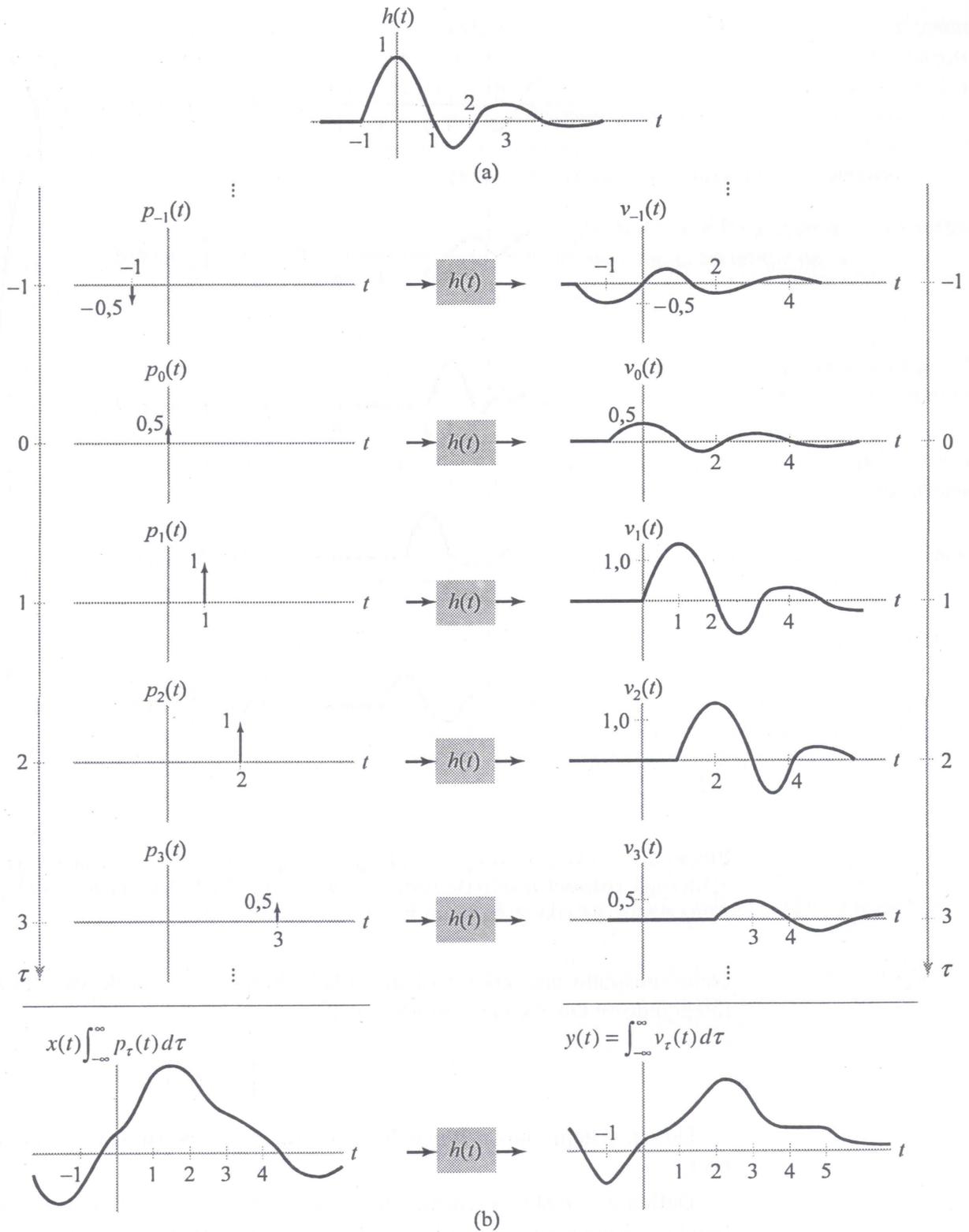


Figura 1.28: Ilustração da integral de convolução (HAYKIN; VAN VEEN, 2001).

Na prática, adota-se o seguinte procedimento para calcular $x(t) * h(t)$ (HAYKIN; VAN VEEN, 2001):

1. Trace $x(\tau)$ e $h(t - \tau)$ com uma função da variável independente τ . Para obter $h(t - \tau)$, reflita $h(\tau)$ em torno de $\tau = 0$ para obter $h(-\tau)$ e depois desloque $h(-\tau)$ no tempo de $-t$.
2. Inicie com o deslocamento no tempo T grande e negativo.
3. Escreva a forma funcional para $w_t(\tau) = x(\tau)h(t - \tau)$
4. Aumente o deslocamento de tempo t até que a forma funcional para $w_t(\tau)$ se modifique. O valor t , no qual a mudança ocorre, define o fim do intervalo corrente e o início de um novo intervalo.
5. Admitindo que t esteja no novo intervalo, repita os passos 3 e 4 até que todos os intervalos de deslocamentos de tempo t e as formas funcionais correspondentes para $w_i(\tau)$ sejam identificados. Isto normalmente implica aumentar t até um valor grande e positivo.
6. Para cada intervalo de deslocamento e tempo t , integre $w_t(\tau)$ de $\tau = -\infty$ a $\tau = \infty$ para obter $y(t)$ nesse intervalo.

A Figura 1.29 ilustra um exemplo de cálculo de convolução para $x(t) = u(t) - u(t - 3)$ e $h(t) = u(t) - u(t - 2)$.

Exercício

21. (HAYKIN; VAN VEEN, 2001) Suponha que a entrada $x(t)$ e a resposta ao impulso $h(t)$ de um sistema LIT sejam dadas por

$$x(t) = 2u(t - 1) - 2u(t - 3) \quad (1.66)$$

$$h(t) = u(t + 1) - 2u(t - 1) + u(t - 3) \quad (1.67)$$

Encontre a saída deste sistema.

-
22. (HAYKIN; VAN VEEN, 2001) Calcule a soma de convolução $y(t) = e^{-2t}u(t) * u(t + 2)$.

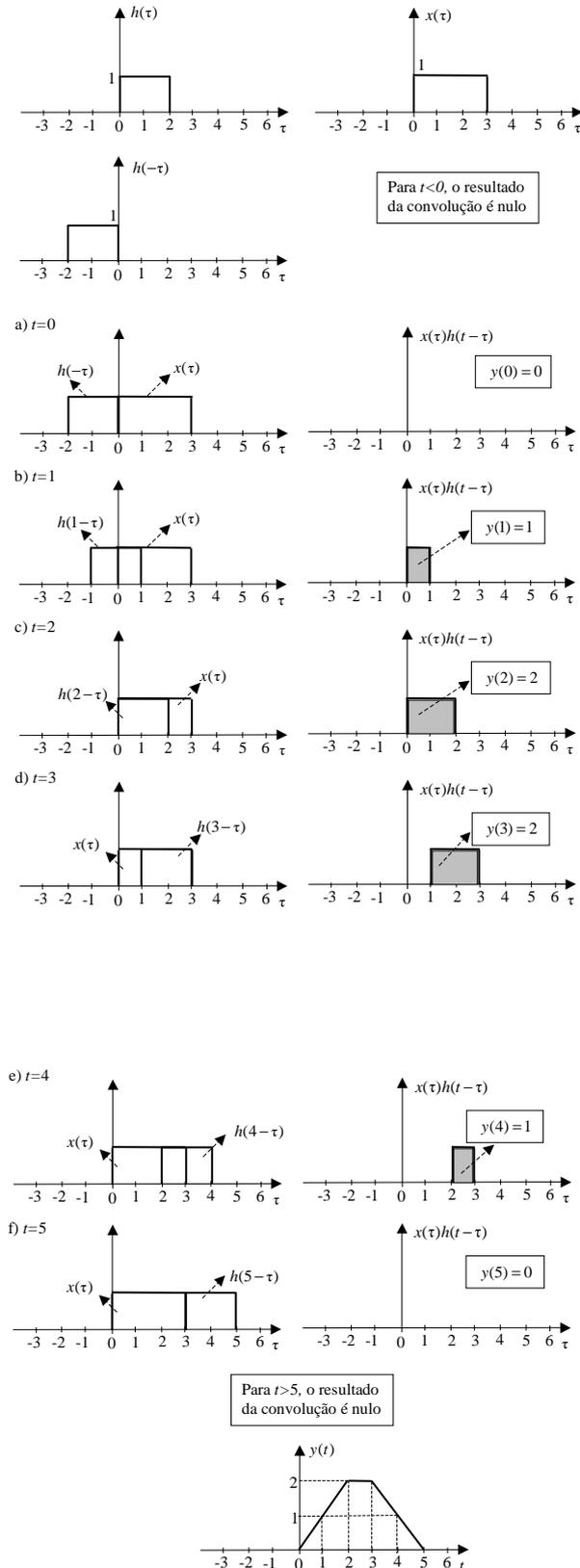


Figura 1.29: Exemplo gráfico do cálculo da convolução $y(t) = x(t) * h(t)$.

Capítulo 2

Probabilidades e processos estocásticos

Neste segundo capítulo, trata-se dos fenômenos que não podem ser representados de forma determinística mas apenas em termos de estatísticas. Dentre estes, destaca-se o ruído que é um limitante para qualquer sistema de comunicações, como foi discutido no capítulo anterior.

Define-se um *sinaleatório* ou *randômico* como uma forma de onda que pode ser caracterizada apenas de uma maneira probabilística. Em geral, pode ser uma forma de onda desejada ou não.

Alguns exemplos:

- O ruído de fundo ouvido quando escutamos uma rádio. A forma de onda causadora do ruído, se observada em um osciloscópio, aparece como uma tensão flutuando de forma aleatória com o tempo. Ela é indesejável já que interfere com nossa habilidade de ouvir o programa de rádio e é chamada de *ruído*.
- Num sistema de televisão, o ruído aparece na forma de interferência de imagem, frequentemente chamada de “snow”.
- Num sistema sonar, sons do mar gerados de forma aleatória geram ruídos que interferem com os ecos desejados.
- Bits em uma comunicação entre computadores parecem flutuar de forma aleatória com o tempo entre os níveis 0 e 1 gerando um sinal aleatório.

- A saída de tensão de um gerador eólico é aleatória por causa da variação randômica da velocidade do vento.
- A tensão de um detector solar varia de forma aleatória devido à imprevisibilidade das condições das nuvens e do tempo.
- A tensão de um analisador de vibração acoplado a um carro dirigido sobre um terreno irregular.

Para definir precisamente as características de um sinal aleatório precisamos dos conceitos da teoria das probabilidades.

2.1 Probabilidades

Começa-se o estudo dos processos aleatórios introduzindo a teoria axiomática das probabilidades. Para isso, precisa-se da Teoria dos Conjuntos.

2.1.1 Definições de conjuntos

Um *conjunto* é uma coleção de objetos. Os objetos são chamados de *elementos* do conjunto.

Existem dois modos para especificar os elementos de um conjunto:

- método tabular - todos os elementos são enumerados explicitamente. Exemplo: {6; 7; 8; 9}.
- método da regra - o conteúdo do conjunto é determinado por uma regra. Exemplo: {inteiros entre 5 e 10}.

Algumas definições:

- **Conjunto enumerável** - seus elementos podem ser postos em correspondência 1-a-1 (biunívoca) com os números naturais. Caso contrário é *não-enumerável*.
- **Conjunto vazio** (\emptyset) - não possui elementos.
- **Conjunto finito** - contém um número finito de elementos. Caso contrário é *infinito*.

- Conjuntos *disjuntos* ou *mutuamente exclusivos* - dois conjuntos que não têm nenhum elemento em comum.
- Conjunto universo S - conjunto que contém todos os elementos que estão sendo considerados.

Exercício

1. (PEEBLES, 2001) Os conjuntos a seguir representam possíveis valores que podem ser obtidos na medição de certa corrente:

$$A = \{1; 3; 5; 7\}$$

$$B = \{1; 3; \dots\}$$

$$C = \{0,5 < c \leq 8,5\}$$

$$D = \{0\}$$

$$E = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$$

$$F = \{-5 < f \leq 12\}$$

Determine se são finitos ou não, enumeráveis ou não e especificados de forma tabular ou por regra.

2. (PEEBLES, 2001) Ainda com relação aos conjuntos do exercício anterior, diga se é verdadeiro ou falso:

(a) $A \subset B$

(b) $A \subset C$

(c) $A \not\subset F$

(d) $C \subset F$

(e) $D \not\subset F$

(f) $E \subset B$

3. (PEEBLES, 2001) Com relação aos conjuntos do Exercício 1, escreva todos os pares de conjuntos que são mutuamente exclusivos.
4. (PEEBLES, 2001) Considere-se o experimento de jogar um dado. Estamos interessados nos números que aparecem na face superior. Pede-se:
 - (a) Escreva o conjunto universo S de todos os resultados possíveis.
 - (b) Num jogo, suponha que uma pessoa ganhe se sair um número ímpar. Escreva o conjunto A dos resultados que interessam a esta pessoa.
 - (c) Suponha que uma outra pessoa vence se sair um número menor ou igual a 4. Escreva o conjunto de todos os resultados que interessam a esta pessoa.
 - (d) Quantos subconjuntos de S existem?

2.1.2 Operações com conjuntos

Define-se a seguir as principais operações entre conjuntos.

Igualdade e diferença

Dois conjuntos A e B são iguais se todos os elementos de A estão presentes em B e vice-versa.

A diferença de dois conjuntos $A - B$ é o conjunto contendo todos os elementos de A que não estão em B .

União e intersecção

A união de dois conjuntos ($A \cup B$) é o conjunto de todos os elementos pertencentes a A , B ou ambos. A intersecção de dois conjuntos ($A \cap B$) é o conjunto de elementos comuns a A e B . Se A e B forem mutuamente exclusivos, $A \cap B = \emptyset$.

Complemento

O complemento de um conjunto A , denotado por \bar{A} é o conjunto de todos os elementos que não estão em A .

Exercício

5. (PEEBLES, 2001) Dados os conjuntos:

$$S = \{s \in \mathbb{N} / 1 \leq s \leq 12\}$$

$$A = \{1; 3; 5; 12\}$$

$$B = \{2; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$$

$$C = \{1; 3; 4; 6; 7; 8\}$$

pede-se:

(a) $A \cup B$

(b) $A \cup C$

(c) $B \cup C$

(d) $A \cap B$

(e) $A \cap C$

(f) $B \cap C$

(g) \bar{A}

(h) \bar{B}

(i) \bar{C}

Álgebra de conjuntos

Valem as propriedades comutativa, distributiva e associativa para união e intersecção.

2.1.3 Probabilidade introduzida através de conjuntos

A definição de probabilidades pode ser feita de forma axiomática a partir dos conceitos de eventos e espaços das amostras.

Experimentos e espaço das amostras

O *espaço das amostras* é o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento. Símbolo: S .

Espaços das amostras discretos e contínuos

O espaço das amostras é dito discreto se S é enumerável. O espaço das amostras é dito contínuo se S é não-enumerável.

Eventos

Um evento é definido como um subconjunto do espaço das amostras. Como um evento é um conjunto, todas as definições e operações anteriores aplicadas a conjuntos se aplicam a eventos. Por exemplo, se dois eventos não têm resultados comuns eles serão mutuamente exclusivos.

Definição de probabilidade e axiomas

A cada evento definido no espaço das amostras S associa-se um número não-negativo chamado de *probabilidade*. A probabilidade é portanto uma função; é uma função dos eventos definidos. Adota-se a notação $P(A)$ para a “probabilidade do evento A ”.

A probabilidade deve satisfazer os seguintes axiomas para quaisquer eventos definidos num espaço de amostras:

$$\text{Axioma 1: } P(A) \geq 0$$

$$\text{Axioma 2: } P(S) = 1$$

$$\text{Axioma 3: } P\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N P(A_n) \text{ se } A_m \cap A_n = \emptyset.$$

Modelo matemático de experimentos

Para resolver problemas de probabilidades são necessários 3 passos:

1. Estabelecimento do espaço das amostras
2. Definição dos eventos de interesse
3. Associar probabilidade aos eventos de forma que os axiomas sejam satisfeitos

Exercício

6. (PEEBLES, 2001) Um experimento consiste em observar a soma dos números que saem quando dois dados são jogados. Determine a probabilidade dos seguintes eventos:
 - (a) $A = \{\text{soma} = 7\}$
 - (b) $B = \{8 < \text{soma} \leq 11\}$
 - (c) $C = \{10 < \text{soma}\}$
7. (PEEBLES, 2001) Um dado é jogado. Encontre a probabilidade dos eventos $A = \{\text{um número ímpar é obtido}\}$, $B = \{\text{um número maior do que 3 é obtido}\}$, $A \cup B$ e $A \cap B$.

2.1.4 Probabilidade conjunta e condicional

Estes são conceitos muito importantes que são revistos a seguir.

Probabilidade conjunta

A probabilidade $P(A \cap B)$ é chamada de *probabilidade conjunta* para dois eventos A e B que se interceptam no espaço de amostras.

Estudando um diagrama de Venn, obtém-se:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B) \quad (2.1)$$

Portanto,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \quad (2.2)$$

Para eventos mutuamente exclusivos, $P(A \cap B) = \emptyset$ e $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$.

Probabilidade condicional

Dado um evento B com probabilidade não-nula, define-se a probabilidade condicional de um evento A , dado B , como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2.3)$$

Exercício

8. (PEEBLES, 2001) Em uma caixa existem 100 resistores tendo a resistência e a tolerância mostradas na tabela da Figura 2.1.

| Resistance (Ω) | Tolerance | | Total |
|-------------------------|-----------|-----------|------------|
| | 5% | 10% | |
| 22 | 10 | 14 | 24 |
| 47 | 28 | 16 | 44 |
| 100 | 24 | 8 | 32 |
| Total | 62 | 38 | 100 |

Figura 2.1: Resistores em uma caixa (PEEBLES, 2001).

Considere que um resistor é selecionado da caixa e assumo que cada resistor tem a mesma possibilidade de ser escolhido. Defina três eventos: A como “selecionar um resistor de 47Ω ”, B como “selecionar um resistor com tolerância de 5%” e C como “selecionar um resistor de 100Ω ”. A partir da tabela, determine as seguintes probabilidades:

- (a) $P(A)$
- (b) $P(B)$
- (c) $P(C)$
- (d) $P(A \cap B)$
- (e) $P(A \cap C)$
- (f) $P(B \cap C)$
- (g) $P(A|B)$
- (h) $P(A|C)$
- (i) $P(B|C)$

Probabilidade Total

Dados N eventos mutuamente exclusivos B_n , $n = 1, 2, \dots, N$, cuja união seja o espaço de amostras S , a probabilidade de qualquer evento A pode ser escrita como

$$P(A) = \sum_{n=1}^N P(A|B_n) P(B_n) \quad (2.4)$$

Esta situação é ilustrada no diagrama de Venn da Figura 2.2

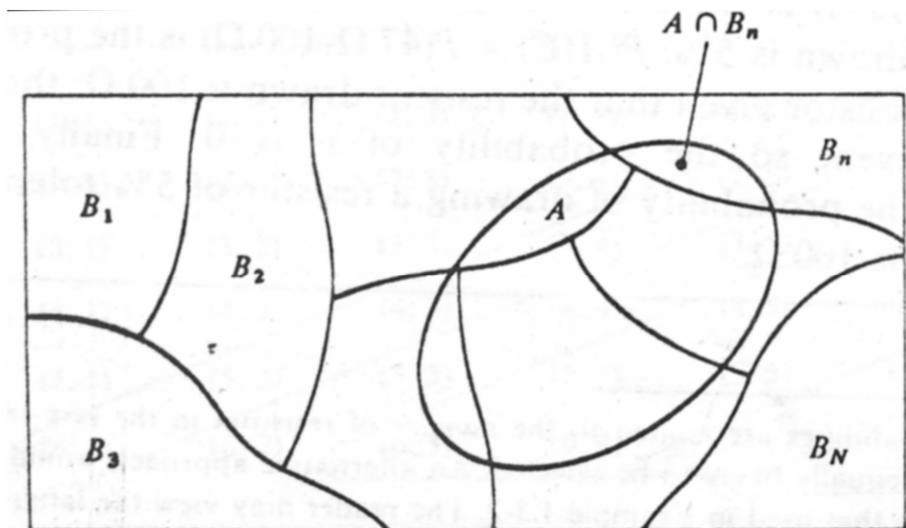


Figura 2.2: N eventos mutuamente exclusivos B_n e o conjunto A (PEEBLES, 2001).

