Universidade de São Paulo
Instituto de Física

FÍSICA MODERNA I
AULA 17

Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 114
rizzutto@if.usp.br

1o. Semestre de 2014
Monitor: Gabriel M. de Souza Santos

Página do curso:
http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=2905

07/05/2014

Vimos que o princípio de incerteza de Heisenberg, diz:
que é impossível determinar (fazer medidas) simultaneamente da posição e momento de uma partícula) (x e p_x, por exemplo) apresentam uma relação entre suas incertezas dada por

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{p}{h} = \frac{p}{\hbar}$$

Quanto mais bem definida a posição de uma partícula (pacote de onda mais estreito), menos definido será o momento dessa partícula (uma combinação maior de comprimentos de onda, e portanto de momentos será necessário)

O princípio de incerteza também pode ser enunciado em termos da energia e do tempo:
Das propriedades do pacote de onda, tem-se que:

$$E = h\nu = h\frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega$$

$$\Delta\omega.\Delta t \geq \frac{1}{2}$$

$$\Delta E.\Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta\nu.\Delta t \geq \frac{1}{4\pi}$$

Exercício:

3) Um elétron se move na direção x com velocidade de $3,6x10^6$m/s. Podemos medir sua velocidade com precisão de 1%

a) Com que precisão podemos medir simultaneamente sua posição
b) o que podemos dizer sobre o movimento na direção y

$$p_x = mv_x = 9,1x10^{-31}x3,6x10^6$$

$$p_x = 3,3x10^{-24}(kg.\frac{m}{s})$$

$$\Delta p_x = m\Delta v_x = 1\% p_x$$

$$\Delta p_x = 3,3x10^{-26}(kg.\frac{m}{s})$$

Do princípio de incerteza

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2\Delta p_x} \geq \frac{1,05x10^{-34}J.s}{2x3,3x10^{-26}kg/ms}$$

$$\Delta x \geq 0,16x10^{-8}m = 1,6nm = 16x10^{-10}m$$

O que é aproximadamente 10 distâncias atômicas (distância atômica λ ~1A ~10^{-10}m)

sobre o movimento na direção y:
Se o elétron se move na direção x temos que

$$\Delta p_y = 0$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq \hbar / 2$$

$$\Delta y = \infty$$

Não sabemos nada sobre y

Exercício:

4) Qual a energia cinética que os nêutrons devem ter se forem difratados por cristais?

As difrações ocorrem se o comprimento de onda de de Broglie do nêutron for da mesma ordem de magnitude da distância interatômica. $\lambda \sim 1A \sim 10^{-10}m$

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{6{,}63x10^{-34}\,J.s}{1x10^{-10}\,m} = 6{,}63x10^{-24}\,kgm/s$$

$$E_c = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{(6{,}63x10^{-24})^2}{2x1{,}66x10^{-27}}\left(\frac{kg^2m^2}{s^2kg}\right)$$

A energia cinética

$$E_c = 1{,}32x10^{-20}\,J = 0{,}0825\,eV$$

Note que são nêutrons não relativísticos, Energia menor que a massa de repouso do nêutron

$$E_c << m_n c^2 = 939{,}6\,MeV$$

A energia cinética da partícula a T_{amb}

Justifico o uso de $E_c=p^2/2m$

$$E_c = \frac{3}{2}kT = 0{,}0388\,eV$$

Exercício:

5) Determine o comprimento de onda de de Broglie para elétrons de 54eV?

$$E_c = \frac{p^2}{2m_e}$$

$$p^2 = 2m_e E$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{1240eV.nm}{\sqrt{2mc^2E}}$$

$$\lambda = \frac{1240eV.nm}{\sqrt{2x0{,}511x10^6\,x54}} = 0{,}167nm$$

Exercício:

6) Nós aprendemos inicialmente que a partícula (gás ideal) em equilíbrio térmico com o ao redor tem energia cinética de 3/2kT. Calcule o comprimento de de Broglie para:

a) Nêutron a temperatura ambiente (300K)

b) Nêutron frio a 77K (nitrogênio líquido)

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$p^2 = 2mE$$

$$m_n c^2 = 939{,}6 MeV$$

$$p^2 = 2mE = 2m\frac{3}{2}kT$$

$$p = \sqrt{3mkT}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{1240 eV.nm}{\sqrt{3mc^2kT}}$$

$$\lambda = \frac{1240 eV.nm}{\sqrt{3x939{,}6x10^6 x8{,}62x10^{-5}T}}$$

a) T=300K

$$\lambda = 0{,}145 nm$$

$$\lambda = \frac{2.52}{\sqrt{T}} nm$$

a) T=77K

$$\lambda = 0{,}287 nm$$

Aplicação do princípio de incerteza para o modelo atômico de Bohr

Podemos considerar que a incerteza na posição do elétron é da ordem de grandeza do raio atômico

A energia do elétron a uma distância r do núcleo é dado por:

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Tenho que pensar em

$$\Delta p^2$$

$$\Delta x$$

$$\Delta p^2 = \left(p - < p >\right)^2$$

$$\Delta p^2 = p^2 - 2p < p > + < p >^2$$

No entanto <p> quanto <x> são nulos para o movimento harmônico, pois a partícula executa um movimento em que a posição e a velocidade assumem valores simétricos em relação ao ponto central, com valor zero

