Laboratório de Física para Licenciatura em Geociências

FMT0112

4º Experimento

Ondas mecânicas e cordas vibrantes

Equipe de Professores/Técnico

Renato F. Jardim, rjardim@if.usp.br
Maria Isabel Veras, mbebelveras@yahoo.com.br
Edelberto José dos Santos, ejsantos@if.usp.br

Instituto de Física, Universidade de São Paulo
São Paulo, 2009

Introdução

Pitágoras[1] e os seguidores de sua escola fizeram experimentos para desvendar as relações específicas entre notas musicais. O tom e a altura de uma nota musical sendo tocada, por exemplo, por um violão foram observados depender de algumas variáveis conhecidas: (*i*) o comprimento $\boldsymbol{L}$ da corda; (*ii*) a tensão $\boldsymbol{T}$ à que a corda está sendo submetida; e (*iii*) do material que a corda é feita, ou mais precisamente de sua densidade linear $\boldsymbol{\mu}$ (massa do material/unidade de comprimento). O tocador de violão, ao pressionar o seu dedo em uma dada corda, sobre o rastilho, altera o comprimento $\boldsymbol{L}$ dessa corda ao fixar seu dedo indicador em um dado traste. O comprimento efetivo da corda é então dado pela distância entre o traste e a sua extremidade. Ao assumir que este comprimento corresponde a uma (01) unidade em um dado sistema, é possível obter todos os outros comprimentos efetivos da corda que correspondem a outras notas na escala. Esses harmônicos consoantes foram descobertos por Pitágoras no século V ac.

Esses comprimentos efetivos são relacionados uns com os outros através da razão de números inteiros. Na verdade, os seguidores de Pitágoras acreditavam que isso era um princípio geral do universo: tudo poderia ser relacionado aravés da razão de números inteiros. Desta forma, todo o “cosmos” entoaria, em harmonia, a mesma canção, conhecida com a “Música das Esferas”. Os seguidores de Pitágoras também descobriram a existência de números irracionais, como exemplo a raiz quadrada de 2 ($\sqrt{2}$) que é igual a

$$1.414213562\ldots$$

[1]Acredita-se que Pitágoras nasceu no século IV (570 ac) e morreu perto de 475 ac, ou no século V ac.

A elipse (**...**) mostrada no número acima indica que os decimais subsequentes nunca terminarão ou serão repetidos, ou seja, não há uma dupla de números inteiros *i* e *j*, cuja razão *i/j* seja igual a $\sqrt{2}$. A ocorrência de números irracionais, descoberta por Hípaso de Metaponto no século V ac, foi considerada como uma mácula ou defeito na perfeição do universo, na sua perfeita harmonia. Foi por este motivo que os números irracionais foram deliberadamente esquecidos pelos seguidores de Pitágoras e quase toda a humanidade durante muito tempo (acredita-se que Pitágoras mandou afogar Hípaso de Metaponto). Atribui-se ao matemático alemão Julius W. R. Dedekind a formalização da noção dos números irracionais, no final do século XIX.

Mas o problema envolvendo a formação de ondas em cordas e suas propriedades ainda é tópico de interesse. Para que seja possível avançar no entendimento desse ponto, algumas considerações devem ser escalrecidas. Vamos então iniciar esse processo discutindo primeiramente a propagação de uma onda em um meio material.

Uma onda se propagando no interior de qualquer material significa evidência de que energia está sendo transportada como resultado de uma perturbação. Existem essencialmente duas categorias de ondas: mecânicas e eletromagnéticas. Há uma terceira que são as chamadas ondas da matéria, que constituem a base da mecânica quântica e não serão discutidas aqui. Entretanto, ondas mecânicas, como o som e ondas na água, necessitam de algum meio material para serem propagadas. Por outro lado, ondas eletromagnéticas não necessitam desse meio, o que inclui a luz, que se propaga no vácuo.