Teorema de Bayes

O Teorema de Bayes, um dos mais importantes e usados na área de probabilidades e na teoria de estimação estabelece que:

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A)} \quad (2.5)$$

Usando a probabilidade total, pode-se escrever que:

$$P(B_n|A) = \frac{P(A|B_n)P(B_n)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_N)P(B_N)}. \quad (2.6)$$

As probabilidades $P(B_n)$ são geralmente chamadas de probabilidades *a priori* já que são aplicadas a eventos antes de ocorrer o experimento. As probabilidades $P(B_n|A)$ são chamadas de *a posteriori* já que elas se aplicam quando um evento A é obtido.

Exercício

9. (PEEBLES, 2001) Um sistema de comunicação binário elementar consiste de um transmissor que envia um de dois símbolos possíveis (1 ou 0) sobre um canal para o receptor. O canal ocasionalmente causa erros de forma que um 1 é detectado quando foi transmitido um 0 e vice-versa.

O espaço das amostras tem dois elementos (0 ou 1). Denota-se por B_i , $i = 1, 2$, como os eventos “o símbolo antes do canal é 1” e “o símbolo antes do canal é 0”, respectivamente. Além disso, define-se A_i , $i = 1, 2$, como os eventos “o símbolo depois do canal é um” e “o símbolo depois do canal é zero”, respectivamente. Assume-se que as probabilidades de que os símbolos um e zero sejam selecionados para transmissão sejam $P(B_1) = 0,6$ e $P(B_2) = 0,4$.

O diagrama da Figura 2.3 mostra as probabilidades condicionais que descrevem o efeito que o canal tem sobre os símbolos transmitidos.

Pede-se:

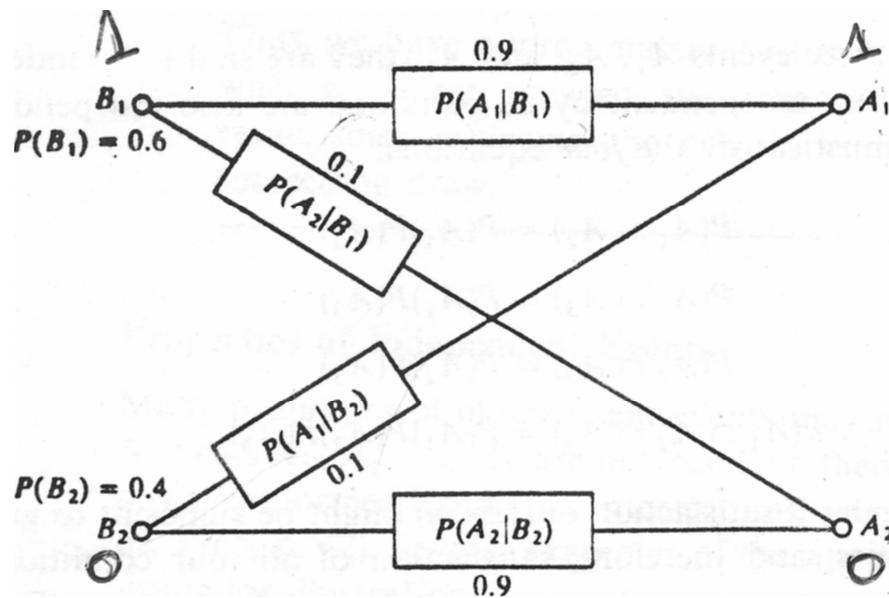


Figura 2.3: Sistema de comunicação binário simétrico (PEEBLES, 2001).

- (a) as probabilidades de se receber um 1 e de receber um 0 $P(A_1)$ e $P(A_2)$.
- (b) as probabilidades de acerto de bit $P(B_1|A_1)$ e $P(B_2|A_2)$.
- (c) as probabilidades de erro de bit $P(B_2|A_1)$ e $P(B_1|A_2)$.

2.1.5 Eventos independentes

Sejam dois eventos A e B tais que $P(A) \neq 0$ e $P(B) \neq 0$. Estes eventos são *independentes* se a probabilidade de ocorrência de um deles não afeta a ocorrência do outro evento. Usando a notação da seção anterior

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B|A) = P(B) \quad (2.7)$$

Por substituição no teorema de Bayes, para eventos independentes,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B), \quad A \text{ e } B \text{ independentes.} \quad (2.8)$$

Cuidado: não confundir independência estatística com eventos mutuamente exclusivos. Dois eventos serem *independentes* significa que a ocorrência de um *não depende*, não é influenciado, pela ocorrência do outro. Dois eventos serem mutuamente *exclusivos* significa que um

não pode ocorrer se o outro ocorreu. Em suma,

$$A \text{ e } B \text{ independentes} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

$$A \text{ e } B \text{ mutuamente exclusivos} \Leftrightarrow P(A \cap B) = 0.$$

Pelas definições, dois eventos com probabilidade não-nula não podem ser simultaneamente independentes e mutuamente exclusivos.

Exercícios

10. (PEEBLES, 2001) Em um experimento, uma carta é selecionada de um conjunto comum de 52 cartas. Defina os eventos A como “selecionar um rei”, B como “selecionar um valete ou uma rainha” e C “selecionar uma carta de copas”. Pede-se:
 - (a) Determine $P(A)$, $P(B)$ e $P(C)$.
 - (b) Determine as probabilidades conjuntas $P(A \cap B)$, $P(B \cap C)$ e $P(A \cap C)$.
 - (c) Determine se os pares A e B , A e C e B e C são independentes ou não.
11. Considere a retirada de quatro cartas de um conjunto com 52 cartas. Sejam os eventos A_1, A_2, A_3, A_4 definidos como a retirada de um ás na primeira, segunda, terceira e quarta tentativas. Determine a probabilidade conjunta $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ (ou seja, retirar quatro ases seguidos) nos seguintes casos:
 - (a) cada carta é recolocada no baralho após ser retirada.
 - (b) as cartas retiradas não são retornadas ao baralho.

Em qual dos dois experimentos os eventos são independentes?

2.1.6 Tentativas de Bernoulli

Considere o seguinte problema: seja A com $P(A) = p$ um evento elementar tendo um de dois possíveis resultados como elemento. Deseja-se repetir esse experimento N vezes e determinar

a probabilidade do evento A ser observado k vezes nessas N tentativas. Esse experimento é chamado de *tentativas de Bernoulli* (“Bernoulli trials”).

Pode-se mostrar que, neste caso:

$$P(A \text{ ocorrer exatamente } k \text{ vezes}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad (2.9)$$

em que $\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}$.

Quando N é muito grande, uma aproximação para a fórmula acima, conhecida como aproximação de De Moivre-Laplace é dada por

$$P(A \text{ ocorrer exatamente } k \text{ vezes}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Np(1-p)}} \exp \left[-\frac{(k - Np)^2}{2Np(1-p)} \right] \quad (2.10)$$

Exercícios

12. Um submarino deseja afundar um porta-aviões. Ele terá sucesso apenas se dois ou mais torpedos atingirem a embarcação. Se o submarino dispara três torpedos e a probabilidade de cada torpedo atingir o alvo é 0,4, qual a probabilidade do porta-aviões naufragar?
13. Em uma cultura usada para pesquisa biológica, o crescimento inevitável de bactérias ocasionalmente estraga os resultados de um experimento que requer que pelo menos três de quatro culturas não estejam contaminadas para se obter um ponto de dado. Experiências mostram que cerca de 6 em cada 100 culturas são contaminadas de forma aleatória por bactérias. Se um experimento requer três pontos de dados, encontre a probabilidade de sucesso para um conjunto de 12 culturas (três pontos de dados usando quatro culturas cada).
14. Suponha que certa arma automática dispara balas por 3 segundos a uma taxa de 2400 por minuto e que a probabilidade de acertar um alvo seja 0,4. Encontre a probabilidade

de que exatamente 50 balas atinjam o alvo. (Use a aproximação de De Moivre-Laplace).

15. Uma companhia vende amplificadores de alta fidelidade capazes de gerar potências de 10, 25 e 50W. Ela tem em mãos 100 unidades de 10W das quais 15% são defeituosas, 70 unidades de 25W dos quais 10% são defeituosos e 30 dos de 50W dos quais 10% são defeituosos.
- (a) Qual a probabilidade de que um amplificador vendido entre os de 10W seja defeituoso?
 - (b) Se cada amplificador de potência é vendido com mesma probabilidade, qual a probabilidade de uma unidade selecionada de forma aleatória ser de 50W e defeituoso?
 - (c) Qual a probabilidade de uma unidade selecionada de forma aleatória para venda ser defeituosa?

2.2 A variável aleatória

Nesta seção é introduzido um conceito que permite definir eventos de uma forma mais consistente. Este novo conceito é o de *variáveis aleatórias* e se constitui em uma poderosa ferramenta na solução de problemas probabilísticos práticos.

2.2.1 O conceito de variável aleatória

Define-se uma variável aleatória real como uma função real dos elementos de um espaço das amostras (PEEBLES, 2001). Representa-se uma variável aleatória por letras maiúsculas (como W , X ou Y) e um valor particular que ela assume por letras minúsculas (como w , x ou y).

Assim, dado um experimento definido pelo espaço das amostras com elementos s , atribui-se a cada s o número real $X(s)$ de acordo com alguma regra e diz-se que $X(s)$ é uma variável aleatória.

Uma variável aleatória é *discreta* se possui apenas valores discretos. Uma variável aleatória é *contínua* se abrange um contínuo de valores.

Exercícios

18. (PEEBLES, 2001) Um experimento consiste em jogar um dado e uma moeda. Considere uma variável aleatória X tal que: (1) uma cara (H) corresponde a valores positivos de X que são iguais aos números que aparecem no dado e (2) uma coroa (T) corresponde a valores negativos de X cuja magnitude é o dobro do número que aparece no dado. Pede-se:
- (a) Represente o espaço das amostras deste experimento
 - (b) Para cada evento s deste espaço das amostras, determine $X(s)$.
19. (PEEBLES, 2001) Um espaço das amostras é definido pelo conjunto $S = \{1; 2; 3; 4\}$ sendo as probabilidades de seus elementos $P(1) = \frac{4}{24}$, $P(2) = \frac{3}{24}$ e $P(3) = \frac{7}{24}$. Definindo a variável aleatória $X = X(s) = s^3$, calcule as probabilidades:
- (a) $P\{X = 1\}$
 - (b) $P\{X = 8\}$
 - (c) $P\{X = 27\}$
 - (d) $P\{X = 64\}$
20. Suponha que a temperatura de uma localidade seja modelada como uma variável aleatória contínua T que sabe-se encontrar entre -5°C e 35°C . Além disso, considere que todos os valores $\{-5 \leq t \leq 35\}$ são igualmente prováveis. Calcule:
- (a) $P\{T \leq 10\}$
 - (b) $P\{5 \leq T \leq 10\}$
 - (c) $P\{T = 10\}$

2.2.2 Função distribuição cumulativa

A probabilidade $P(\{X \leq x\})$ é a probabilidade do evento $\{X \leq x\}$ e é uma quantidade que depende de x . Esta função, denotada por $F_X(x)$, é chamada de *função distribuição de*

probabilidade cumulativa da variável aleatória X . Assim,

$$F_X(x) = P(\{X \leq x\}). \quad (2.11)$$

Freqüentemente, $F_X(x)$ é chamada de *função distribuição* de X . O argumento x é qualquer número real entre $-\infty$ e ∞ .

Algumas propriedades de $F_X(x)$ são:

1. $F_X(-\infty) = 0$
2. $F_X(\infty) = 1$
3. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
4. Se $x_1 < x_2$ então $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$
5. $P(\{x_1 < X < x_2\}) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$

Exercício

21. (PEEBLES, 2001) Considere que X assumira valores discretos no conjunto $\{-1; -0,5; 0,7; 1,5; 3\}$. As probabilidades correspondentes são $\{0,1; 0,2; 0,1; 0,4; 0,2\}$. Determine e faça um gráfico de $F_X(x)$.

2.2.3 Função densidade de probabilidade

A *função densidade de probabilidade* $f_X(x)$ é definida como a derivada da função de distribuição. Assim,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}. \quad (2.12)$$

Freqüentemente, chama-se $f_X(x)$ apenas de *função densidade* da variável aleatória X .

A função $f_X(x)$ existe desde que a derivada de $F_X(x)$ exista. No caso de variáveis aleatórias discretas, pode ser necessária a utilização de funções impulso $\delta(x) = \frac{du(x)}{dx}$ para sua representação.

As principais propriedades da função densidade são:

1. $f_X(x) \geq 0$, qualquer que seja x
2. $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(\xi) d\xi$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$
4. $P(\{x_1 < X < x_2\}) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$

Exercícios

22. A atenuação que certo canal apresenta é uma variável aleatória X cuja função densidade $g_X(x)$ é dada na Figura 2.4. Pede-se:

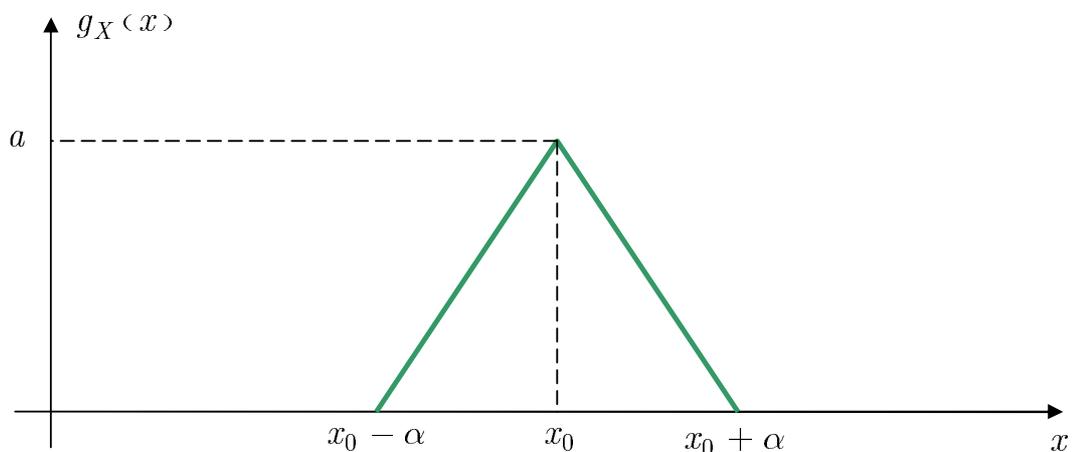


Figura 2.4: Função densidade triangular.

- (a) Determine a para que $g(x)$ seja uma função densidade
 - (b) Para o valor de a do item anterior, determine e esboce $G_X(x)$
23. Suponha que uma atenuação aleatória X tenha a densidade de probabilidade triangular do Exercício 22 com $x_0 = 8$, $\alpha = 5$ e $a = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{5}$. Determine a probabilidade $P(\{4,5 < X \leq 6,7\})$.

24. A quantidade acessos normalizada a um servidor durante um dia é descrita por uma variável aleatória X que tem distribuição

$$F_X(x) = u(x) \left[1 - e^{-\frac{x^2}{b}} \right]. \quad (2.13)$$

Determine a função densidade $f_X(x)$.

25. (PEEBLES, 2001) A central de um sistema de intercomunicação provê música para seis quartos de um hospital. A probabilidade de que cada quarto seja ativado e consuma potência a qualquer instante é 0,4. Quando ativado, o quarto consome 0,5W. Pede-se:
- Encontre e faça um gráfico das funções distribuição e densidade para a variável aleatória “potência fornecida pela central”.
 - Se o amplificador da estação principal fica sobrecarregado quando mais do que 2W é necessário, qual a probabilidade de sobrecarga?

2.2.4 A variável aleatória gaussiana

Uma variável aleatória é chamada de *gaussiana* se sua função densidade de probabilidade tem a forma

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-a_X)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (2.14)$$

em que $\sigma_X > 0$ e $-\infty < a_X < \infty$ são constantes reais. A Figura 2.5 mostra um gráfico de $f_X(x)$ para $a_X = 0$ e $\sigma_X = 1$.

A densidade gaussiana é a mais utilizada de todas as densidades e aparece praticamente em todas as áreas da Ciência e da Engenharia. Esta importância vem de sua descrição precisa de muitas quantidades práticas e de significado no mundo real, especialmente as quantidades resultantes de muitos efeitos aleatórios pequenos que se somam agindo para criar a quantidade de interesse (PEEBLES, 2001).

A função distribuição gaussiana é dada por

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(\xi-a_X)^2}{2\sigma_X^2}} d\xi. \quad (2.15)$$

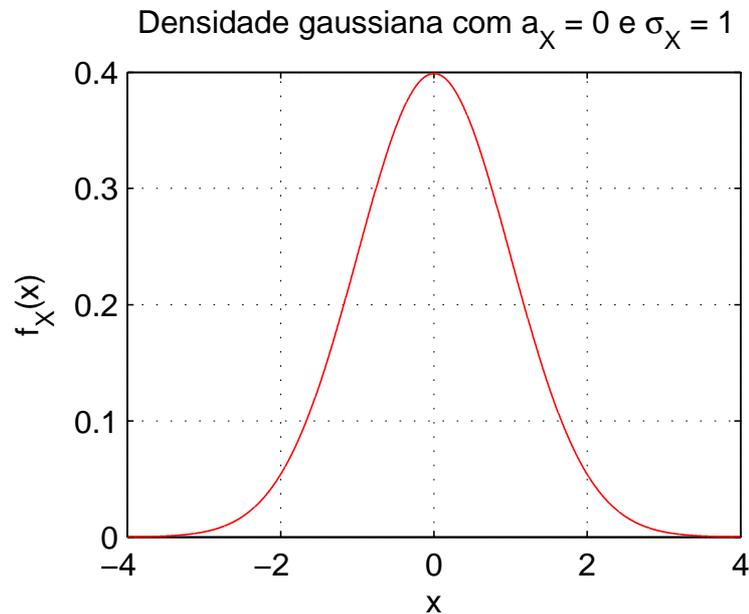


Figura 2.5: Função densidade gaussiana com $a_X = 0$ e $\sigma_X = 1$.

A integral da Eq. (2.15) não tem forma fechada conhecida. Para obter $F_X(x)$, define-se a *distribuição gaussiana normalizada*

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi \quad (2.16)$$

e, com essa definição, tem-se:

$$F_X(x) = F\left(\frac{x - a_x}{\sigma_x}\right) \quad (2.17)$$

A função $F(x)$ é encontrada em tabelas em muitas referências, como (PEEBLES, 2001). Alguns livros, como (LATHI, 1998a) tabelam $Q(x) = 1 - F(x)$ ao invés de $F(x)$.

A tabela da Figura 2.6 (PEEBLES, 2001) mostra valores de $F(x)$ para $x \geq 0$. Repare que para $x < 0$ basta utilizar o fato de que $F(-x) = 1 - F(x)$.

Exercícios

26. A relação sinal-ruído no canal de um sistema de comunicações dada em dB pode ser aproximada por uma variável aleatória gaussiana X sendo $a_X = 3$ e $\sigma_X = 2$. Encontre a probabilidade do evento $\{X \leq 5,5\}$.