Aplicação do princípio de incerteza para o modelo atômico de Bohr

Então:

$$\Delta p^2 = \left(p - < p >\right)^2$$

$$\Delta p^2 = p^2 - 2p < p > + < p >^2$$

$$\Delta p^2 = p^2$$

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta p \Delta x > \hbar$$

Analogamente $\Delta x^2 = x^2$ $\quad \Delta x = r$ $\quad p \geq \dfrac{\hbar}{r}$

$$E \geq \frac{\hbar^2}{4mr^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}$$

Derivando com respeito a r para encontrar o vapor de energia mínima

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 0$$

$$\frac{\hbar^2}{mr^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

$$r = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{me^2} = raiodeBohr = 0{,}52\dot{A}$$

Aplicação do princípio de incerteza para o modelo atômico de Bohr

Então para este raio mínimo:

$$r = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{me^2} = \frac{\hbar^2}{mke^2}$$

$$r = raio de Bohr = 0{,}52\dot{A}$$

Tenho a energia mínima

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r}$$

$$E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{m^2k^2e^4}{\hbar^4} - \frac{ke^2mke^2}{\hbar^2}$$

$$E_{\min} = -\frac{1}{2}\frac{mk^2e^4}{\hbar^2}$$

$$E_{\min} = -13{,}6eV$$

Obtenho o valor correto da energia do elétron na primeira órbita de Bohr.

No entanto o conceito de órbita bem definida perde o sentido. O elétron esta localizado em qualquer ponto dentro do volume do raio de Bohr, mas sua posição correta não pode ser conhecida .

Probabilidade

Em 1925-1926 Max Born propôs como relacionar a Ψ (função de onda) com o comportamento das partículas que ela descreve:

A probabilidade que a partícula seja encontrada no instante t em uma coordenada entre x e x+dx é :

$$P(x)dx = \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx$$

$$P(x)dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$$

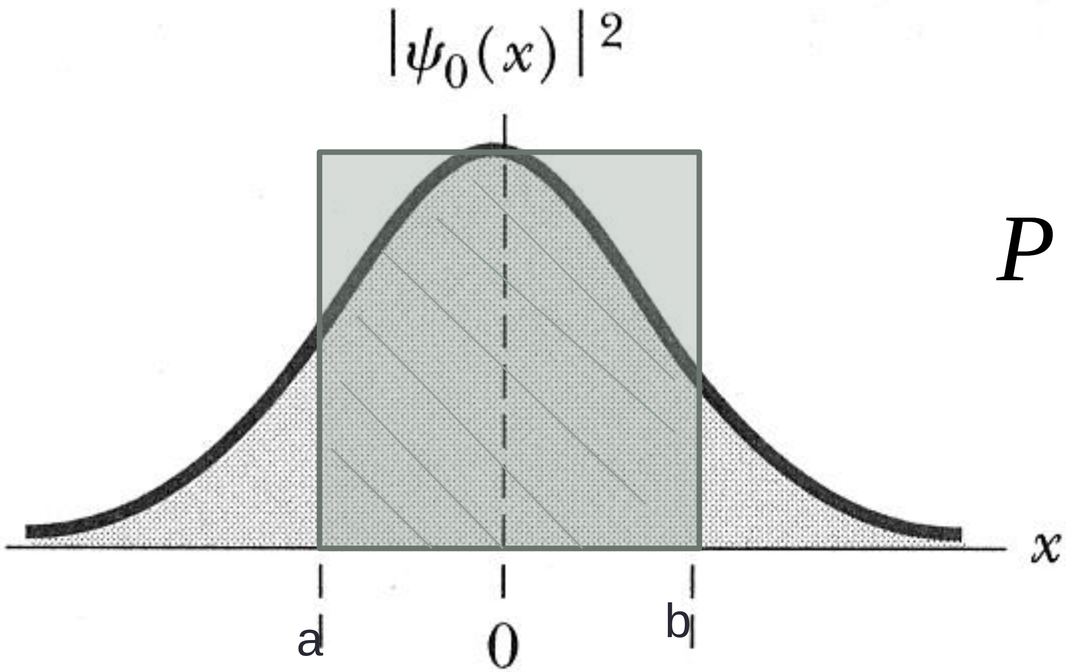
Ψ não é uma quantidade mensurável, mas o seu módulo ao quadro é mensurável e é justamente a probabilidade por unidade de comprimento ou densidade de probabilidade P(x) para encontrar a partícula no ponto x no tempo t.

Já que a partícula deve ser encontrada em algum lugar ao longo do eixo x, a soma das probabilidade sobre todos os valores de x deve ser 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx = 1$$

Qualquer função que satisfaz esta equação é dita normalizada

A probabilidade de uma partícula estar no intervalo a=<x<=b esta relacionado área embaixo da curva de a até b de uma função densidade de probabilidade $\left|\Psi(x,t)\right|^2$



$$P = \int_a^b \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx =$$

o área embaixo da curva entre a e b

OBSERVÁVEIS:

Ψ não é uma quantidade mensurável

MAS como podemos relacionar a função de onda com grandezas observáveis????

COMO podemos obter a posição, o momento ou a energia de uma partícula a partir da função de onda (de maneira exata no mundo quântico)?????

VALORES ESPERADOS:

USANDO a interpretação probabilística de Bohr, podemos obter apenas os <u>valores médios</u> ou <u>valores esperados</u> das grandezas

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)dx$$