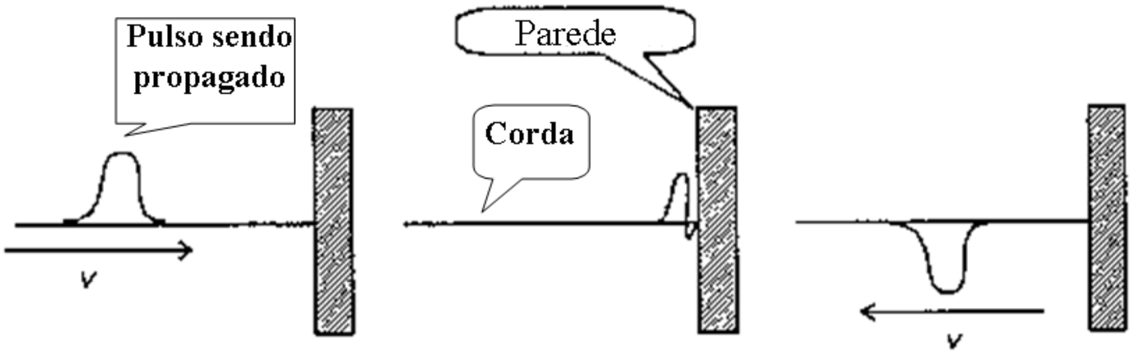

Figura 1 – Onda propagando-se com velocidade ***v*** em uma corda esticada. Note que há reflexão da onda ao encontrar a parede, na extremidade oposta de onde foi gerada.

A velocidade de propagação ***v*** das ondas pertencentes a estas duas categorias depende de duas propriedades do meio em que estão sendo propagadas. No caso de ondas mecânicas, as propriedades do meio são as inérciais e as elásticas, que são substituídas pela permissividade e permeabilidade do meio para as ondas eletromagnéticas. No caso de ondas mecânicas, e em particular de uma corda esticada de comprimento ***L*** (veja Figura 1), a propriedade inercial é a sua densidade linear $\boldsymbol{\mu}$ e sua propriedade elástica é a tensão ***T*** aplicada na corda. Uma onda mecânica será então propaganda através da corda se a tensão **T** que é aplicada à corda for suficiente para provocar uma perturbação no seu estado de equilíbrio, ou em qualquer posição da corda. Uma vez propagada a partir de uma extremidade da corda, a onda alcançará a outra extermidade, será refletida e propagada de volta, no sentido da perturbação, como mostra a Figura 1. Uma vez que a perturbação é feita de forma repetitiva (por exemplo, “bater corda”, mexer um leite com achocolatado, ou usar um vibrador elétrico), as ondas serão propagadas deixando a fonte propagadora e sofrerão interferência com aquelas que foram refletidas pela outra extremidade da corda. Se o comprimento ***L*** da corda for um múltiplo inteiro do comprimento de onda das ondas de interferência, o padrão de interferência será estacionário na corda. Esse padrão estacionário é chamado de ondas estacionárias.

O experimento a ser realizado trata desse assunto. Ele é conhecido como experimento de Melde (Franz Melde, físico alemão que viveu essencialmente no século XIX) e é usado para a determinação de padrões de ondas estacionárias, da velocidade de e de efeitos, devido à tensão, em ondas transversais.

Os estudantes estarão aptos a produzirem ondas estacionárias em uma corda esticada com o auxilio do aparato experimental disponível. Será possível explorar as relações existentes entre os comprimentos e densidades lineares das cordas de Nylon, seus comprimentos de onda, freqüências de oscilação e tensões aplicadas às cordas. Espera-se que os estudantes, ao final do experimento, adquiram um conhecimento empírico acerca dos modos normais de vibração de uma corda vibrante. Eles terão também a oportunidade de poder comparar suas medidas experimentais com a teoria que descreve o fenômeno de ondas estacionárias. Em resumo, ao final da prática espera-se que o estudante esteja apto para:

(1) Compreender e explicar como ondas estacionárias são criadas;

(2) Identificar os nós e ventres e o número de segmentos da corda vibrando para cima e para baixo e em fase;

(3) Estar apto a discutir quais fatores determinam as frequencias naturais de uma corda vibrante.

Ondas Estacionárias

O critério para a formação de ondas estacionárias é que após a transmissão, a onda refletida retorna essencialmente na mesma forma da propagada mas deslocada em fase, como mostra a Figura 2.

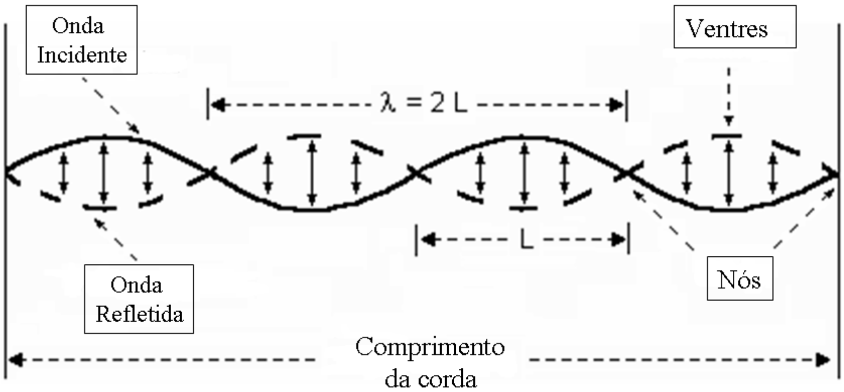

Figura 2 – Onda estacionária em um experimento de uma corda vibrante de comprimento ***L*** presa a duas extremidades fixas. São mostradas as definições do comprimento de onda λ, nós, ventres e as ondas incidente e refletida.