TABLE B-1
Values of $F(x)$ for $0 \leq x \leq 3.89$ in steps of 0.01

| x | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .9773 | .9778 | .9783 | .9788 | .9793 | .9798 | .9803 | .9808 | .9812 | .9817 |
| 2.1 | .9821 | .9826 | .9830 | .9834 | .9838 | .9842 | .9846 | .9850 | .9854 | .9857 |
| 2.2 | .9861 | .9864 | .9868 | .9871 | .9875 | .9878 | .9881 | .9884 | .9887 | .9890 |
| 2.3 | .9893 | .9896 | .9898 | .9901 | .9904 | .9906 | .9909 | .9911 | .9913 | .9916 |
| 2.4 | .9918 | .9920 | .9922 | .9925 | .9927 | .9929 | .9931 | .9932 | .9934 | .9936 |
| 2.5 | .9938 | .9940 | .9941 | .9943 | .9945 | .9946 | .9948 | .9949 | .9951 | .9952 |
| 2.6 | .9953 | .9955 | .9956 | .9957 | .9959 | .9960 | .9961 | .9962 | .9963 | .9964 |
| 2.7 | .9965 | .9966 | .9967 | .9968 | .9969 | .9970 | .9971 | .9972 | .9973 | .9974 |
| 2.8 | .9974 | .9975 | .9976 | .9977 | .9977 | .9978 | .9979 | .9979 | .9980 | .9981 |
| 2.9 | .9981 | .9982 | .9982 | .9983 | .9984 | .9984 | .9985 | .9985 | .9986 | .9986 |
| 3.0 | .9987 | .9987 | .9987 | .9988 | .9988 | .9989 | .9989 | .9989 | .9990 | .9990 |
| 3.1 | .9990 | .9991 | .9991 | .9991 | .9992 | .9992 | .9992 | .9992 | .9993 | .9993 |
| 3.2 | .9993 | .9993 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9994 | .9995 | .9995 | .9995 |
| 3.3 | .9995 | .9995 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9996 | .9997 |
| 3.4 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9997 | .9998 | .9998 |
| 3.5 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 | .9998 |
| 3.6 | .9998 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 |
| 3.7 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 |
| 3.8 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | .9999 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

Figura 2.6: Valores tabelados de $F(x)$ (PEEBLES, 2001).

27. (PEEBLES, 2001) Assuma que a altura das nuvens sobre o solo em um determinado local é uma variável aleatória gaussiana X com $a_X = 1830\text{m}$ e $\sigma_X = 460\text{m}$. Encontre a probabilidade de que uma nuvem esteja a uma altura superior a 2750m.
28. Seja uma variável aleatória gaussiana para a qual $a_X = 7$ e $\sigma_X = 0,5$. Encontre a probabilidade do evento $\{X \leq 7,3\}$.

2.2.5 Outros exemplos de distribuições e densidades

A seguir, descrevem-se outros exemplos de distribuições utilizadas em problemas de comunicações.

Binomial

Para $0 < p < 1$ e $N = 1, 2, \dots$, a função

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \delta(x-k) \quad (2.18)$$

é chamada de *função densidade binomial*.

A densidade binomial pode ser aplicada aos experimentos de Bernoulli. É utilizada em muitos problemas de detecção em radar e sonar e muitos experimentos tendo apenas dois possíveis resultados.

Integrando-se Eq.(2.18), obtém-se a *função distribuição binomial*

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} u(x-k) \quad (2.19)$$

Na Figura 2.7 são traçados gráficos das funções densidades e distribuição binomial para $N = 6$ e $p = 0,25$.

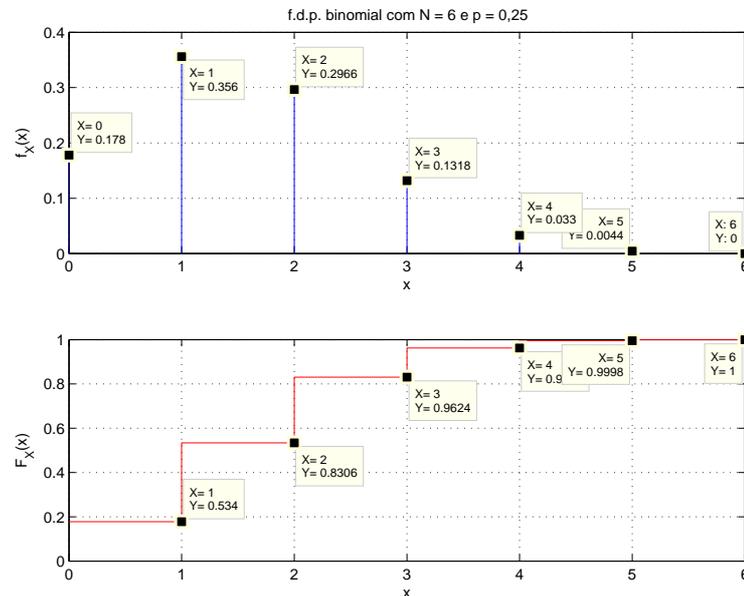


Figura 2.7: Exemplo de densidade e distribuição binomial com $N = 6$ e $p = 0,25$.

Poisson

A variável aleatória de Poisson tem densidade e distribuição dadas respectivamente por:

$$f_X(x) = e^{-b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} \delta(x - k) \quad (2.20)$$

$$F_X(x) = e^{-b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} u(x - k) \quad (2.21)$$

em que b é uma constante positiva.

A distribuição é um caso limite da distribuição binomial em que $N \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$ com $Np = b$. É usada para descrever, por exemplo, o número de unidades defeituosas numa linha de produção, o número de chamadas telefônicas feitas durante um período de tempo, ou o número de elétrons emitidos de uma pequena porção de um cátodo num intervalo de tempo.

Se o intervalo de tempo de interesse tem duração T e os eventos sendo contados ocorrem a uma taxa λ , então b é dado por

$$b = \lambda T \quad (2.22)$$

Exercício

29. (PEEBLES, 2001) Assuma que a chegada de carros num posto de gasolina é uma distribuição de Poisson e ocorrem a uma taxa média de 50/h. O posto tem apenas uma bomba. Assumindo que todos os carros necessitam de 1 minuto para abastecer, qual a probabilidade de que uma fila se forme na bomba?

Uniforme

A densidade de probabilidade *uniforme* e a sua função distribuição são dadas por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.23)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (2.24)$$

para constantes reais a e b com $b > a$.

A Figura 2.8 mostra gráficos de $f_X(x)$ e de $F_X(x)$ para este caso.

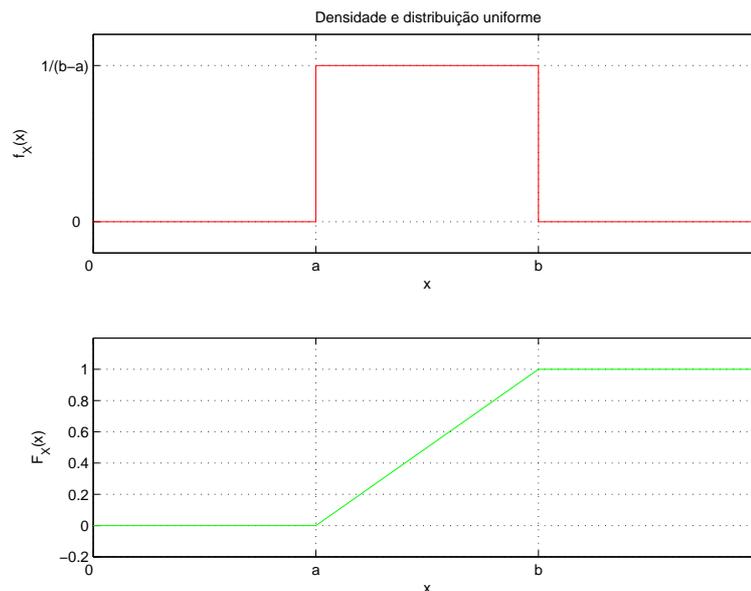


Figura 2.8: Funções densidade e distribuição uniforme.

Uma aplicação importante é na modelagem do erro de digitalização de sinais amostrados em sistemas de comunicações digitais.

Exponencial

As funções distribuição e densidade exponencial são:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b}e^{-\frac{(x-a)}{b}}, & x > a \\ 0, & x < a \end{cases} \quad (2.25)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{(x-a)}{b}}, & x > a \\ 0, & x < a \end{cases} \quad (2.26)$$

para números reais a e b com $b > 0$.

Na Figura 2.9 são mostrados gráficos da densidade e da distribuição exponencial.

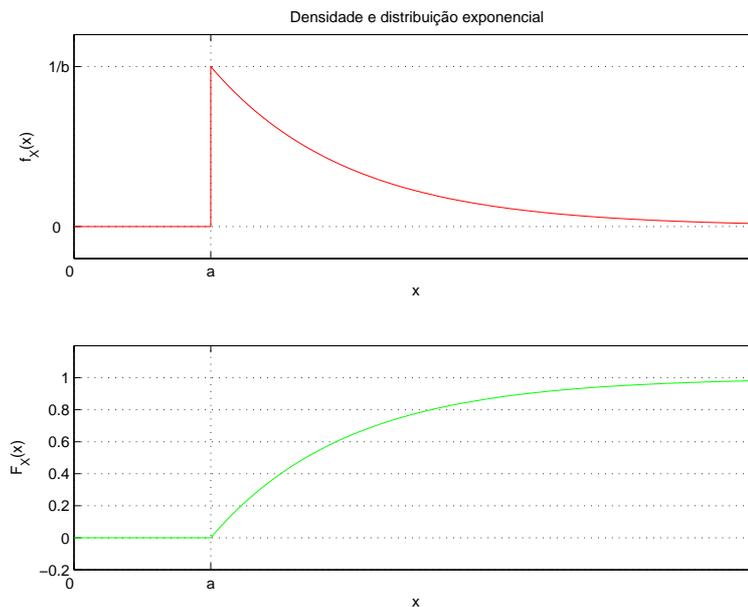


Figura 2.9: Funções densidade e distribuição exponencial.

Algumas das aplicações da variável aleatória exponencial são a descrição do tamanho das gotas de chuva e a flutuação da intensidade de um sinal de radar recebido da reflexão de certas aeronaves.

Exercício

30. (PEEBLES, 2001) A potência refletida por uma aeronave com um formato complexo é

recebida por um radar e pode ser descrita por uma variável aleatória exponencial P . A densidade de P é, portanto,

$$f_P(p) = \begin{cases} \frac{1}{P_0} e^{-\frac{p}{P_0}}, & p > 0 \\ 0, & p < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

em que P_0 é o valor médio da potência recebida. Em um instante particular, P pode ter um valor diferente do seu valor médio. Qual a probabilidade de que a potência recebida seja maior do que o seu valor médio?

Rayleigh

As funções densidade e distribuição de Rayleigh são

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{b}(x-a)e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases} \quad (2.28)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{(x-a)^2}{b}}, & x \geq a \\ 0, & x < a \end{cases} \quad (2.29)$$

para números reais a e b com $b > 0$.

Na Figura 2.10 são mostradas curvas das funções densidade e distribuição de Rayleigh.

Entre outras aplicações, a variável de Rayleigh descreve a envoltória de um tipo de ruído quando passa por um filtro passa-faixas. Também é importante na análise de erros em vários sistemas de medição.

Exercícios

31. (PEEBLES, 2001) O valor $x = x_0$ tal que $P(X \leq x_0) = P(X \geq x_0)$ é chamado de mediana de uma distribuição. Determine a mediana de uma distribuição de Rayleigh.
32. (PEEBLES, 2001) Uma tensão aleatória gaussiana X para a qual $a_X = 0$ e $\sigma_X = 4,2V$ aparece através de um resistor de 100Ω com uma potência máxima permitida de $0,25W$.

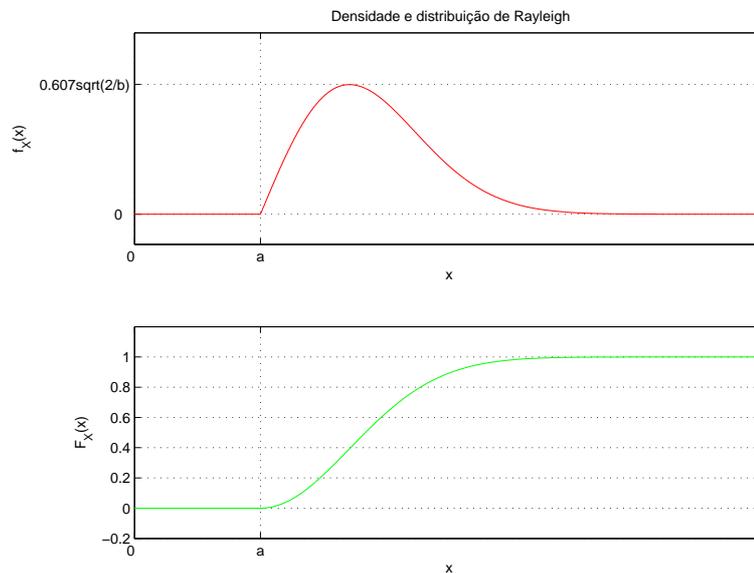


Figura 2.10: Funções densidade e distribuição de Rayleigh.

Qual a probabilidade de que esta tensão cause uma potência instantânea que exceda a máxima do resistor?

2.3 Operações sobre uma variável aleatória - Esperança

Nessa seção, introduz-se algumas operações importantes que podem ser realizadas sobre uma variável aleatória.

2.3.1 Valor esperado

Valor esperado é o nome dado ao processo de tomar uma média quando uma variável aleatória está envolvida. Para uma variável aleatória X , usa-se a notação $E[X]$, que pode ser lida como “a esperança matemática de X ”, “o valor esperado de X ”, “o valor médio de X ” ou ainda “a média estatística de X ”.

Ocasionalmente, usa-se a notação \bar{X} que tem o mesmo significado que $E[X]$, ou seja, $\bar{X} = E[X]$.

Para motivar a definição de $E[X]$, parte-se do exercício a seguir.

Exercício

33. (PEEBLES, 2001) Noventa pessoas foram selecionadas aleatoriamente e o valor em reais fracionário das moedas em seus bolsos foi contado. Se a conta dava acima de um real, o valor inteiro era descartado e tomava-se apenas a parte que ia de 0 a 99 centavos. Observou-se que 8, 12, 28, 22, 15 e 5 pessoas tinham 18, 45, 64, 72, 77 e 95 centavos respectivamente. Determine o valor médio da quantidade de centavos nos bolsos.

Seguindo o exemplo do Exercício 33, o valor esperado de uma variável aleatória X é definido por

$$E[X] = \bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx. \quad (2.30)$$

Caso X seja discreta com N possíveis valores de x_i com probabilidades $P(x_i)$, então:

$$E[X] = \bar{X} = \sum_{n=1}^N x_i P(x_i). \quad (2.31)$$

Exercício

34. A potência captada na entrada de uma antena interna pode ser modelada aproximadamente por uma variável aleatória contínua distribuída exponencialmente com

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b} e^{-\frac{(x-a)}{b}}, & x > a \\ 0, & x < a \end{cases} \quad (2.32)$$

Determine o valor médio da potência recebida. Dica: $\int x e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a^2} (1 + ax)$.

Como ficará evidente na próxima seção, muitos parâmetros úteis relacionados a uma variável aleatória X podem ser obtidos encontrando o valor esperado de uma função real $g(\cdot)$ de X . Este valor esperado é dado por

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx. \quad (2.33)$$

Se X for uma variável aleatória discreta,

$$E[g(X)] = \sum_{n=1}^N g(x_i) P(x_i). \quad (2.34)$$

Exercícios

35. (PEEBLES, 2001) Sabe-se que uma dada tensão aleatória pode ser representada por uma variável aleatória de Rayleigh V com função densidade dada por

$$f_V(v) = \begin{cases} \frac{2}{b}(v-a)e^{-\frac{(v-a)^2}{b}}, & v \geq a \\ 0, & v < a \end{cases} \quad (2.35)$$

com $a = 0$ e $b = 5$. Esta tensão é aplicada a um dispositivo que gera uma tensão $Y = g(V) = V^2$ que é igual, numericamente, à potência de V (sobre um resistor de 1Ω). Encontre a potência média de V .

36. (PEEBLES, 2001) Um problema em sistemas de comunicações é como definir a informação de uma fonte. Considere a modelagem de uma fonte capaz de emitir L símbolos distintos (mensagem) representada pelos valores de uma variável aleatória discreta x_i , $i = 1, 2, \dots$, ($L = 2$ é o caso binário). Seja $P(x_i)$ a probabilidade do símbolo $X = x_i$. Pergunta-se, qual a informação contida nesta fonte, em média. É necessário fazer três considerações.

Primeiro, considera-se que a informação deve ser maior para saídas da fonte com baixa probabilidade. Por exemplo, contém pouca informação prever tempo quente e seco para o deserto do Saara já que estas condições prevalecem quase todo o tempo. Mas prever tempo frio e chuvas fortes carrega “muita informação”. A seguir, as informações de duas fontes independentes devem se somar de acordo e finalmente a informação deve ser uma quantidade positiva (uma escolha feita) e zero para um evento que ocorre com certeza. A única função com estas propriedades é a logarítmica. Como duas quantidades representam o menor número para uma escolha, o logaritmo na base 2 é escolhido para medir

informação e sua unidade é chamada de *bit*. Para uma fonte, definimos a informação de um símbolo x_i como $\log_2 \left[\frac{1}{P(x_i)} \right] = -\log_2 [P(x_i)]$. Determine então a informação média ou *entropia*, de uma fonte discreta com L símbolos possíveis.

2.3.2 Momentos

Uma aplicação imediata do valor esperado de uma função $g(\cdot)$ de uma variável aleatória X é o cálculo de momentos. Dois tipos de momentos são de interesse, os em torno da origem e os em torno da média.

Momentos em torno da origem

A função

$$g(X) = X^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

quando usada na Eq. (2.33) fornece o momento em torno da origem da variável aleatória X . Denotando-se o n -ésimo momento por m_n , têm-se:

$$m_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx \quad (2.37)$$

Claramente, $m_0 = 1$, a área sob a função $f_X(x)$ e $m_1 = \bar{X}$, o valor esperado de X .

Momentos centrais

Momentos em torno da média são chamados de *momentos centrais* e são simbolizados por μ_n . São definidos pelo valor esperado da função

$$g(X) = (X - \bar{X})^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

que é

$$\mu_n = E[(X - \bar{X})^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^n f_X(x) dx. \quad (2.39)$$

O momento $\mu_0 = 1$, a área sob $f_X(x)$, enquanto $\mu_1 = 0$. (Por quê?).

Variância e distorção (*skew*)

O segundo momento central μ_2 é tão importante que é conhecido por um nome especial: *variância* representada por σ_X^2 . Assim, a variância é definida por

$$\sigma_X^2 = E \left[(X - \bar{X})^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^2 f_X(x) dx. \quad (2.40)$$

A raiz positiva σ_X da variância é chamada de *desvio padrão* de X e é uma medida do espalhamento da função $f_X(x)$ ao redor da média.

A variância pode ser determinada conhecendo-se o primeiro e segundo momento em torno da origem, pois

$$\sigma_X^2 = E \left[(X - \bar{X})^2 \right] = E \left[X^2 - 2X\bar{X} + \bar{X}^2 \right] = E \left[X^2 \right] - 2\bar{X}E[X] + \bar{X}^2 = m_2 - m_1^2 \quad (2.41)$$

O terceiro momento central $\mu_3 = E \left[(X - \bar{X})^3 \right]$ é uma medida da assimetria de $f_X(x)$ ao redor de $x = \bar{X} = m_1$. É chamada de *distorção* (*skew*) da função densidade. Se uma densidade é simétrica em torno de $x = \bar{X}$, então ela tem distorção zero.

O terceiro momento central normalizado $\frac{\mu_3}{\sigma_X^3}$ é chamado de *coeficiente de distorção* (*skewness*).

Exercícios

37. (PEEBLES, 2001) Seja X uma variável aleatória com a função densidade exponencial do

Exercício 34. Determine a variância de X .

38. (PEEBLES, 2001) Ainda para a variável X do exercício anterior,

(a) Mostre que $\mu_3 = \bar{X}^3 - 3\bar{X}\sigma_X^2 - \bar{X}^3$.

(b) Calcule μ_3 e o coeficiente de distorção.

Dicas: $\int x^2 e^{mx} dx = e^{mx} \left[\frac{x^2}{m} - \frac{2x}{m^2} + \frac{2}{m^3} \right]$; $\int x^3 e^{mx} dx = e^{mx} \left[\frac{x^3}{m} - \frac{3x^2}{m^2} + \frac{6x}{m^3} - \frac{6}{m^4} \right]$.

39. (PEEBLES, 2001) Certo medidor é projetado para ler pequenas tensões, porém comete erros por causa de ruídos. Os erros são representados de forma acurada por uma variável

aleatória gaussiana com média nula e desvio padrão 10^{-3}V . Quando o nível DC é desconectado, descobre-se que a probabilidade da leitura do medidor ser positiva devido ao ruído é 0,5. Quando a tensão DC é presente, a probabilidade torna-se 0,2514. Qual o nível DC?

2.4 Múltiplas Variáveis Aleatórias

Nesta seção, estende-se a teoria para incluir duas variáveis aleatórias na descrição de um fenômeno. Como exemplo, pode-se pensar nas coordenadas de um ponto aleatório num plano.

2.4.1 Variáveis aleatórias vetoriais

Suponha que duas variáveis aleatórias X e Y sejam definidas num espaço de amostras S em que valores específicos de X e Y são denotados por x e y respectivamente. Então, qualquer par ordenado de números (x, y) pode ser convenientemente considerado como um ponto aleatório no plano xy . O ponto pode ser tomado como o valor específico de uma variável aleatória vetorial ou um vetor aleatório. A Figura 2.11 ilustra o mapeamento envolvido em ir de S para o plano xy .

2.4.2 Distribuição conjunta e suas propriedades

As probabilidades dos eventos

$$A = \{X \leq x\} \tag{2.42}$$

$$B = \{Y \leq y\} \tag{2.43}$$

já foram definidas como funções de x e y respectivamente e chamadas de funções distribuição de probabilidades. Ou seja,

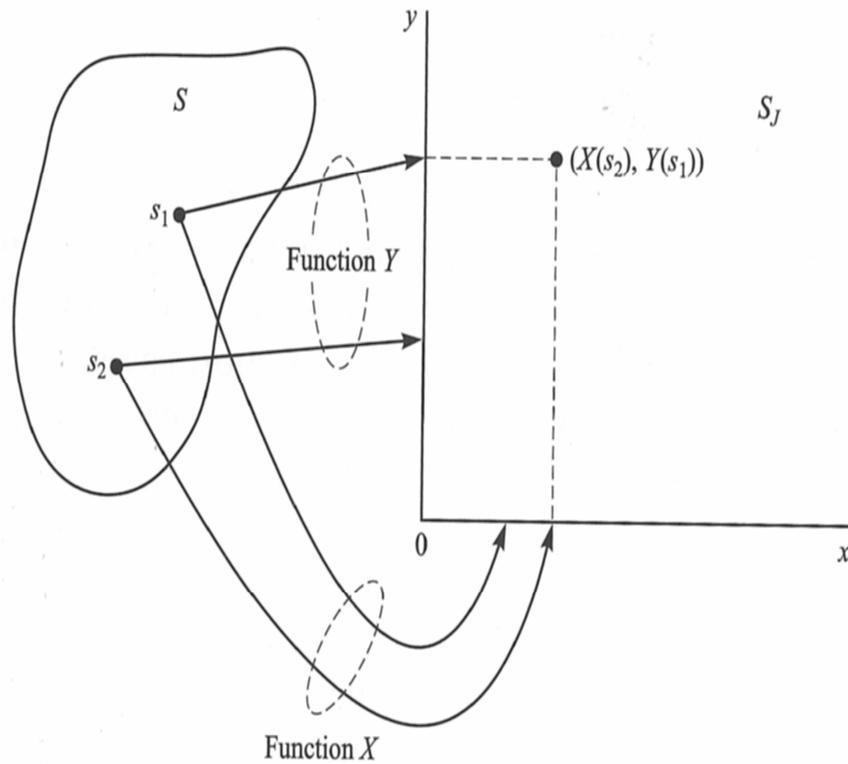


Figura 2.11: Mapeamento do espaço das amostras S para o plano xy (PEEBLES, 2001).

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} \quad (2.44)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\}. \quad (2.45)$$

É introduzido agora um novo conceito para incluir a probabilidade do evento conjunto $\{X \leq x, Y \leq y\}$.

Função distribuição conjunta

Define-se a probabilidade do evento conjunto $\{X \leq x, Y \leq y\}$, que é uma função dos números x e y como uma *função distribuição de probabilidades conjunta* e a denota-se pelo símbolo $F_{X,Y}(x, y)$. Assim,

$$F_{X,Y}(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}. \quad (2.46)$$

Repare que $P\{X \leq x, Y \leq y\} = P(A \cap B)$, em que o evento $A \cap B$ foi definido em S .

Exercício

40. Assuma que o espaço das amostras S tenha apenas três elementos possíveis: $(1, 1)$, $(2, 1)$ e $(3, 3)$. As probabilidades destes elementos são $P(1, 1) = 0,2$, $P(2, 1) = 0,3$ e $P(3, 3) = 0,5$. Encontre $F_{X,Y}(x, y)$.

Resposta indicada na Figura 2.12.

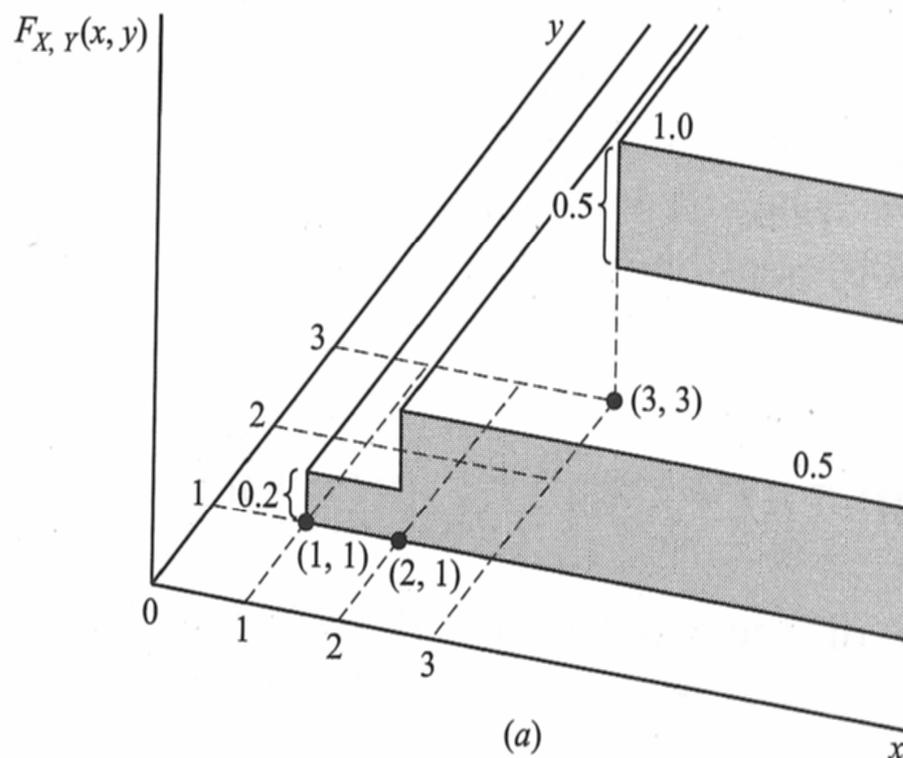


Figura 2.12: Função distribuição conjunta do Exercício 40 (PEEBLES, 2001).

Propriedades da distribuição conjunta

A partir da definição da Eq. (2.46), chega-se às seguintes propriedades cuja demonstração é deixada como exercício ao leitor interessado.

1. $0 \leq F_{X,Y}(x, y) \leq 1$
2. $F_{X,Y}(-\infty, -\infty) = 0$, $F_{X,Y}(-\infty, y) = 0$, $F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$
3. $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$

4. $F_{X,Y}(x, \infty) = F_X(x)$, $F_{X,Y}(\infty, y) = F_Y(y)$
5. $F_{X,Y}(x, y)$ é uma função não-decrescente de x e y
6. $F_{X,Y}(x_2, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) = P\{x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2\}$

Funções de distribuição marginal

A Propriedade (4) anterior afirma que a função distribuição de uma variável aleatória pode ser obtida fazendo o valor da outra variável aleatória ser infinito em $F_{X,Y}(x, y)$. As funções $F_X(x)$ ou $F_Y(y)$ obtidas desta forma são chamadas de *funções de distribuição marginal*.

Exercício

41. Encontre expressões explícitas para as distribuições marginais do Exercício 40.

2.4.3 Densidade conjunta e suas propriedades

Da mesma forma como foi feito para as variáveis aleatórias isoladas, define-se a seguir a função densidade conjunta.

Função densidade conjunta

Para duas variáveis aleatórias X e Y , a *função densidade de probabilidade conjunta*, denotada por $f_{X,Y}(x, y)$ é definida como a segunda derivada da função distribuição conjunta onde quer que ela exista. Ou seja,

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (2.47)$$

Propriedades da densidade conjunta

A partir da definição da Eq. (2.47), chega-se às seguintes propriedades cuja demonstração é deixada como exercício ao leitor interessado.

1. $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$

$$3. F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

$$4. F_X(x) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \text{ e } F_Y(y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2$$

$$5. P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

$$6. f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

As Propriedades (1) e (2) podem ser usadas para testar se uma dada função pode ser uma função densidade válida.

Exercício

42. Seja b uma constante positiva. Determine seu valor para que a função

$$g(x, y) = \begin{cases} be^{-x} \cos y, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.48)$$

seja uma função densidade de probabilidade válida.

Função densidade marginal

As funções $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ da Propriedade (6) são chamadas de *funções densidade de probabilidade marginal* ou apenas *funções densidade marginal*. São as funções densidades das variáveis simples X e Y definidas como as derivadas das funções distribuição marginais, ou seja,

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (2.49)$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} \quad (2.50)$$

Exercício

43. As tensões X e Y foram medidas em volts em dois pontos diferentes de um circuito elétrico. Encontre $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ se a função densidade de probabilidade conjunta dessas

tensões é dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = u(x)u(y)xe^{-x(y+1)}. \quad (2.51)$$

2.4.4 Densidade e distribuição condicional

A função distribuição condicional de uma variável aleatória X , dado algum evento B com probabilidade não-nula é definida por (PEEBLES, 2001)

$$F_X(x|B) = P(\{X \leq x|B\}) = \frac{P(\{X \leq x \cap B\})}{P(B)}. \quad (2.52)$$

A função densidade condicional correspondente é definida através da derivada

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx}. \quad (2.53)$$

Densidade e distribuição condicional - condição pontual

Pode-se mostrar (PEEBLES, 2001) que, para variáveis discretas, vale

$$f_X(x|Y = y_k) = \sum_{i=1}^N \frac{P(x_i, y_k)}{P(y_k)} \delta(x - x_i). \quad (2.54)$$

Já para o caso contínuo,

$$f_X(x|Y = y) = f(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}. \quad (2.55)$$

Exercício

44. Encontre $f_Y(y|x)$ para a função densidade definida no Exercício 43.

2.4.5 Independência Estatística

Dois eventos A e B foram definidos como independentes se (e somente se)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \quad (2.56)$$

Da mesma forma, define-se que duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se:

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y) \quad (2.57)$$

ou, de forma equivalente,

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y). \quad (2.58)$$

Usando a densidade e a distribuição condicionais, mostra-se que se duas variáveis aleatórias X e Y forem independentes, vale:

$$f(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)} = f_X(x) \quad (2.59)$$

$$f(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_X(x)} = f_Y(y). \quad (2.60)$$

Assim, as densidades deixam de ser condicionais e tornam-se iguais às marginais.

Exercício

45. Verifique se as tensões do Exercício 43 são independentes.

46. A densidade conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k \cos^2\left(\frac{\pi}{2}xy\right), & -1 < x < 1 \text{ e } -1 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.61)$$

em que $k = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi + Si(\pi)} \approx 0,315$ e o seno integral é definido por

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(\xi)}{\xi} d\xi. \quad (2.62)$$

Determine se X e Y são independentes.

2.5 Operações sobre múltiplas variáveis aleatórias

Nessa seção, estende-se o conceito de valor esperado para o caso de duas ou mais variáveis aleatórias.

2.5.1 Valor esperado de uma função de variáveis aleatórias

O valor esperado de uma função de uma variável aleatória foi definido na Seção 2.3 por

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx. \quad (2.63)$$

Quando mais de uma variável aleatória é envolvida, o valor esperado deve ser tomado em relação a todas as variáveis envolvidas. Por exemplo, se $g(X, Y)$ é uma função de duas variáveis aleatórias X e Y , o valor esperado de $g(., .)$ é dado por

$$\bar{g} = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f_{X, Y}(x, y)dxdy. \quad (2.64)$$

Para N variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_N e uma função dessas variáveis denotada por $g(X_1, \dots, X_N)$, o valor esperado dessa função se torna:

$$\bar{g} = E[g(X_1, \dots, X_N)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_N)f_{X_1, \dots, X_N}(x_1, \dots, x_N)dx_1 \dots dx_N. \quad (2.65)$$

Um resultado que segue diretamente da definição acima é que o *valor esperado de uma soma ponderada de variáveis aleatórias*

$$g(X_1, \dots, X_N) = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i \quad (2.66)$$

é a soma ponderada de seus valores médios:

$$\bar{g} = E \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i \right] = \sum_{i=1}^N \alpha_i E[X_i] \quad (2.67)$$

Momentos conjuntos em torno da origem

Uma importante aplicação do valor esperado é na definição de *momentos conjuntos* em torno da origem. Eles são denotados por m_{nk} e são definidos por

$$m_{nk} = E[X^n Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (2.68)$$

para o caso de duas variáveis aleatórias X e Y .

Claramente, $m_{n0} = E[X^n]$ são os momentos m_n de X e $m_{0k} = E[Y^k]$ são os momentos de Y .

A soma $n + k$ é chamada de *ordem* dos momentos. Assim, m_{02} , m_{20} e m_{11} são todos momentos de segunda ordem de X e Y .

Os momentos de primeira ordem $m_{01} = E[Y] = \bar{Y}$ e $m_{10} = E[X] = \bar{X}$ são os valores esperados de X e Y respectivamente e são as coordenadas do “centro de gravidade” da função $f_{X,Y}(x, y)$.

O momento de segunda ordem $m_{11} = E[XY]$ é chamado de *correlação* de X e Y . Ele é tão importante que recebe um símbolo especial R_{XY} . Assim,

$$R_{XY} = m_{11} = E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy. \quad (2.69)$$

Se a correlação puder ser escrita na forma

$$R_{XY} = E[X] \cdot E[Y], \quad (2.70)$$

então X e Y são ditas *não-correlacionadas*.

A independência estatística de X e Y é suficiente para garantir que elas são não-correlacionadas. Porém, o contrário não é verdade em geral. Ou seja, *independência implica não-correlação, mas não-correlação não implica independência*.

Se $R_{XY} = 0$ as variáveis X e Y são ditas *ortogonais*. Resumindo:

- $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \Rightarrow X$ e Y são independentes

- $R_{XY} = E[X] \cdot E[Y] \Rightarrow X$ e Y são não-correlacionadas
- $R_{XY} = 0 \Rightarrow X$ e Y são ortogonais
- X e Y são independentes $\Rightarrow X$ e Y são não-correlacionadas

Exercício

47. Seja X uma variável aleatória com valor médio $\bar{X} = E[X] = 3$ e variância $\sigma_X^2 = 2$ e uma outra variável Y dada por $Y = -6X + 22$. Pede-se:

- $E[X^2]$
- \bar{Y}
- R_{XY}
- as variáveis são correlacionadas?
- as variáveis são ortogonais?

Momentos conjuntos centrais

Uma outra aplicação importante da definição de valores esperado é a definição de *momentos centrais conjuntos*. Para duas variáveis aleatórias X e Y , estes momentos denotados por $\mu_{n,k}$ são dados por:

$$\mu_{nk} = E \left[(X - \bar{X})^n (Y - \bar{Y})^k \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})^n (y - \bar{Y})^k f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (2.71)$$

Os momentos centrais de segunda ordem

$$\mu_{20} = E \left[(X - \bar{X})^2 \right] = \sigma_X^2 \quad (2.72)$$

$$\mu_{02} = E \left[(Y - \bar{Y})^2 \right] = \sigma_Y^2 \quad (2.73)$$

$$(2.74)$$

são as variâncias de X e Y .

O momento conjunto de segunda ordem μ_{11} é muito importante. É chamado de *co-variância* de X e Y é simbolizado por C_{XY} . Assim,

$$C_{XY} = \mu_{11} = E[(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{X})(y - \bar{Y}) f_{X,Y}(x, y) dx dy. \quad (2.75)$$

Expandindo-se o produto $(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$ esta integral se reduz a

$$C_{XY} = R_{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y} = R_{XY} - E[X] \cdot E[Y] \quad (2.76)$$

Se X e Y forem independentes ou não-correlacionadas, então $R_{XY} = E[X] \cdot E[Y]$ e $C_{XY} = 0$. Se X e Y forem ortogonais, então $C_{XY} = -E[X] \cdot E[Y]$. Claramente, $C_{XY} = 0$ se X ou Y também tiverem média nula além de serem ortogonais.

O momento de segunda ordem normalizado

$$\rho = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.77)$$

é conhecido como *coeficiente de correlação* de X e Y . Pode-se mostrar (PEEBLES, 2001) que $-1 \leq \rho \leq 1$.

Uma aplicação direta das definições acima é que se X é uma soma ponderada de variáveis aleatórias X_i , $X = \sum_{i=1}^N \alpha_i X_i$, então

$$E[X] = \sum_{i=1}^N \alpha_i \bar{X}_i \quad (2.78)$$

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \sigma_{X_i}^2. \quad (2.79)$$

Exercício

48. (PEEBLES, 2001) Num sistema de controle, sabe-se que uma tensão aleatória X tem média $\bar{X} = m_1 = -2V$ e momento de segunda ordem $\bar{X}^2 = m_2 = 9V^2$. Se a tensão X é amplificada por um amplificador que fornece como saída $Y = -1,5X + 2$, encontre σ_X^2 ,

$$\bar{Y}, \bar{Y}^2, \sigma_Y^2 \text{ e } R_{XY}.$$

2.5.2 Variáveis aleatórias gaussianas conjuntas

Variáveis aleatórias gaussianas são muito importantes porque aparecem praticamente em todas as áreas da Engenharia e das Ciências. Nesta seção o caso de duas variáveis aleatórias conjuntas gaussianas é examinado.

Duas variáveis aleatórias X e Y são ditas conjuntamente gaussianas se sua função densidade conjunta é

$$f_{X,Y} = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\bar{X})^2}{\sigma_X^2} - \frac{2\rho(x-\bar{X})(y-\bar{Y})}{\sigma_X\sigma_Y} + \frac{(y-\bar{Y})^2}{\sigma_Y^2} \right] \right\} \quad (2.80)$$

em que $\bar{X} = E[X]$, $\bar{Y} = E[Y]$, $\sigma_X^2 = E[(X-\bar{X})^2]$, $\sigma_Y^2 = E[(Y-\bar{Y})^2]$ e $\rho = E[(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})] = \frac{C_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}$.

A Figura 2.13 mostra um gráfico da função densidade gaussiana bidimensional. Seu máximo ocorre em (\bar{X}, \bar{Y}) .

Da Eq. (2.80), se $\rho = 0$, correspondendo a variáveis não-correlacionadas, $f_{XY}(x, y)$ pode ser reescrita como

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad (2.81)$$

em que $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ são as densidades marginais de X e Y e dadas por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-\bar{X})^2}{2\sigma_X^2}} \quad (2.82)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} e^{-\frac{(y-\bar{Y})^2}{2\sigma_Y^2}}. \quad (2.83)$$

Assim, conclui-se que *quaisquer variáveis aleatórias gaussianas não-correlacionadas são independentes*.