Isso significa que uma onda estacionária pode realmente ser formada mesmo quando sua velocidade não é constante através de toda a corda. Mas, quando uma corda vibrante é olhada muito próxima, observa-se que sua vibração é geralmente circular no movimento. Isso pode ser comparado com uma criança ao pular corda, onde a corda parece como uma estrutura rígida que é rotacionada. Na verdade, o movimento de rotação é muito natural em sistemas que apresentam apenas uma dimensão ou são esperados a ocorrer ao longo de apenas uma direção. Eles podem ser detectados utilizando um feixe de luz fluorescente sobre a corda vibrante, principalmente se a corda for transparente.

Experimentos indicam que com o aumento da tensão nas cordas há um aumento na velocidade das ondas e os números inteiros de harmônicos decresce. Isso está em acordo com o fato de que as quantidades físicas que determinam a velocidade de ondas transversais em uma corda são a tensão $\boldsymbol{T}$ aplicada na corda e a densidade linear $\boldsymbol{\mu}$ dessa mesma corda. O aumento da tensão $\boldsymbol{T}$ na corda certamente resulta em um aumento das forças restauradoras que tendem a re-estabelecer o equilíbrio de forças (ou endireitar a corda) quando a corda é perturbada. O resultado líquido desse processo é o aumento da velocidade das ondas na corda. Por outro lado, o aumento da massa da corda (ou da sua densidade linear $\boldsymbol{\mu}$), faz com que o movimento da corda seja mais vagaroso, resultando em uma velocidade das ondas com menores magnitudes. O alongamento das cordas faz com que as equações que descrevem todo o seu movimento sejam equações complicadas, não lineares. Esse tipo de efeito gera uma dinâmica muito rica quando altas tensões $\boldsymbol{T}$ e freqüências são aplicadas em uma corda. Para o caso onde $\boldsymbol{T}$ não apresenta altos valores (e baixas freqüências), é possível observar diversos fenômenos como os batimentos, o "bamboleio" e mesmo a rotação de planos vibracionais.

Um pouco de ondas em meios materiais e cordas vibrantes

As propriedades que caracterizam uma onda são o seu comprimento de onda λ (dada em unidade de comprimento), sua freqüência de oscilação f (medida em Hertz, ou 1/s = s^{-1}), e sua velocidade de propagação v (dada em unidades de comprimento/tempo). Essas propriedades são relacionadas pela equação:

$$\boldsymbol{\lambda f = v} \quad . \qquad (1)$$

Ondas mecânicas propagam-se em meios materiais em essencialmente duas maneiras: longitudinalmente e/ou transversalmente. Em uma onda longitudinal, cada partícula do meio oscila em relação a uma posição de equilíbrio na mesma direção de propagação da onda. Isso ocorre, por exemplo, na propagação de ondas de som em qualquer meio material. Por outro lado, nas ondas transversais cada partícula do meio oscila perpendicularmente à direção de velocidade de propagação da onda. O caso mais comum desse tipo de propagação é o de uma corda vibrante.

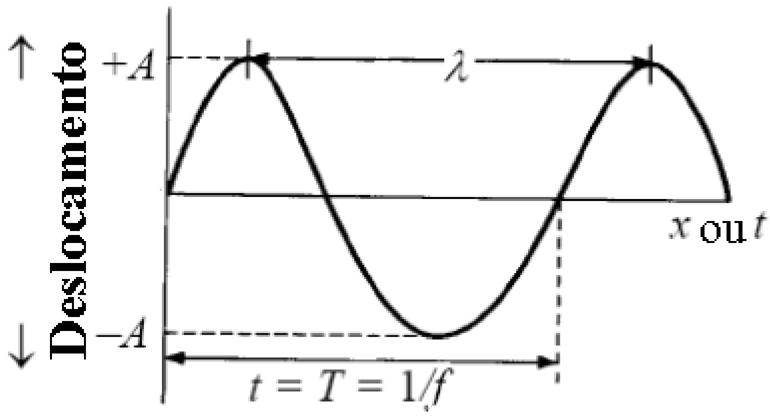

Figura 3 – Algumas propriedades de uma onda.