Exercício

49. Sejam duas variáveis aleatórias gaussianas X e Y com médias \bar{X} e \bar{Y} , variâncias σ_X^2 e

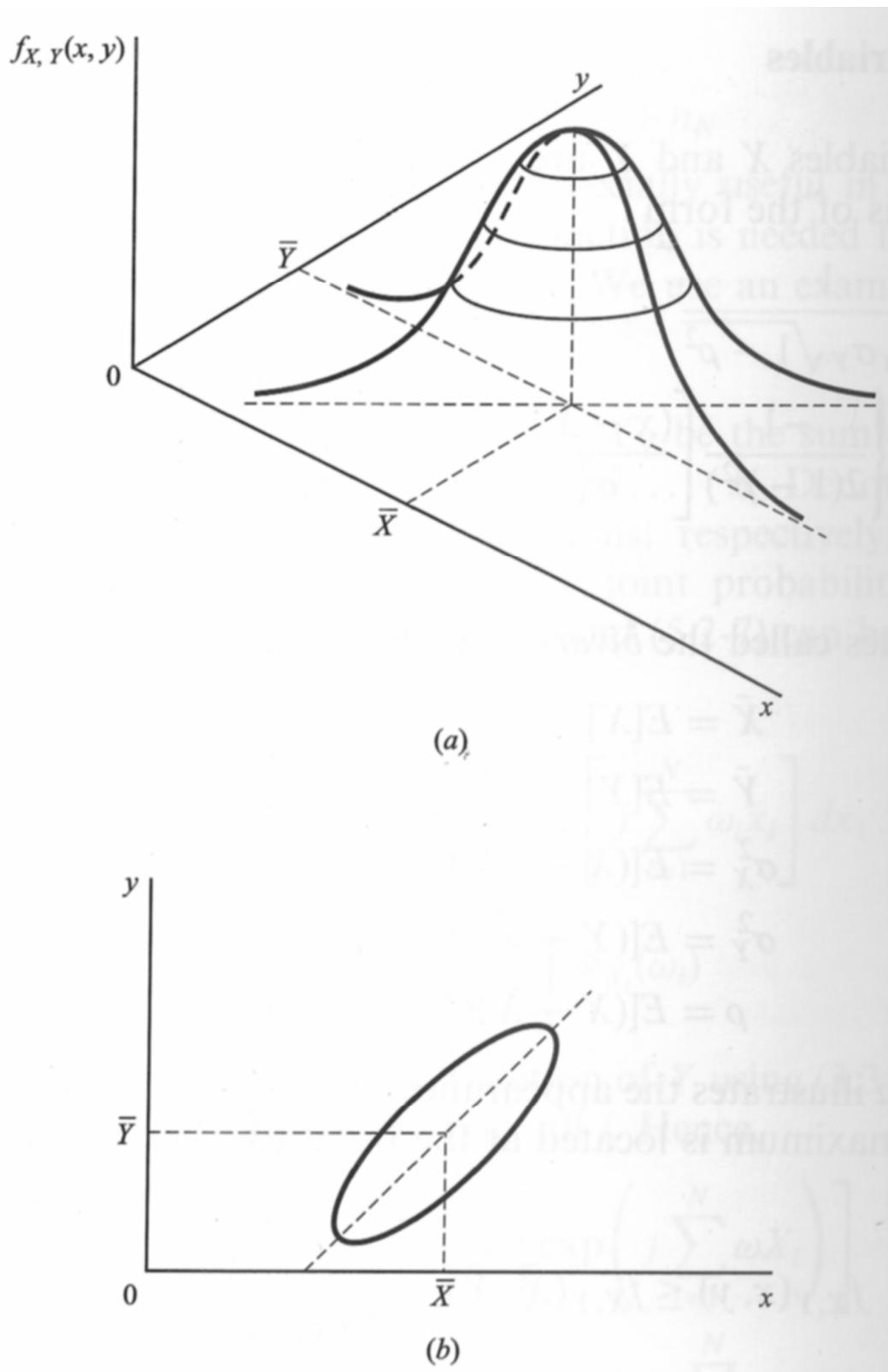


Figura 2.13: Densidade gaussiana bidimensional (PEEBLES, 2001).

σ_Y^2 e coeficiente de correlação ρ . Determine o ângulo θ tal que as variáveis

$$A = X \cos \theta + Y \sin \theta \quad (2.84)$$

$$B = -X \sin \theta + Y \cos \theta \quad (2.85)$$

sejam independentes.

50. (PEEBLES, 2001) Suponha que a queda de neve anual (quantidade de neve acumulada em metros) em dois hotéis de esqui alpinos vizinhos seja representada por variáveis aleatórias gaussianas conjuntas X e Y para as quais $\rho = 0,82$, $\sigma_X = 1,5\text{m}$, $\sigma_Y = 1,2\text{m}$ e $R_{XY} = 81,476\text{m}^2$. Se a queda de neve média no primeiro hotel é 10m, qual a taxa de queda média no outro hotel?

2.6 Processos aleatórios - características temporais

2.6.1 Definição matemática de um processo aleatório

Um processo aleatório ou estocástico é um espaço de amostras em que cada elemento é associado a uma função do tempo.

Da mesma forma que para uma variável aleatória, o resultado de um experimento é mapeado em um número, em um processo aleatório cada resultado é associado a uma forma de onda, ou seja, a uma função do tempo. A Figura 2.14 ilustra esta situação.

Considere um experimento aleatório especificado pelos eventos s definidos num espaço de amostras S e pelas probabilidades desses eventos. Suponha que se atribua a cada ponto s uma função do tempo de acordo com a regra

$$X(t, s), -T \leq t \leq T \quad (2.86)$$

em que $2T$ é o intervalo de observação total.

Para um s_j fixo, o gráfico da função $X(t, s_j)$ pelo tempo t é chamado *realização* ou *função*

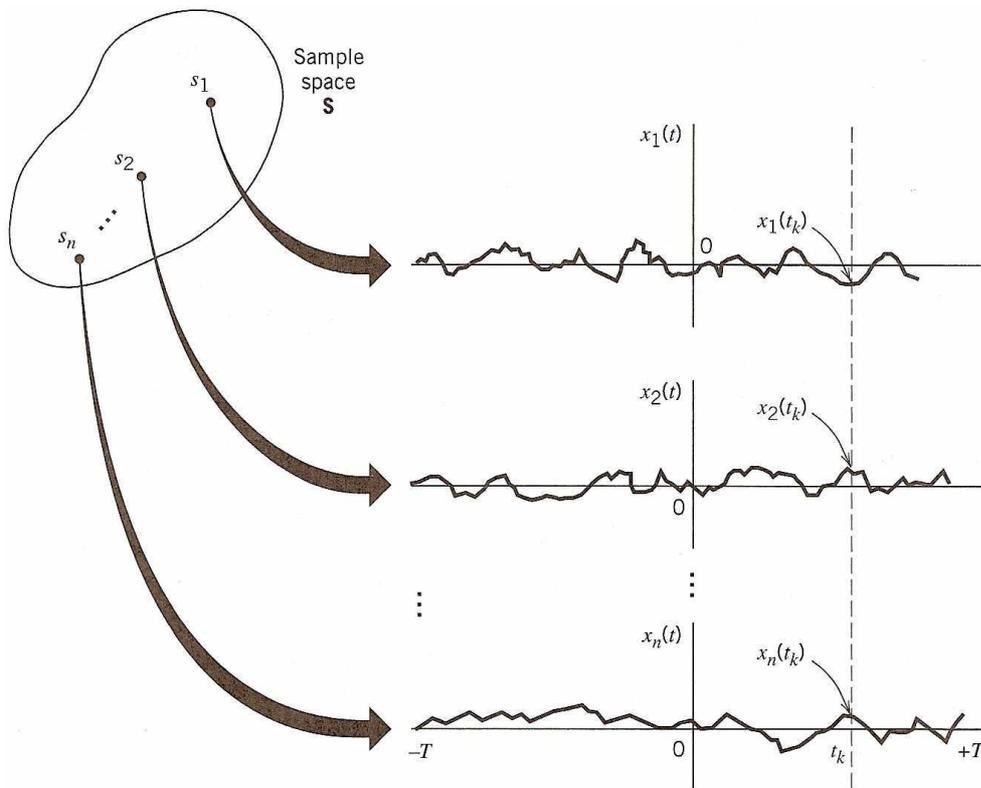


Figura 2.14: Um conjunto de funções amostras (HAYKIN, 2000).

amostra do processo aleatório. Para simplificar a notação, denota-se essa função amostra por

$$X_j(t) = X(t, s_j). \quad (2.87)$$

Da Figura 2.14, nota-se que para um tempo fixo t_k dentro do intervalo de observação, o conjunto de números

$$\{x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)\} \quad (2.88)$$

constituem uma *variável aleatória*. Assim um processo aleatório pode ser visto como um conjunto indexado de variáveis aleatórias.

Por simplicidade de notação, costuma-se suprimir o s e usar simplesmente $X(t)$ para representar um processo aleatório.

2.6.2 Processos estacionários

Um processo é dito *estacionário* se quando dividido em intervalos de tempo as várias seções do processo exibem essencialmente as mesmas propriedades estatísticas. Caso contrário é dito *não-estacionário*.

Para ser mais preciso, considere o processo aleatório $X(t)$ que se inicializou em $t = -\infty$. Sejam $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$ as variáveis aleatórias obtidas pela observação do processo aleatório $X(t)$ nos instantes t_1, t_2, \dots, t_k respectivamente. A função distribuição conjunta deste conjunto de variáveis é $F_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Suponha em seguida que desloque-se todos os tempos de observação de τ , obtendo novas variáveis $X(t_1 + \tau), X(t_2 + \tau), \dots, X(t_k + \tau)$. A função distribuição conjunta deste novo conjunto de variáveis é $F_{X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_k+\tau)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

O processo aleatório $X(t)$ é dito *estacionário no sentido estrito* ou *estritamente estacionário* se

$$F_{X(t_1+\tau), X(t_2+\tau), \dots, X(t_k+\tau)}(x_1, x_2, \dots, x_k) = F_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (2.89)$$

quaisquer que sejam τ, k e os instantes de observação t_1, \dots, t_k .

Situações de especial interesse:

1. Para $k = 1$, tem-se

$$F_{X(t)}(x) = F_{X(t+k)}(x) = F_X(x), \quad (2.90)$$

para todos t e τ . Ou seja, a função distribuição de primeira ordem de um processo estacionário independe do tempo.

2. Para $k = 2$ e $\tau = -t_1$,

$$F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = F_{X(0), X(t_2-t_1)}(x_1, x_2) \quad (2.91)$$

para todo t_1 e t_2 . Isto é, a função distribuição de segunda ordem de um processo esta-

cionário depende apenas da diferença entre os tempos de observação e não dos particulares instantes de observação.

Exercícios

51. (HAYKIN, 2000) Considere um processo aleatório $X(t)$ definido por

$$X(t) = \sin(2\pi f_c t) \quad (2.92)$$

no qual a frequência f_c é uma variável aleatória uniformemente distribuída sobre um intervalo $[0, W]$. Mostre que $X(t)$ é não-estacionário.

52. (HAYKIN, 2000) Considere o processo senoidal

$$X(t) = A \cos(2\pi f_c t) \quad (2.93)$$

em que a frequência f_c é constante e a amplitude A é uniformemente distribuída:

$$f_A(a) = \begin{cases} 1, & 0 \leq a \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.94)$$

Determine se este processo é ou não estritamente estacionário.

2.6.3 Funções média, correlação e co-variância

Considere um processo aleatório $X(t)$. Define-se a *média* do processo $X(t)$ como o valor esperado da variável aleatória obtida observando o processo num instante t , ou seja,

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx \quad (2.95)$$

em que $f_{X(t)}(x)$ é a função densidade de probabilidade de primeira ordem do processo.

Para um processo estritamente estacionário, $f_{X(t)}(x)$ é independente de t . Conseqüentemente, a média de um processo estritamente estacionário é uma constante, ou seja,

$$\mu_x(t) = \mu_x \quad (2.96)$$

para todo t .

Define-se a *função de autocorrelação* de um processo $X(t)$ como o valor esperado do produto de duas variáveis aleatórias, $X(t_1)$ e $X(t_2)$, obtidas pela observação do processo $X(t)$ nos instantes t_1 e t_2 respectivamente.

Especificamente, escreve-se

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (2.97)$$

Para um processo estritamente estacionário, a *função de autocorrelação depende apenas da diferença entre os instantes t_2 e t_1* . Assim, neste caso, definindo-se $\tau = t_2 - t_1$, pode-se reescrever a Eq. 2.97 como

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t + \tau)]. \quad (2.98)$$

Da mesma forma, a função de autocovariância para um processo estritamente estacionário é definida por

$$C_{XX}(\tau) = E[(X(t) - \mu_X)(X(t + \tau) - \mu_X)] \Rightarrow \quad (2.99)$$

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \mu_X^2 \quad (2.100)$$

Um processo cuja média é constante e a função de autocorrelação é função apenas de τ é chamado de *estacionário em sentido amplo* ou simplesmente *estacionário*.

Propriedades da função de autocorrelação

1. $R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$
2. $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$ (simetria par)
3. $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$

Assim, vê-se que a função de autocorrelação não pode assumir um formato qualquer. A Figura 2.15 mostra dois exemplos de $R_{XX}(\tau)$

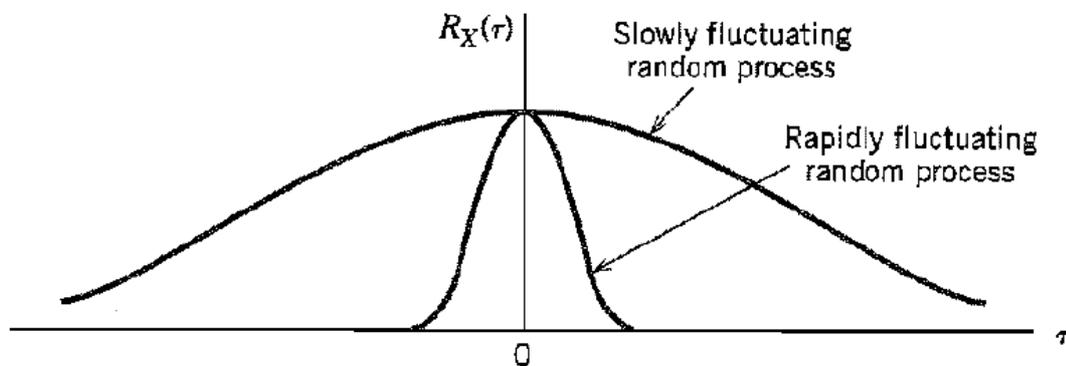


Figura 2.15: Exemplos de funções de autocorrelação (HAYKIN, 2000).

Exercícios

53. Demonstre a propriedade (3).
54. (HAYKIN, 2000) Considere um sinal senoidal com fase aleatória, definida por

$$X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta) \quad (2.101)$$

em que A e f_c são constantes e Θ é uma variável aleatória *uniformemente distribuída* no intervalo $[-\pi, \pi]$. Determine a função de autocorrelação $R_{XX}(\tau)$ deste processo estacionário.

Função de correlação cruzada

Dados dois processos estacionários $X(t)$ e $Y(t)$ com funções de autocorrelação $R_{XX}(\tau)$ e $R_{YY}(\tau)$, definem-se suas funções de correlação cruzada como

$$R_{XY}(\tau) = E[X(t)Y(t + \tau)] \text{ e} \quad (2.102)$$

$$R_{YX}(\tau) = E[Y(t)X(t + \tau)]. \quad (2.103)$$

As propriedades de correlação de dois processos $X(t)$ e $Y(t)$ podem ser mostradas convenientemente na forma de matriz como

$$\mathbf{R}(\tau) = \begin{bmatrix} R_{XX}(\tau) & R_{XY}(\tau) \\ R_{YX}(\tau) & R_{YY}(\tau) \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Observe que

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \quad (2.105)$$

Exercício

55. (HAYKIN, 2000) Considere um par de processos modulados em quadratura $X_1(t)$ e $X_2(t)$ que são relacionados a um processo $X(t)$ como se segue:

$$X_1(t) = X(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta) \quad (2.106)$$

$$X_2(t) = X(t) \sin(2\pi f_c t + \Theta) \quad (2.107)$$

em que f_c é uma frequência de portadora e a variável aleatória Θ é uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi]$. Além disso, Θ é independente de $X(t)$. Encontre a correlação cruzada entre $X_1(t)$ e $X_2(t)$.

2.6.4 Processos ergódicos

O valor esperado de um processo aleatório $X(t)$ é calculado “através da média no conjunto”. Por exemplo, a média de um processo aleatório $X(t)$ em um instante fixo t_k é o valor esperado da variável aleatória $X(t_k)$ que descreve todos os valores das funções-amostras no instante

$t = t_k$.

Pode-se definir também médias temporais que são tomadas “ao longo do processo”. Por exemplo, a média temporal de uma função-amostra $x(t)$ definida no intervalo $-T \leq t \leq T$ é definida por

$$\mu_x(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (2.108)$$

Da mesma forma, a *autocorrelação temporal* de uma função-amostra $x(t)$ é definida por

$$R_x(\tau, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t) dt. \quad (2.109)$$

Um processo é dito *ergódico em média* se suas médias temporais e de conjunto coincidem quando $T \rightarrow \infty$, ou seja

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_x(T) = \mu_X \quad (2.110)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{var} [\mu_x(T)] = 0 \quad (2.111)$$

Um processo é dito *ergódico em termos da autocorrelação* se

$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_x(\tau, T) = R_X(\tau) \quad (2.112)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{var} [R_x(\tau, T)] = 0 \quad (2.113)$$

Vale ressaltar que uma condição necessária para a ergodicidade é a estacionariedade do processo.

Exercício

56. (HAYKIN, 2000) Um processo aleatório $X(t)$ é definido por

$$X(t) = A \cos(2\pi f_c t) \quad (2.114)$$

em que A é uma variável aleatória gaussiana com média nula e variância σ_A^2 . Este processo aleatório é aplicado a um integrador ideal, produzindo a saída

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau. \quad (2.115)$$

- (a) Determine a função densidade de probabilidade da saída $Y(t)$ em um instante particular t_k .
- (b) Determine se $Y(t)$ é ou não estacionário.
- (c) Determine se $Y(t)$ é ou não ergódico.

57. (HAYKIN, 2000) Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição gaussiana independentes, cada uma com média nula e variância unitária. Defina o processo gaussiano

$$Z(t) = X \cos(2\pi t) + Y \sin(2\pi t) \quad (2.116)$$

- (a) Determine a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias $Z(t_1)$ e $Z(t_2)$ obtidas da observação de $Z(t)$ nos instantes t_1 e t_2 respectivamente.
- (b) O processo $Z(t)$ é estacionário? Justifique.

58. (HAYKIN, 2000) Prove as duas seguintes propriedades da função de autocorrelação $R_{XX}(\tau)$ de um processo aleatório $X(t)$:

- (a) Se $X(t)$ contém um componente DC igual a A , então $R_{XX}(\tau)$ conterá uma componente constante igual a A^2 .
- (b) Se $X(t)$ contém uma componente senoidal, então $R_{XX}(\tau)$ conterá uma componente senoidal de mesma frequência.

59. (HAYKIN, 2000) A onda quadrada $x(t)$ da Figura 2.16 de amplitude constante A , período T_0 e atraso t_d representa uma função-amostra de um processo aleatório $X(t)$. O atraso é

aleatório, descrito pela função densidade de probabilidades

$$f_{T_d}(t_d) = \begin{cases} \frac{1}{T_0}, & -\frac{1}{2}T_0 \leq t_d \leq \frac{1}{2}T_0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.117)$$

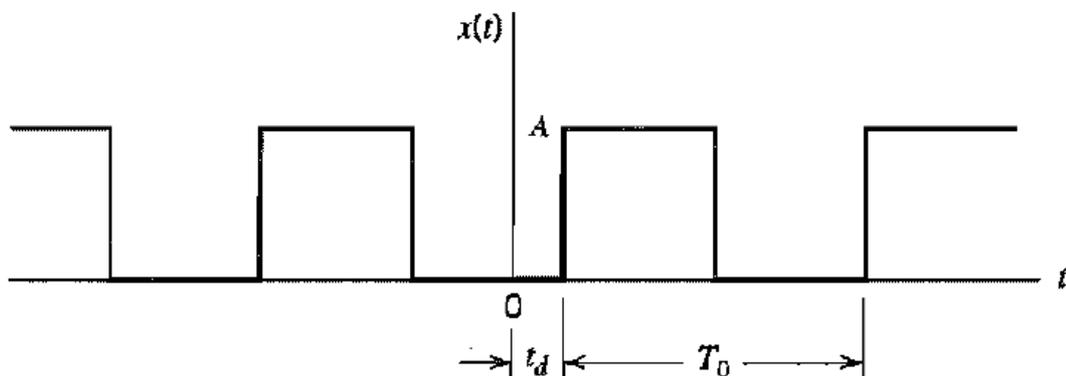


Figura 2.16: Função-amostra do processo do Exercício 59(HAYKIN, 2000).

- (a) Determine a função densidade de probabilidade da variável aleatória $X(t_k)$ obtida da observação do processo aleatório $X(t)$ no instante t_k .
 - (b) Determine a média e a função de autocorrelação usando média de conjunto
 - (c) Determine a média e a função de autocorrelação usando média temporal
 - (d) Estabeleça se o processo $X(t)$ é estacionário ou não. Ele é ergódico?
60. (LATHI, 1998a) Dado o processo aleatório $X(t) = k$ em que k é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(-1, 1)$. Pede-se:
- (a) Esboce funções-amostras deste processo.
 - (b) Determine $E[X(t)]$
 - (c) Determine $R_{XX}(t_1, t_2)$
 - (d) Este processo é estacionário?
 - (e) Este processo é ergódico?
 - (f) Se o processo for estacionário, qual sua potência P_X , ou seja, seu valor médio quadrático $E[X(t)^2]$

61. (LATHI, 1998a) Mostre que para um processo estacionário $x(t)$ e sem componentes periódicas

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_X(\tau) = \bar{X}^2 \quad (2.118)$$

62. (PEEBLES, 2001) Um processo estacionário e ergódico $X(t)$ sem componentes periódicas tem função de autocorrelação

$$R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1 + 6\tau^2} \quad (2.119)$$

Determine sua variância σ_X^2 .

2.7 Processos aleatórios - características espectrais

Para sinais determinísticos, já vimos como fazer a representação no domínio da frequência através da transformada de Fourier. Como fazer o mesmo para sinais aleatórios? Essa questão é discutida a seguir.

2.7.1 A densidade espectral de potência e suas propriedades

As propriedades espectrais de um sinal determinístico $x(t)$ estão contidas em sua *transformada de Fourier* $X(\omega)$ dada por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.120)$$

Conhecida $X(\omega)$, pode-se recuperar $x(t)$ usando a *transformada de Fourier inversa*

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.121)$$

Assim, $X(\omega)$ forma uma descrição completa de $x(t)$ e vice-versa.

A aplicação da Eq. (2.120) a um processo aleatório encontra problemas porque $X(\omega)$ pode não existir para algumas das funções amostras.

Para uma boa representação dos processos estocásticos no domínio da frequência é necessário o conceito de *densidade espectral de potência* (PSD - *Power Spectral Density*).

A densidade espectral de potência

Considere um sinal $x(t)$ definido para $-\infty < t < \infty$ e seja

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & -T < t < T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (2.122)$$

Usando esta notação, a energia do sinal $x_T(\cdot)$, $E(T)$ é dada por (ver Eq. (1.3), página 7):

$$E(T) = \int_{-T}^T x_T^2(t) dt = \int_{-T}^T x^2(t) dt. \quad (2.123)$$

O Teorema de Parseval (LATHI, 1998a) permite calcular $E(T)$ também por

$$E(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.124)$$

A potência média do sinal $x(t)$ é, portanto, dada por (ver Eq. (1.4), página 7):

$$\begin{aligned} P_{XX} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E(T) \Rightarrow \\ P_{XX} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Quando considera-se um processo estocástico $X(t)$, o cálculo da potência deve ser realizado sobre $E[X(t)^2]$ e $E[|X_T(\omega)|^2]$. Assim,

$$P_{XX} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt \quad \text{ou} \quad (2.126)$$

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T} d\omega. \quad (2.127)$$

Define-se então a *densidade espectral de potência* (PSD) de um processo aleatório por

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E[|X_T(\omega)|^2]}{2T}. \quad (2.128)$$

Desta forma,

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega. \quad (2.129)$$

Exercício

63. (PEEBLES, 2001) Considere o processo aleatório

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta) \quad (2.130)$$

em que A e ω_0 são constantes reais e Θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. Encontre a potência média P_{XX} usando a Eq. (2.126).

Propriedades da densidade espectral de potência

1. $S_{XX}(\omega) \geq 0$
2. $S_{XX}(-\omega) = S_{XX}(\omega)$, para $X(t)$ real
3. $S_{XX}(\omega)$ é real
4. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) d\omega = P_{XX}$

2.7.2 Relação entre PSD e função de autocorrelação

Pode-se mostrar (PEEBLES, 2001) que a função de autocorrelação $R_{XX}(\tau)$ e a PSD $S_{XX}(\omega)$ de um processo $X(t)$ estacionário formam um par transformado de Fourier. Ou seja,

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.131)$$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.132)$$

ou

$$S_{XX}(\omega) = \mathfrak{F}[R_{XX}(\tau)] \quad \text{e} \quad R_{XX}(\tau) = \mathfrak{F}^{-1}[S_{XX}(\omega)]. \quad (2.133)$$

Assim, a representação espectral conveniente para um processo estocástico, sua PSD, é a transformada de Fourier de sua função de autocorrelação ($R_{XX}(\tau)$) que é uma função determinística.

Exercícios

64. (PEEBLES, 2001) Encontre a PSD para um processo cuja função de autocorrelação é

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A_0^2}{2} \cos(\omega_0 \tau). \quad (2.134)$$

65. (PEEBLES, 2001) Assuma que um processo estacionário $X(t)$ tem função de autocorrelação

$$R_{XX}(\tau) = \begin{cases} A_0 \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right), & -T \leq \tau \leq T \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.135)$$

Encontre a PSD deste processo.

2.7.3 Densidade espectral de potência cruzada e suas propriedades

Considere um processo aleatório real $W(t)$ dado pela soma de dois processos estacionários $X(t)$ e $Y(t)$:

$$W(t) = X(t) + Y(t). \quad (2.136)$$

A função de autocorrelação de $W(t)$ é

$$\begin{aligned} R_{WW}(\tau) &= E [W(t)W(t + \tau)] = \\ &= E \{ [X(t) + Y(t)] [X(t + \tau) + Y(t + \tau)] \} = \\ &= R_{XX}(\tau) + R_{XY}(\tau) + R_{YX}(\tau) + R_{YY}(\tau). \end{aligned} \quad (2.137)$$

Calculando a transformada de Fourier dos dois lados da expressão acima, obtém-se

$$S_{WW}(\omega) = S_{XX}(\omega) + S_{YY}(\omega) + \mathfrak{F} \{R_{XY}(\tau)\} + \mathfrak{F} \{R_{YX}(\tau)\} \quad (2.138)$$

Estes dois termos finais serão definidos pela densidade espectral cruzada a seguir.

A densidade espectral de potência cruzada

A potência cruzada de dois sinais $x(t)$ e $y(t)$ é definida por

$$P_{XY} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t)dt. \quad (2.139)$$

Define-se a densidade espectral de potência cruzada entre dois processos $X(t)$ e $Y(t)$, $S_{XY}(\omega)$ e $S_{YX}(\omega)$ como

$$S_{XY}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E [X_T^*(\omega)Y_T(\omega)]}{2T} \quad (2.140)$$

$$S_{YX}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E [Y_T^*(\omega)X_T(\omega)]}{2T} \quad (2.141)$$

Com esta definição,

$$P_{XY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XY}(\omega)d\omega \text{ e} \quad (2.142)$$

$$P_{YX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{YX}(\omega)d\omega. \quad (2.143)$$

A potência cruzada total $P_{XY} + P_{YX}$ pode ser interpretada como a potência adicional que dois processos são capazes de gerar além da potência individual deles pelo fato deles não serem ortogonais ($R_{XY}(\tau) \neq 0$).

Propriedades da densidade de potência cruzada

Algumas propriedades da densidade espectral de potência são citadas a seguir. As demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em (PEEBLES, 2001).

1. $S_{XY}(\omega) = S_{YX}(-\omega) = S_{YX}^*(\omega)$
2. $\text{Re} [S_{XY}(\omega)]$ e $\text{Re} [S_{YX}(\omega)]$ são funções pares de ω

3. $\text{Im}[S_{XY}(\omega)]$ e $\text{Im}[S_{YX}(\omega)]$ são funções ímpares de ω
4. $S_{XY}(\omega) = 0$ e $S_{YX}(\omega) = 0$ se $X(t)$ e $Y(t)$ são ortogonais
5. Se $X(t)$ e $Y(t)$ são não-correlacionadas e têm médias constantes \bar{X} e \bar{Y}

$$S_{XY}(\omega) = S_{YX}(\omega) = 2\pi\bar{X}\bar{Y}\delta(\omega) \quad (2.144)$$

6.

$$S_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.145)$$

$$S_{YX}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.146)$$

ou seja $S_{XY}(\omega) = \mathfrak{F}[R_{XY}(\tau)]$ e $S_{YX}(\omega) = \mathfrak{F}[R_{YX}(\tau)]$.

Exercícios

66. (PEEBLES, 2001) Suponha que seja dado o espectro de potência cruzado definido por

$$S_{XY}(\omega) = \begin{cases} a + jb\frac{\omega}{W}, & -W < \omega < W \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.147)$$

em que $W > 0$, a e b são constantes reais. Encontre $R_{XY}(\tau)$.

67. (PEEBLES, 2001) Repita o Problema 66 para

$$S_{XY} = \frac{8}{(\alpha + j\omega)^3} \quad (2.148)$$

2.7.4 Definições sobre ruídos

Em muitos problemas práticos é útil caracterizar o ruído por meio de sua PSD. A seguir, define-se duas formas de ruído com base no seu espectro de potências.

Ruído branco e colorido

Uma função-amostra $n(t)$ de um processo aleatório estacionário $N(t)$ é chamado de *ruído branco* se a PSD de $N(t)$ é constante em todas as frequências. Assim, define-se

$$S_{NN}(\omega) = \frac{N_0}{2} \quad (2.149)$$

para o ruído branco, em que N_0 é uma constante real e positiva.

Aplicando a transformada de Fourier inversa a Eq. (2.149), a função de autocorrelação de $N(t)$ é dada por

$$R_{NN}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (2.150)$$

As duas funções acima são ilustradas na Figura 2.17.

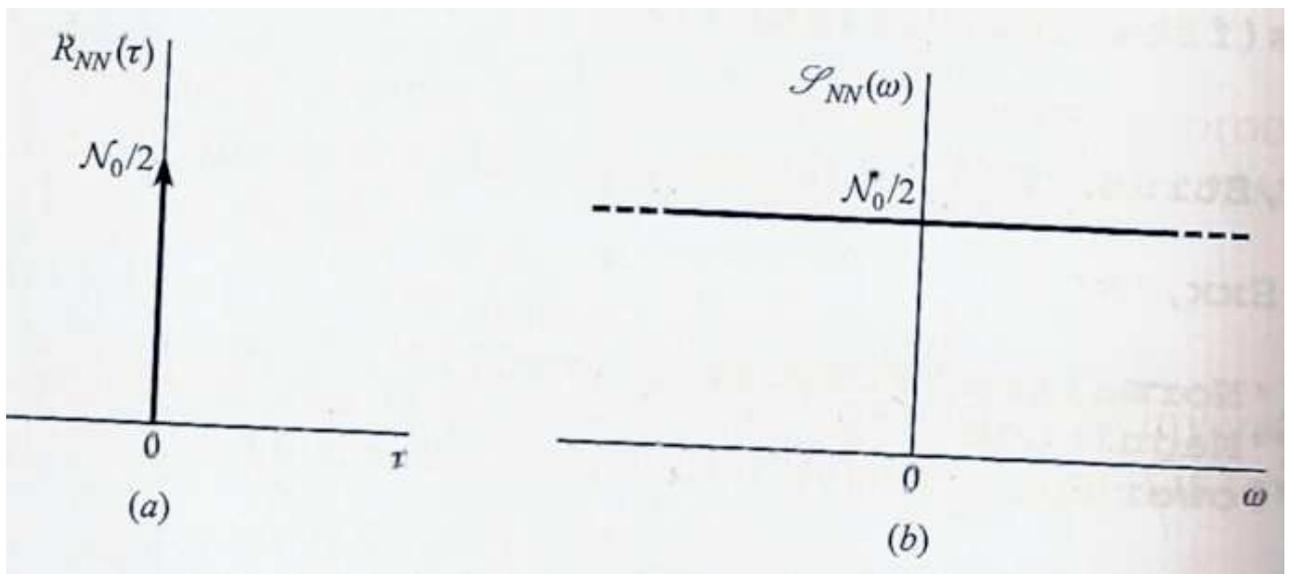


Figura 2.17: (a) função de autocorrelação e (b) densidade espectral de potência de um ruído branco (PEEBLES, 2001).

O nome ruído branco vem da analogia com a luz branca que contém todas as frequências de luz visível em seu espectro.

É impossível gerar um ruído branco, o que pode ser concluído pelo fato de sua potência ser infinita:

$$P_{NN} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega) d\omega = \infty. \quad (2.151)$$

No entanto, vários ruídos do mundo real podem ser bem modelados como ruídos brancos. O *ruído térmico* gerado pela agitação dos elétrons em qualquer condutor elétrico tem um espectro de potência que é constante até frequências muito altas ($\sim 1000\text{GHz}$) antes de decair (PEEBLES, 2001). Desta forma, o ruído térmico tem um espectro aproximadamente plano em todas as frequências usadas em sistemas de rádio, microondas e ondas micrométricas.

Um processo que tem um espectro de potência constante e não-nulo sobre uma faixa de frequência *finita* e zero fora desta é chamado de *ruído branco com banda limitada*. A Figura 2.18(a) mostra a densidade espectral de um ruído dessa forma que é passa-baixas.

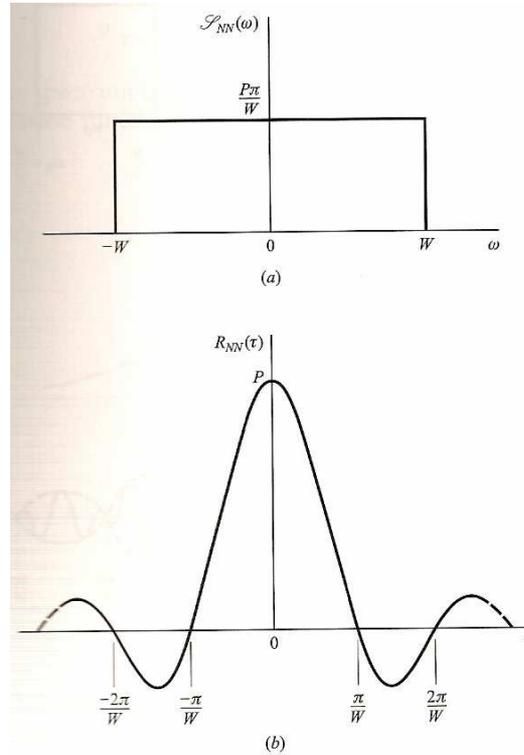


Figura 2.18: (a) densidade espectral de potência e (b) função de autocorrelação de um ruído branco passa-baixas (PEEBLES, 2001).

Neste caso,

$$S_{NN}(\omega) = \begin{cases} \frac{P\pi}{W}, & -W < \omega < W \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.152)$$

A transformada inversa da Eq. (2.152) fornece a função de autocorrelação mostrada na Figura 2.18(b):

$$R_{NN}(\tau) = P \frac{\sin(W\tau)}{W\tau} \quad (2.153)$$

A constante P é a potência do ruído.

Um ruído branco de banda limitada também pode ser passa-faixa como mostrado na Figura 2.19.

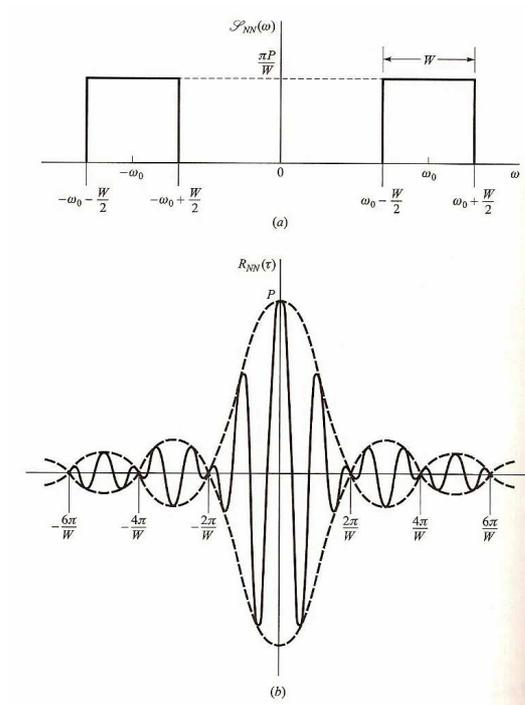


Figura 2.19: (a) densidade espectral de potência e (b) função de autocorrelação de um ruído branco passa-faixa. (PEEBLES, 2001).

A PSD e a função de autocorrelação deste processo são

$$S_{NN}(\omega) = \begin{cases} \frac{P\pi}{W}, & \omega_0 - \frac{W}{2} < |\omega| < \omega_0 + \frac{W}{2} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.154)$$

$$R_{NN}(\tau) = P \frac{\sin\left(\frac{W\tau}{2}\right)}{W\frac{\tau}{2}} \cos(\omega_0\tau) \quad (2.155)$$

$$(2.156)$$

em que ω_0 e W são constantes e P é a potência do ruído.

Novamente, em analogia ao que ocorre com a luz colorida que possui apenas uma parte do espectro de frequências da luz visível, define-se como *ruído colorido* qualquer ruído que não seja branco.

Exercício

68. Um processo ruído colorido estacionário $N(t)$ tem função de autocorrelação

$$R_{NN}(\tau) = P e^{-3|\tau|}. \quad (2.157)$$

Determine sua PSD $S_{NN}(\omega)$.

2.8 Sistemas lineares com entradas aleatórias

Até agora neste capítulo, um sinal aleatório foi descrito como uma função-amostra de um processo estocástico. Mostrou-se que métodos no domínio do tempo, baseado em funções de correlação e métodos no domínio da frequência baseados em PSDs constituem formas poderosas de definir o comportamento de sinais aleatórios. É necessário agora descrever como esses sinais interagem com os sistemas LIT que foram estudados na Seção 1.3.2 da página 25.

2.8.1 Rápida revisão de sistemas LIT

Nessa seção, revisita-se e estende-se alguns conceitos tratados nas Seções 1.3.2 da página 25.

Um sistema LIT genérico é mostrado na Figura 2.20.

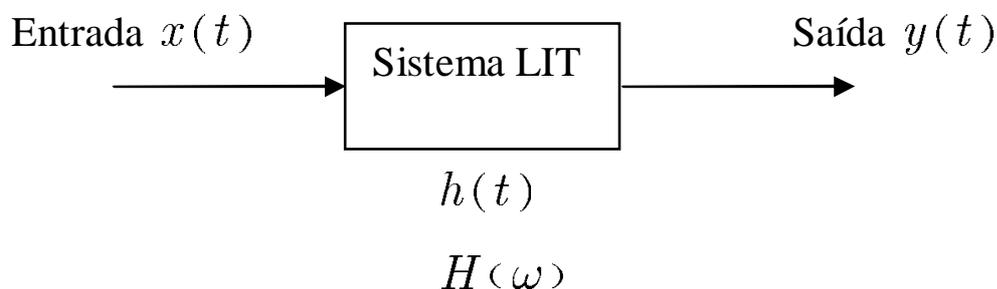


Figura 2.20: Representação de um sistema LIT com entrada $x(t)$, saída $y(t)$, resposta impulsiva $h(t)$ e resposta em frequência $H(\omega)$.

Sistemas lineares e invariantes no tempo (LIT)

Vimos na Seção 2.20 que um sistema LIT é totalmente caracterizado por sua resposta impulsiva $h(t)$. Dada uma entrada $x(t)$, a saída do sistema é calculada pela integral de convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad (2.158)$$

Função de transferência de sistemas LIT's

Calculando a transformada de Fourier de $y(t)$ na Eq. (2.158) pode-se chegar a uma relação entre $Y(\omega)$, $X(\omega)$ e $H(\omega)$, as transformadas de $y(t)$, $x(t)$ e $h(t)$, respectivamente.