Quando cada partícula de uma corda oscila devido a uma perturbação, seu deslocamento máximo (para cima e/ou para baixo) é chamado de amplitude da onda e é designado na Figura 3 como $+A$ ou $-A$. A Figura 3 mostra um gráfico desse deslocamento de uma partícula como função da posição ou do tempo. A energia que uma onda carrega está realcionada com sua amplitude A. O período de oscilação T_0 de uma onda é inversamente relacionado com sua freqüência de oscilação f, ou seja, $T_0 = 1/f$. Uma característica de ondas é que quando duas (ou mais) se encontram, há interferência. Via de regra, o resultado deste "encontro", e portanto a interferência, é a geração de uma nova onda. Se duas ondas que se movem em direções opostas tiverem a mesma amplitude e freqüência, o resultado de um processo de interferência entre essas duas ondas é a produção de ondas estacionárias, como mostrado na Figura 4.

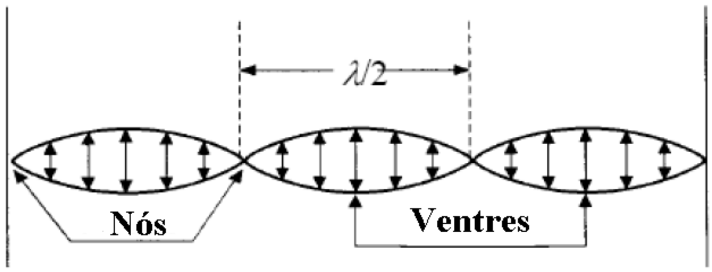

Figura 4 – Diagrama esquemático de uma onda estacionária produzida por uma corda vibrando entre duas paredes.

As posições de deslocamento mínimo (interferência destrutiva) dessa onda de interfeerência são chamadas de **nós** e as posições de máximo (interferência construtiva) são chamadas de **ventres**. O comprimento de um seguimento de uma onda estacionária é igual a ½ (metade) de seu comprimento de onda λ. Quando uma corda é posta para vibrar, com um vibrador, em uma parede (por exemplo a esquerda da Figura 4), ondas são propagadas do vibrador interferem com as ondas refletidas pela parede da direita (ver Figura 1). Essa interferência produz ondas estacionárias na corda em frequências f que dependem da densidade linear da corda μ, da tensão aplicada à corda T e do seu comprimento L. Se a corda é posta para vibrar em múltiplos da freqüência f, ondas estacionárias com segmentos múltiplos chamados de harmônicos ocorrerão e podem ser vistos, como mostra a Figura 5. Nesta figura são mostrados alguns harmônicos: o primeiro ou fundamental ($L = \frac{1}{2} \lambda$), o segundo ($L = \lambda$) e o terceiro ($L = 3/2\ \lambda$).

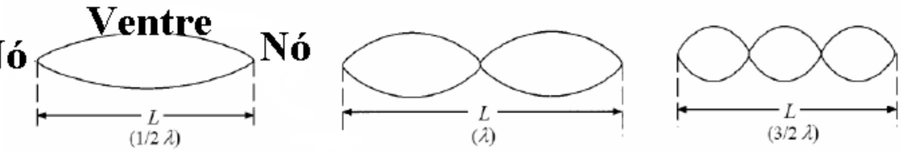

Figura 5 – Alguns harmônicos de uma corda vibrante.

Alguns pontos de interesse podem ser retirados dos resultados mostrados na Figura 5:

(i) Note que cada segmento é igual a ½ de **λ**;

(ii) Baseado em (i), para um dado harmônico, o comprimento de onda é $\boldsymbol{\lambda} = 2\boldsymbol{L}/n$, onde ***L*** é o comprimento da corda e *n* o número de segmentos.

Por outro lado, é possível expressar a velocidade de uma onda em uma corda esticada como

$$\boldsymbol{v = 2Lf/n} \qquad (2)$$

ou ainda

$$\boldsymbol{v} = \sqrt{\boldsymbol{T}/\boldsymbol{\mu}} \qquad (3)$$

onde a tensão ***T*** está relacionada com as propriedades elásticas da corda e a densidade linear $\boldsymbol{\mu}$ com suas propriedades inerciais.

Para a determinação da velocidade de propagação ***v*** de uma onda em uma corda, por exemplo, é possível obter valores de $\boldsymbol{\mu}$ através da pesagem de um comprimento da corda conhecido. Adicionalmente, é possível também eliminar $\boldsymbol{v}$ das duas equações dadas acima e encontrar uma relação mais geral entre as grandezas de interesse em uma corda vibrante. Ao combinar as Eqs. 2 e 3, obtem-se

$$\boldsymbol{T = 4\, \mu\, L^2 f^2/n^2} \quad . \qquad (4)$$

Note que se $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{f}$ são mantidos constants mas $\boldsymbol{T}$ é variado, um gráfico do tipo $\boldsymbol{T}$ versus $\boldsymbol{1/n^2}$ deverá resultar em uma reta cujo coeficiente angular será o numerador da Eq. 4, ou seja, $4\boldsymbol{L}^2\boldsymbol{f}^2\boldsymbol{\mu}$. Conhecendo o comprimento $\boldsymbol{L}$ e a frequência $\boldsymbol{f}$, é possível encontrar o valor de $\boldsymbol{\mu}$ através do coeficiente angular deste mesmo gráfico.

Na verdade, é de interesse resolver a Equação 4 para as freqüências dos harmônicos de uma corda, ou seja,

$$\boldsymbol{f = (n/2\, L)\, \sqrt{T/\mu}} \quad . \qquad (5)$$

Uma inspeção cuidadosa da Eq. 5 indica que um gráfico de $\boldsymbol{f}$ versus $\boldsymbol{n}$ deve resultar em uma reta cujo coeficeinte angular é $\boldsymbol{(1/2\, L)\, \sqrt{T/\mu}}$. Portanto, há diversas situações em que grandezas podem ser obtidas através de diversos outros gráficos envolvendo as grandezas descritas na Eq. 5. O nosso experimento de hoje, de certa forma, trata dessas possibilidades.

Experimento

Um aparato experimental é construído essencialmente para o estudo de cordas vibrantes com características de ondas estacionárias. Esse aparato, mostrado abaixo na Fig. 6, é constituído de: (i) um gerador de ondas; (ii) um alto falante, com uma haste para fixar as cordas de Nylon no seu centro; (iii) uma mesa longa onde uma polia é posta em sua extremidade; (iv) diversas massas para tensionar e varia a tensão T nas cordas; (v) diversas cordas com valores de μ.

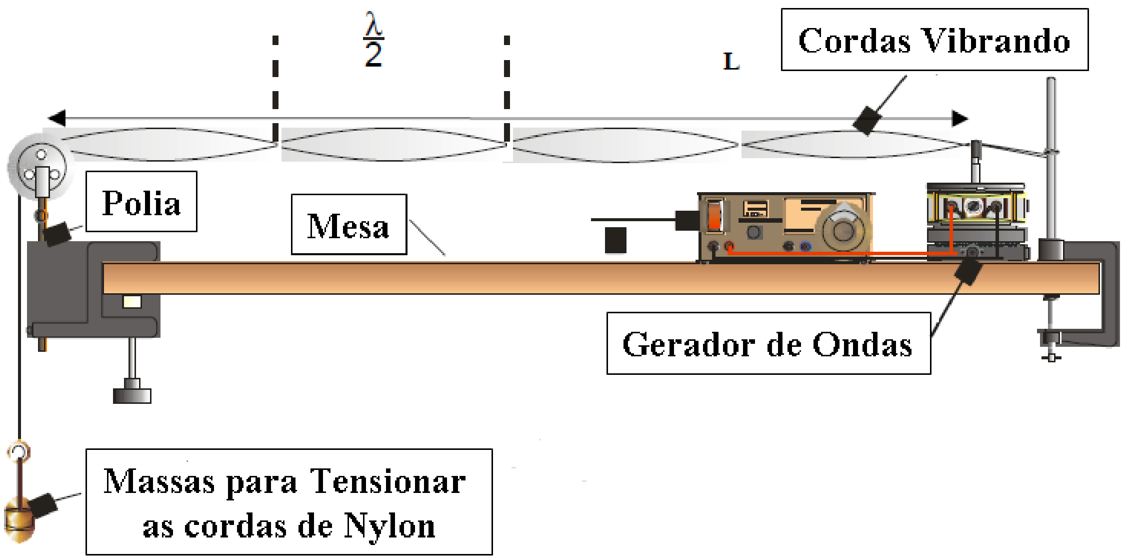

Fig. 6 – Aparato experimental para a execução do experimento de cordas vibrantes.

Objetivos

O procedimento experimental a ser efetuado em sala de aula será apresentado e discutido no início da aula. Entretanto, alguns objetivos desse experimento podem ser antecipadamente apresentados:

1. Utilizar as cordas de nylon, com diferentes valores de μ, e o aparato experimental das cordas vibrantes para encontrar as freqüências f dos harmônicos dessas cordas;
2. Utilizar diversos valores de L e T e observar como a variação dessas grandezas influencia, por exemplo, os valores de f das cordas estudadas;

3 Confeccionar diversos gráficos, incluindo aqueles chamados de di-log, para encontrar expoentes que possam confirmar a validade da Eq. 5 descrita acima.