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)e^{-j\omega(t - \tau)} dt \right] e^{-j\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)H(\omega)e^{-j\omega\tau} d\tau = H(\omega)X(\omega) \end{aligned} \quad (2.159)$$

A função $H(\omega)$ é chamada de *função de transferência do sistema*. Repare que $H(\omega)$ é a razão entre a transformada de Fourier da saída $Y(\omega)$ e a transformada de Fourier da entrada $X(\omega)$:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \Rightarrow H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}. \quad (2.160)$$

Sistemas ideais

Três sistemas LIT definidos pela sua resposta em frequência têm especial importância: os filtros *passa-baixas*, *passa-faixa* e *passa-altas* ideais. A resposta destes sistemas é mostrada na Figura 2.21.

2.8.2 Resposta de sistemas LIT a sinais aleatórios

Estudaremos agora as características da resposta de um sistema LIT quando a entrada é uma função-amostra de um processo estocástico $X(t)$.

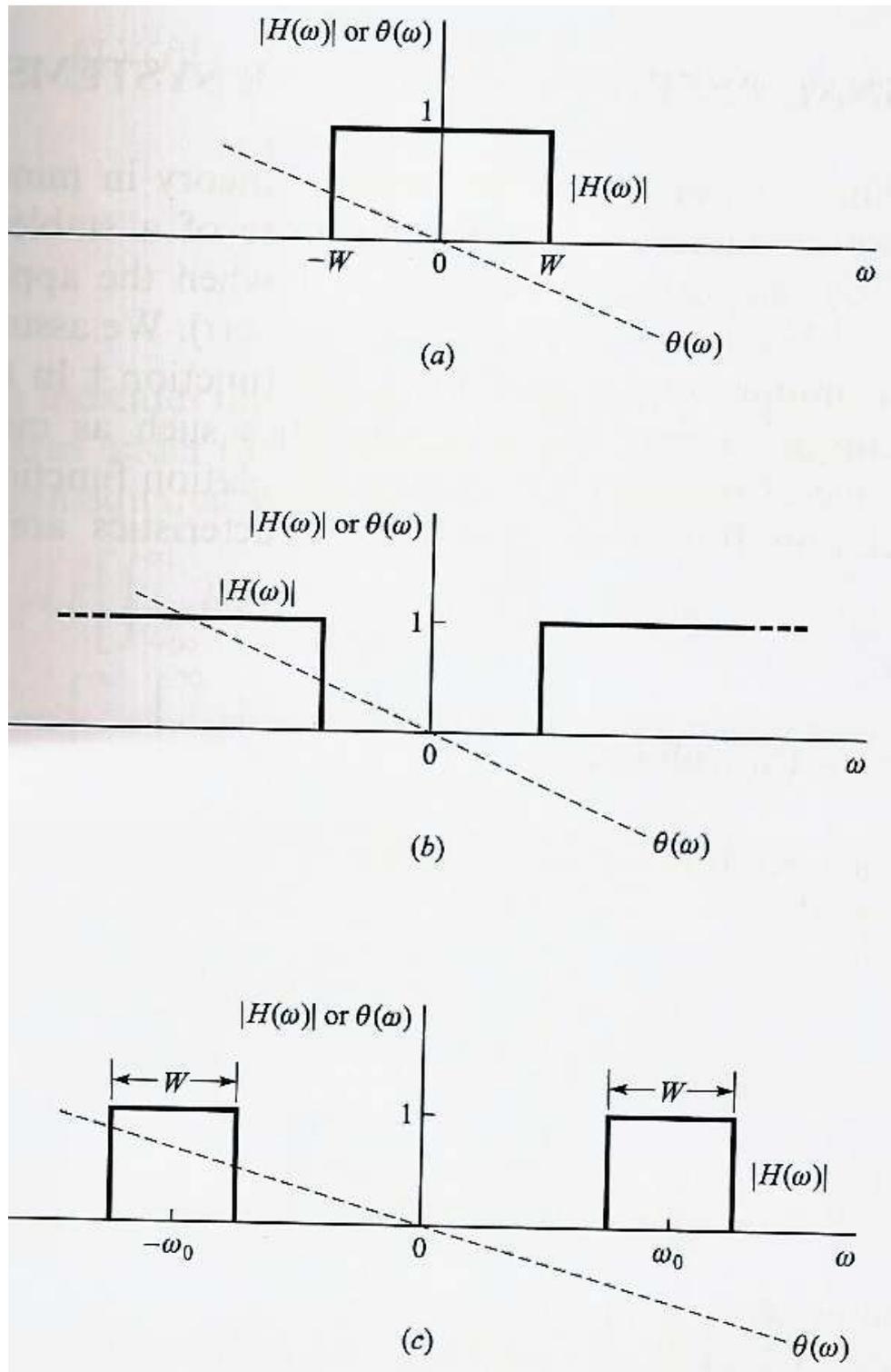


Figura 2.21: Funções de transferência de sistemas ideais: (a) sistema passa-baixas; (b) passa-altas e (c) passa-faixa (PEEBLES, 2001).

Média e valor médio quadrático da resposta do sistema

Pode-se aplicar a Eq. (2.158) diretamente para calcular o valor médio da resposta do sistema.

Assumindo-se $X(t)$ estacionário, tem-se

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t - \tau) d\tau \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) E[X(t - \tau)] d\tau = \bar{X} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau = \bar{Y}. \end{aligned} \quad (2.161)$$

Esta expressão indica que o valor médio de $Y(t)$ é igual ao valor médio de $X(t)$ multiplicado pela área sob a resposta impulsiva desde que $X(t)$ seja estacionário.

Para obter o valor médio quadrático de $Y(t)$, calcula-se

$$\begin{aligned} E[Y^2(t)] &= E \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) X(t - \tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2) X(t - \tau_2) d\tau_2 \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t - \tau_1) X(t - \tau_2)] h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (2.162)$$

Mas, $E[X(t - \tau_1) X(t - \tau_2)] = R_{XX}(\tau_1 - \tau_2)$ e

$$E[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau_1 - \tau_2) h(\tau_1) h(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.163)$$

Exercício

69. (PEEBLES, 2001) Encontre $E[Y^2]$ para um sistema com resposta impulsiva $h(t)$ tendo como entrada $X(t)$ um ruído branco com função de autocorrelação $R_{XX}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$.

Função de autocorrelação da resposta

Para $X(t)$ estacionário, pode-se mostrar de forma semelhante ao que foi feito para o valor médio e a média quadrática que

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau) * h(\tau) \quad (2.164)$$

A demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em (PEEBLES, 2001).

Função de correlação cruzada entre entrada e saída

Da mesma forma, pode-se mostrar que a função de correlação cruzada entre $X(t)$ e $Y(t)$ é dada por

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) \quad \text{e} \quad (2.165)$$

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau). \quad (2.166)$$

Da Eq.(2.164) conclui-se que

$$R_{YY}(\tau) = R_{XY}(\tau) * h(-\tau) \quad \text{ou} \quad (2.167)$$

$$R_{YY}(\tau) = R_{YX}(\tau) * h(\tau) \quad (2.168)$$

Exercício

70. Continuando o Exercício 69, encontre $R_{XY}(\tau)$ e $R_{YX}(\tau)$.

Características espectrais da resposta do sistema

Aplicando-se a transformada de Fourier às Equações (2.164), (2.165) e (2.166) e usando as propriedades da convolução (ver Figura 1.25, página 25), chega-se às seguintes relações:

$$S_{YY}(\omega) = S_{XX}(\omega)H^*(\omega)H(\omega) \Rightarrow S_{YY}(\omega) = S_{XX}(\omega)|H(\omega)|^2 \quad (2.169)$$

$$S_{XY}(\omega) = S_{XX}(\omega)H(\omega) \quad (2.170)$$

$$S_{YX}(\omega) = S_{XX}(\omega)H(-\omega) \quad (2.171)$$

$$(2.172)$$

Além disso, a potência do sinal de saída P_{YY} é

$$P_{YY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.173)$$

Exercício

71. (PEEBLES, 2001) O ruído branco com densidade de potência $\frac{N_0}{2} = 6 (10^{-6}) \text{W/Hz}$ é aplicado a um filtro passa-baixas ideal (ganho = 1) com largura de banda W (rad/s). Encontre W de forma que a potência média do ruído na saída seja 15 watts.
72. (PEEBLES, 2001) Um processo estacionário $X(t)$ com valor médio 5 e densidade espectral

$$S_{XX}(\omega) = 50\pi\delta(\omega) + \frac{3}{1 + \left(\frac{\omega}{2}\right)^2} \quad (2.174)$$

é aplicado a uma rede que tem resposta impulsiva

$$h(t) = 4e^{-4|t|} \quad (2.175)$$

- (a) Encontre $H(\omega)$ para esta rede
- (b) Calcule \bar{Y} e a densidade espectral de potência da saída $Y(t)$

Capítulo 3

Transmissão de pulsos em banda base

Neste capítulo, trata-se da transmissão de sinais digitais em banda base, ou seja, sem levar em conta a necessidade de modulação.

3.1 Introdução

A transmissão de sinais digitais em banda base requer um canal com uma largura de banda suficientemente grande para acomodar o conteúdo em frequências essenciais do sinal de dados. Tipicamente, no entanto, o canal é *dispersivo*, o que significa que sua resposta em frequência desvia-se da de um filtro passa-baixas ideal.

O resultado da transmissão de dados sobre um canal assim é que cada pulso recebido é afetado de alguma forma pelos pulsos adjacentes, dando origem à forma comum de interferência conhecida como *interferência intersimbólica* (ISI - *Intersymbolic Interference*).

A ISI é uma das maiores causas de erro na recuperação do sinal transmitido no receptor. Para corrigi-la, é necessário controlar o formato do pulso ao longo do sistema como um todo. Assim, boa parte deste capítulo dedica-se à *formatação de pulsos*.

Uma outra fonte de erros na transmissão em banda base que também será estudada aqui é o *ruído no canal*.

O capítulo começa com a descrição de um resultado fundamental da teoria de comunicação que lida com a *detecção* de um pulso de forma de onda conhecida quando este está imerso em

ruído branco aditivo. O dispositivo de detecção de tal pulso envolve o uso de um filtro LIT conhecido como *filtro casado*, que é assim chamado porque sua resposta impulsiva é casada com o pulso que deseja-se detectar.

3.2 Filtro casado

Um problema básico que aparece freqüentemente no estudo de sistemas de comunicação é o de *detecção* de um pulso transmitido por um canal que é corrompido por ruído.

Considere o modelo de receptor mostrado na Figura 3.1, envolvendo um filtro LIT de resposta impulsiva $h(t)$. A entrada do filtro $x(t)$ consiste num pulso $g(t)$ corrompido por ruído aditivo $w(t)$, ou seja,

$$x(t) = g(t) + w(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.1)$$

em que T é um intervalo de observação arbitrário. O sinal $w(t)$ é uma função-amostra de um processo ruído branco de média nula e densidade espectral de potência $\frac{N_0}{2}$.

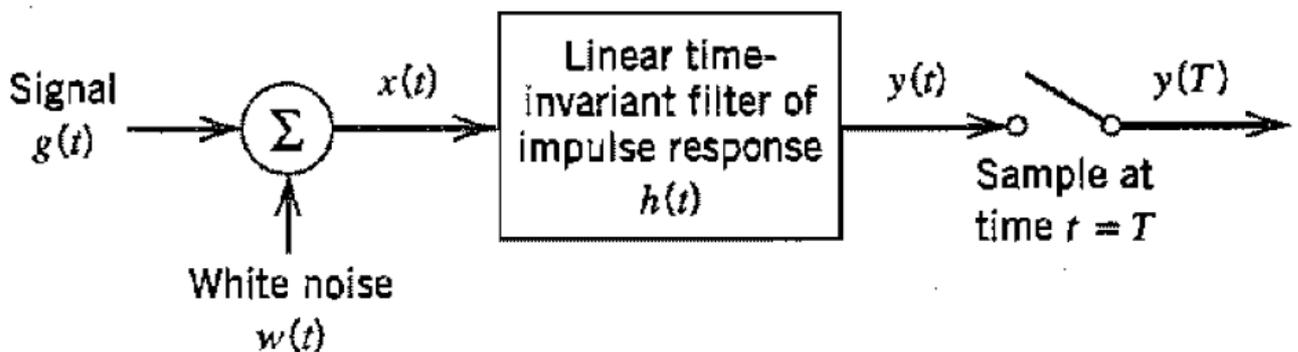


Figura 3.1: Receptor de um sistema de comunicações digitais (HAYKIN, 2000).

A função do receptor é detectar o pulso $g(t)$ de maneira ótima, dado o sinal recebido $x(t)$. Como o filtro é linear, a saída resultante $y(t)$ pode ser expressa como

$$y(t) = g_o(t) + n(t) \quad (3.2)$$

em que $g_o(t)$ e $n(t)$ são produzidos pelas componentes de sinal e ruído na entrada $x(t)$, respectivamente.

Uma maneira simples de descrever o objetivo de que a componente de sinal na saída $g_o(t)$ seja consideravelmente maior do que a componente de ruído na saída $n(t)$ é impor que a potência instantânea do sinal de saída $g_o(t)$, medida no instante $t = T$ seja a maior possível comparada à potência média do ruído de saída $n(t)$. Esta condição é equivalente a maximizar a *relação pico de sinal-ruído* definida por

$$\eta = \frac{|g_o(T)|^2}{E[n^2(t)]} \quad (3.3)$$

em que $|g_o(T)|^2$ é a potência instantânea do sinal de saída, E é o operador esperança e $E[n^2(t)]$ é a potência média da componente de ruído na saída do filtro. Deseja-se especificar $h(t)$ de forma que η seja maximizada.

Seja $G(\omega)$ a transformada de Fourier do sinal conhecido $g(t)$ e $H(\omega)$ a resposta em frequência do filtro. Então a transformada de Fourier de $g_o(t)$ é $H(\omega)G(\omega)$ e $g_o(t)$ é a transformada inversa deste produto

$$g_o(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)G(\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.4)$$

Assim,

$$|g_o(T)|^2 = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)G(\omega)e^{j\omega T} d\omega \right|^2. \quad (3.5)$$

A densidade espectral de potência $S_{NN}(\omega)$ do ruído de saída $n(t)$ é igual à densidade espectral de potência do ruído de entrada $w(t)$ vezes o quadrado do módulo da resposta em frequência $|H(\omega)|^2$ (veja Eq. (2.169)). Como $w(t)$ é branco com PSD constante $\frac{N_0}{2}$, segue que

$$S_{NN}(\omega) = \frac{N_0}{2} |H(\omega)|^2. \quad (3.6)$$

A potência média do ruído de saída $n(t)$ é, portanto, (ver Eq. (2.129))

$$E[n^2(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{NN}(\omega) d\omega = \frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.7)$$

Substituindo então as Equações (3.5) e (3.7) em (3.3), pode-se reescrever a expressão para

η como

$$\eta = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)G(\omega)e^{j\omega T} d\omega \right|^2}{\frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega} \quad (3.8)$$

O problema aqui é, para um dado $G(\omega)$, encontrar $H(\omega)$ que torne η máximo. Para isso, pode-se utilizar o teorema de Schwarz (HAYKIN, 2000) que afirma que para duas funções $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ vale

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_1(x)\phi_2(x)dx \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_1(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_2(x)|^2 dx \quad (3.9)$$

sendo que a igualdade vale somente se

$$\phi_1(x) = k\phi_2^*(x) \quad (3.10)$$

em que k é uma constante arbitrária.

Aplicando-se a Eq. (3.9) ao numerador da Eq. (3.8),

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)G(\omega)e^{j\omega T} d\omega \right|^2 \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.11)$$

Substituindo a Eq. (3.11) na Eq. (3.8), pode-se escrever que

$$\begin{aligned} \eta &\leq \frac{1}{4\pi^2} \frac{4\pi}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega \Rightarrow \\ \eta &\leq \frac{1}{N_0\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Assim, conclui-se que

$$\eta_{opt} = \frac{1}{N_0\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega \quad (3.13)$$

e o $H_{opt}(\omega)$ que leva a este máximo pode ser obtido da Eq. (3.10):

$$H_{opt}(\omega) = kG^*(\omega)e^{-j\omega T}. \quad (3.14)$$

Calculando a transformada de Fourier inversa desta última relação,

$$h_{opt}(t) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^*(\omega) e^{-j\omega(T-t)} d\omega. \quad (3.15)$$

Como $G^*(\omega) = G(-\omega)$ (lembre-se que $|G(\omega)|$ é par e $\angle G(\omega)$ é ímpar para sinais reais), pode-se reescrever a Eq. (3.15) como

$$\begin{aligned} h_{opt}(t) &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(-\omega) e^{-j\omega(T-t)} d\omega = \\ &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{j\omega(T-t)} d\omega \\ &= kg(T-t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

A Eq. (3.16) mostra que a resposta impulsiva do filtro ótimo, exceto pelo fator de escala k é uma versão espelhada e atrasada do sinal de entrada $g(t)$, isto é, ela é “casada” com o sinal de entrada. Um filtro LIT definido desta forma é chamado de *filtro casado*.

3.2.1 Propriedades dos filtros casados

Vimos que um filtro que está casado com um pulso $g(t)$ de duração T é caracterizado por uma resposta impulsiva que é uma versão espelhada e atrasada de $g(t)$, ou seja,

$$h_{opt}(t) = kg(T-t). \quad (3.17)$$

No domínio da frequência, o filtro casado é caracterizado por uma resposta em frequência que, exceto por um fator de atraso, é o complexo conjugado da transformada de Fourier de $g(t)$,

$$H_{opt}(\omega) = kG^*(\omega) e^{-j\omega T}. \quad (3.18)$$

No instante $t = T$, a Eq. (3.13) mostra que

$$\eta_{max} = \frac{1}{N_0\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 d\omega = \frac{2}{N_0} E_g = \frac{E_g}{\frac{N_0}{2}} \quad (3.19)$$

em que E_g é a energia do pulso $g(t)$ e usamos o Teorema de Parseval (Eq. (2.124)).

Assim, a relação pico de sinal-ruído de um filtro casado depende apenas da razão entre a energia do sinal e a densidade espectral do ruído branco na entrada do filtro. A forma do pulso $g(t)$, neste problema, não é relevante. Apenas sua energia.

Exercícios

1. Para o pulso $g(t)$ da Figura 3.2, pede-se:

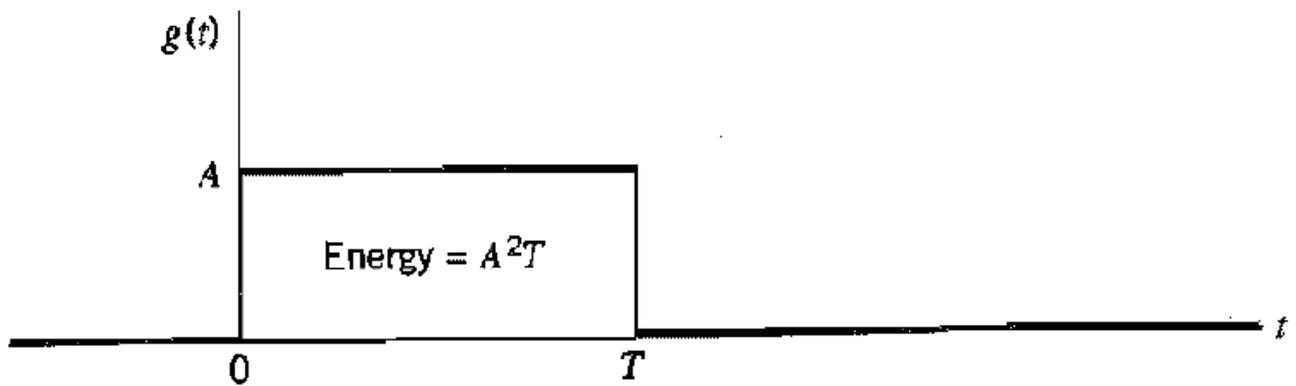


Figura 3.2: Pulso retangular (HAYKIN, 2000).

- (a) determine a resposta impulsiva do filtro casado a este pulso
 - (b) obtenha o sinal $g_o(t)$ na saída do filtro e seu valor no instante de pico. Comente os resultados obtidos.
2. (HAYKIN, 2000) Considere o sinal $s(t)$ mostrado na Figura 3.3.
 - (a) Determine a resposta impulsiva de um filtro casado a este sinal e esboce-o.
 - (b) Faça um gráfico da saída do filtro casado.
 - (c) Qual o valor de pico da saída?
 3. (HAYKIN, 2000) A Figura 3.4 mostra um par de pulsos ortogonais¹ entre si no intervalo $[0, T]$.

¹Dois sinais $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são ortogonais no intervalo $[0, T]$ se $\int_0^T x_1(t)x_2(t)dt = 0$.

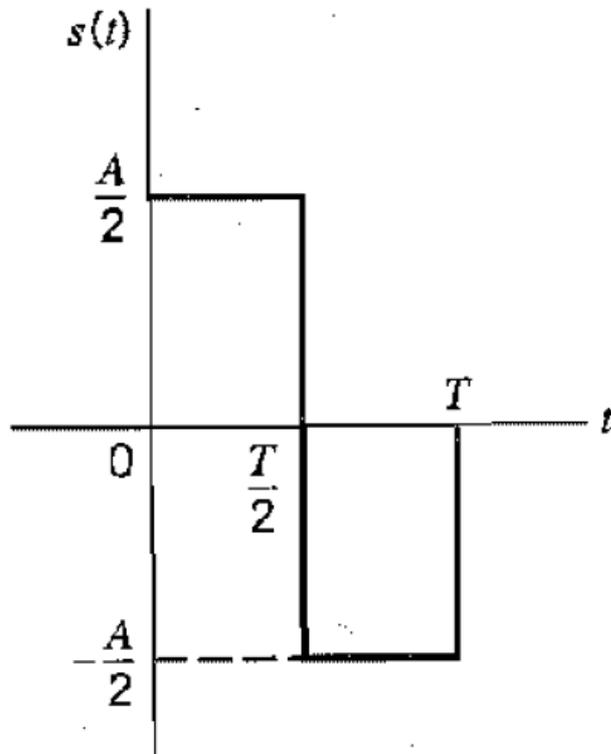


Figura 3.3: Pulso $s(t)$ (HAYKIN, 2000).

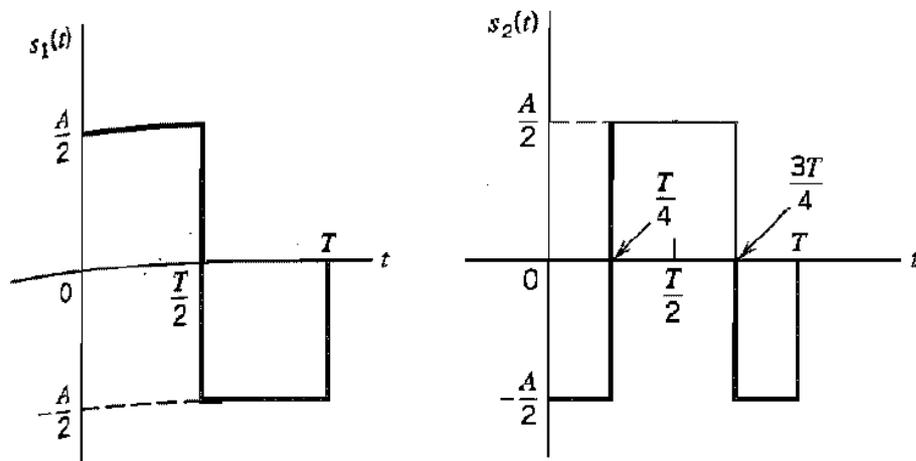


Figura 3.4: Par de pulsos ortogonais (HAYKIN, 2000).

- (a) Determine o filtro casado para cada um dos pulsos $s_1(t)$ e $s_2(t)$ considerados individualmente.
- (b) Considere o par de filtros em paralelo da Figura 3.5. Determine as saídas “output 1” e “output 2” no instante T quando
- o sinal $s_1(t)$ é aplicado ao sistema
 - o sinal $s_2(t)$ é aplicado ao sistema

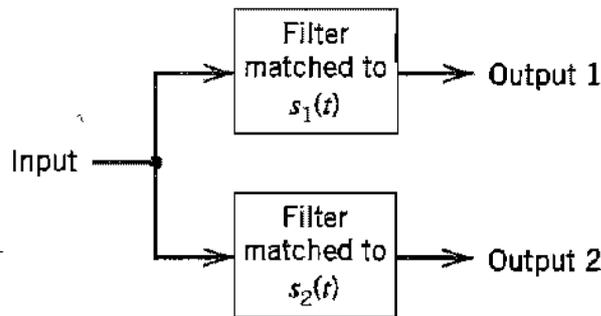


Figura 3.5: Banco de filtros casados (HAYKIN, 2000).

- (c) Comente seus resultados.

3.3 Taxa de erro devido ao ruído

Num sistema de comunicação binário, são utilizados dois pulsos $p(t)$ e $q(t)$ de duração T_b para transmitir a informação. Quando se deseja transmitir um **1**, envia-se $p(t)$ e quando deseja-se enviar um **0**, transmite-se $q(t)$. Considera-se aqui que este pulso é corrompido por ruído branco gaussiano aditivo (AWGN - *Additive White Gaussian Noise*) $w(t)$ de média nula durante a transmissão.

A estrutura de recepção ótima considerada é mostrada na Figura 3.6.

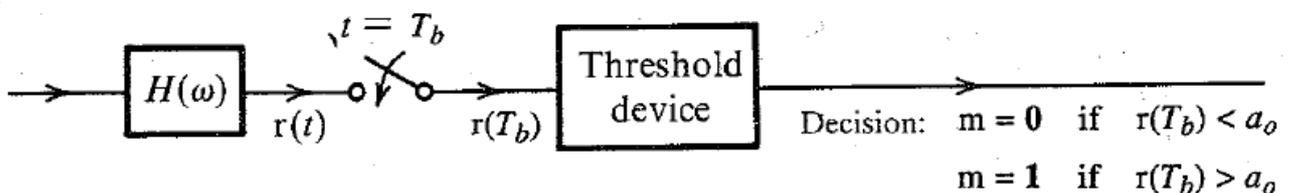


Figura 3.6: Estrutura de receptor binário considerada (LATHI, 1998a).

O sinal recebido passa através de um filtro $H(\omega)$ e a saída $r(t)$ é amostrada no instante T_b . A decisão sobre qual foi o símbolo transmitido ($\mathbf{0}$ ou $\mathbf{1}$) é feita comparando-se $r(T_b)$ a um limiar ótimo a_0 . Se $r(T_b) < a_0$, considera-se que um $\mathbf{0}$ foi transmitido; caso contrário, considera-se que um $\mathbf{1}$ foi transmitido.

Sejam $p_o(t)$ e $q_o(t)$ a resposta de $H(\omega)$ às entradas $p(t)$ e $q(t)$ respectivamente. Da Eq. (3.4), segue que

$$p_o(T_b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) H(\omega) e^{j\omega T_b} d\omega \quad e \quad (3.20)$$

$$q_o(T_b) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) H(\omega) e^{j\omega T_b} d\omega. \quad (3.21)$$

Como $w(t)$ é AWGN de média nula, segue que σ_N^2 , a variância ou potência do ruído na saída do filtro é (vide Eq. (3.7))

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} |H(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.22)$$

Se o valor do ruído na saída do filtro no instante T_b é n , então o valor amostrado no instante T_b é $r(T_b) = q_o(T_b) + n$ ou $r(T_b) = p_o(T_b) + n$, dependendo se mensagem transmitida foi $m = \mathbf{0}$ ou $m = \mathbf{1}$. Assim, as PDF's condicionais da saída amostrada $r(T_b)$, r , são²

$$f_{R|m}(r|\mathbf{0}) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[r - q_o(T_b)]^2}{2\sigma_n^2}} \quad e \quad (3.23)$$

$$f_{R|m}(r|\mathbf{1}) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[r - p_o(T_b)]^2}{2\sigma_n^2}} \quad (3.24)$$

Essas duas PDF's são mostradas na Figura 3.7.

Se a_0 é o limiar ótimo de detecção, então a decisão é $m = \mathbf{0}$ se $r < a_0$ e $m = \mathbf{1}$ se $r > a_0$.

A probabilidade de erro condicional $P(\varepsilon|m = \mathbf{0})$ é a probabilidade de tomar a decisão errada quando $m = \mathbf{0}$. Ela é dada pela área A_0 sob $f_{R|m}(r|\mathbf{0})$ de a_0 a ∞ . Da mesma forma,

²Lembre-se que a PDF de uma variável aleatória gaussiana é $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-a_X)^2}{2\sigma_X^2}}$, Eq. (2.14).

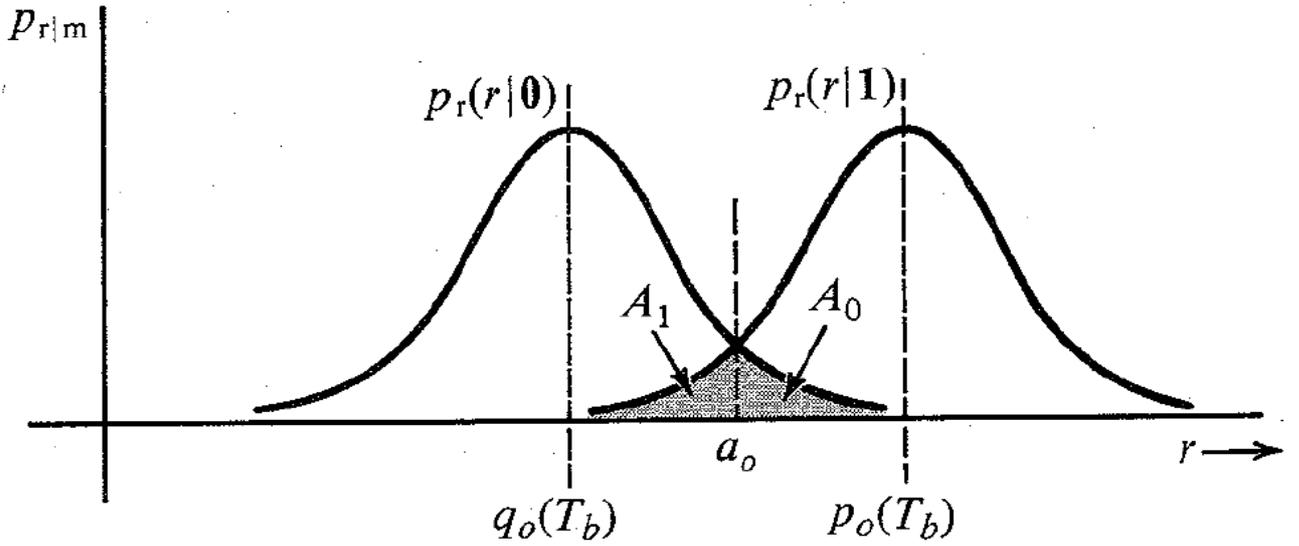


Figura 3.7: Funções densidade de probabilidade $f_{R|m}(r|\mathbf{0})$ e $f_{R|m}(r|\mathbf{1})$ (LATHI, 1998a).

$P(\varepsilon|m = \mathbf{1})$ é a área A_1 sob $f_{R|m}(r|\mathbf{1})$ de $-\infty$ a a_0 e

$$P_e = \sum_i P(\varepsilon|m_i) P(m_i) = \frac{1}{2} (A_0 + A_1), \quad (3.25)$$

assumindo-se símbolos equiprováveis, ou seja, $P(m = \mathbf{0}) = P(m = \mathbf{1}) = 0,5$.

Da Figura 3.7 pode-se ver que a soma $A_0 + A_1$ das áreas sombreadas é minimizada escolhendo-se a_0 na intersecção das PDF's. Assim,

$$a_0 = \frac{p_o(T_b) + q_o(T_b)}{2} \quad (3.26)$$

e o correspondente P_e é

$$\begin{aligned} P_e &= P(\varepsilon|\mathbf{0}) = P(\varepsilon|\mathbf{1}) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \int_{a_0}^{\infty} e^{-\frac{[r - q_o(T_b)]^2}{2\sigma_n^2}} dr = \\ &= Q \left[\frac{a_0 - q_o(T_b)}{\sigma_n} \right] = Q \left[\frac{p_o(T_b) - q_o(T_b)}{2\sigma_n} \right] \\ &= Q \left(\frac{\beta}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

em que definimos

$$\beta = \frac{p_o(T_b) - q_o(T_b)}{\sigma_n} \quad (3.28)$$

e $Q(x) = 1 - F(x)$ é a distribuição gaussiana complementar (veja Seção 2.2.4 na página 52).

Substituindo as Eqs.(3.20 - 3.22) na Eq. (3.28), obtém-se

$$\beta^2 = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(\omega) - Q(\omega)] H(\omega) e^{j\omega T} d\omega \right|^2}{\frac{N_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega}. \quad (3.29)$$

Esta equação tem a mesma forma da Eq. (3.8), trocando-se $G(\omega)$ por $P(\omega) - Q(\omega)$. Daí, conclui-se que

$$\beta_{max}^2 = \frac{1}{N_0\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |P(\omega) - Q(\omega)|^2 d\omega \quad (3.30)$$

e o filtro ótimo é dado por (escolhendo-se k convenientemente)

$$H(\omega) = [P(-\omega) - Q(-\omega)] e^{-j\omega T_b} \quad (3.31)$$

$$h(t) = p(T_b - t) - q(T_b - t). \quad (3.32)$$

Usando Parseval na Eq. (3.30),

$$\beta_{max}^2 = \frac{2}{N_0} \int_0^{T_b} [p(t) - q(t)]^2 dt = \frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{\frac{N_0}{2}} \quad (3.33)$$

em que E_p e E_q são as energias de $p(t)$ e $q(t)$, respectivamente e

$$E_{pq} = \int_0^{T_b} p(t)q(t)dt. \quad (3.34)$$

Até aqui, usou-se a notação P_e para denotar probabilidade de erro. No caso binário, esta probabilidade de erro é a *probabilidade de erro de bit* ou *taxa de erro de bit* (BER - *Bit Error Rate*) e será denotada por P_b (ao invés de P_e). Assim, das Eqs. (3.33) e (3.27),

$$P_b = Q\left(\frac{\beta_{max}}{2}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_p + E_q - 2E_{pq}}{2N_0}}\right). \quad (3.35)$$

O limiar de decisão ótimo é obtido substituindo-se as Eqs. (3.20), (3.21) e (3.31) na Eq. (3.26). Obtém-se

$$a_0 = \frac{1}{2} (E_p - E_q). \quad (3.36)$$

3.3.1 Receptores binários ótimos equivalentes

Para o receptor ótimo da Figura 3.6,

$$H(\omega) = P(-\omega)e^{-j\omega T_b} - Q(-\omega)e^{-j\omega T_b}. \quad (3.37)$$

Este filtro pode ser realizado como uma combinação paralela de dois filtros casados a $p(t)$ e $q(t)$, respectivamente, como mostrado na Figura 3.8(a).

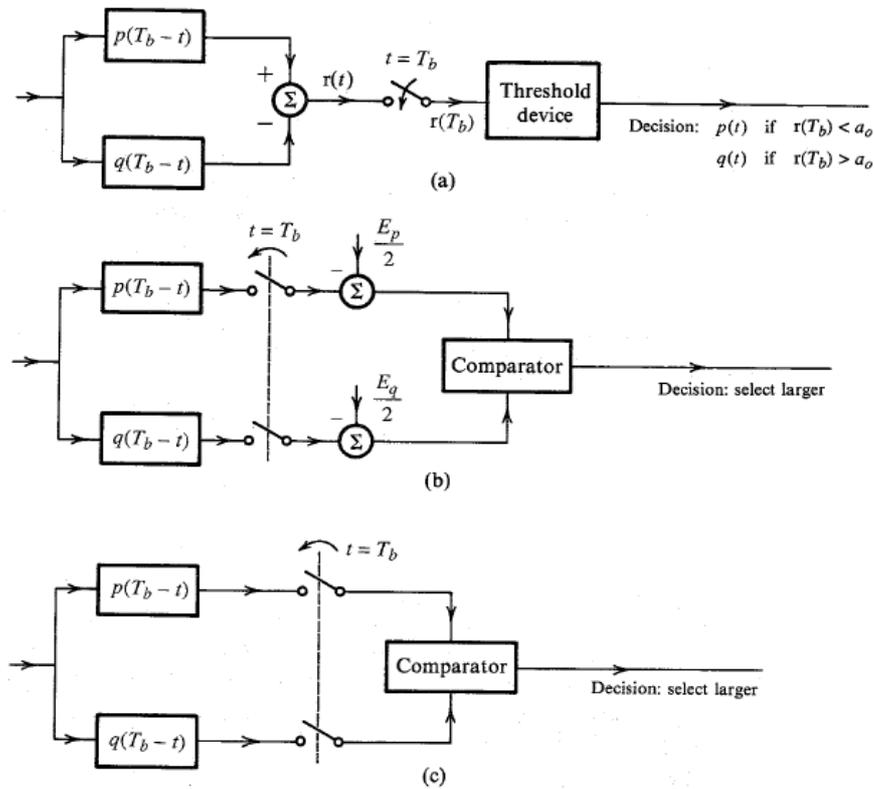


Figura 3.8: Realizações possíveis do receptor binário ótimo (LATHI, 1998a).

Uma outra forma equivalente é mostrada na Figura 3.8(b). Como o limiar de decisão é $\frac{E_p - E_q}{2}$, subtrai-se $\frac{E_p}{2}$ e $\frac{E_q}{2}$ respectivamente das saídas dos filtros casados. Isto equivale a mudar o limiar para 0. No caso em que $E_p = E_q$, não há necessidade de se subtrair $\frac{E_p}{2}$ e $\frac{E_q}{2}$ e o receptor simplifica-se para o da Figura 3.8(c).

Observação: a fim de facilitar a comparação da BER para diversos sistemas, costuma-se calcular P_b em função da energia média por bit e da densidade espectral de potência do ruído N_0 .

Exercícios

4. Uma sinalização é dita polar quando um $\mathbf{1}$ é transmitido pelo pulso $p(t)$ e um $\mathbf{0}$ pelo pulso $q(t) = -p(t)$. Considere que a energia de $p(t)$ é E_p . Pede-se:
- Determine a energia média por bit E_b para este sistema.
 - Determine a BER deste sistema num canal AWGN com PSD $\frac{N_0}{2}$. Expresse seu resultado em termos de $\frac{E_b}{N_0}$.
 - Determine o limiar de decisão ótimo e desenhe um diagrama de blocos do receptor ótimo para este sistema.
 - Considerando a aproximação

$$Q(x) \approx \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (3.38)$$

faça um gráfico de P_b por $\frac{E_b}{N_0}$ para este sistema.

5. Repita o Exercício 4 para uma sinalização *on-off*, em que $q(t) = 0$. Compare os resultados.
6. (LATHI, 1998a) Dígitos binários são transmitidos usando um pulso $p(t)$ para 0 e $3p(t)$ para 1. A energia de $p(t)$ é E_p e sua duração é T_b . Estes pulsos são transmitidos por um canal AWGN em que o ruído tem média nula e densidade espectral de potência $N_0/2$. Deseja-se projetar um receptor ótimo utilizando filtros casados para este sistema. Pede-se:
- desenhe um diagrama de blocos deste receptor indicando o limiar de decisão e a resposta impulsiva dos filtros utilizados
 - Determine a probabilidade de erro de detecção em função de E_b/N_0 sendo E_b a energia média por bit.

Referências Bibliográficas

HAYKIN, S. S. *Communication systems*, 4th edition, New York: Wiley, 2000.

HAYKIN, S. S.; VAN VEEN, B. *Sinais e sistemas*, Porto Alegre: Bookman, 2001.

HSU, H. P. *Schaum's outline of theory and problems of probability, random variables and random processes*, New York: McGraw-Hill, 1997.

LATHI, B. P. *Modern digital and analog communication systems*, 3rd edition, New York: Oxford University Press, 1998a.

LATHI, B. P. *Signal processing & linear systems*, Carmichael: Berkeley-Cambridge, 1998b.

PEEBLES, P. Z. *Probability, random variables and random signal principles*, 4th edition, New York: McGraw-Hill, 2001.

ZIEMER, R. E.; TRANTER, W. H. *Principles of communications: systems, modulation, and noise*, 4th edition, New York: John Wiley, 1995.