# $4^a$ Lista de Exercícios – Eletromagnetismo I – 2016/2

**Entrega:** 17 de outubro

**4.1** — Uma esfera de raio $R$ possui uma magnetização ao longo do eixo z dada por $\vec{M} = (M_0 + M_1 z^2)\hat{z}$. Encontre os campos magnéticos $\vec{B}$ e $\vec{H}$ em todo o espaço, e esboce uma figura que represente as linhas desses dois campos. [**Dica**: como não há "correntes livres", $\nabla \times \vec{H} = 0$ e é possível definir um potencial escalar $\phi_M$ tal que $\vec{H} = -\nabla\phi_M$.]

**4.2** — Um cilindro muito longo, de raio $R$ e material com permeabilidade magnética $\mu$, é colocado num campo magnético externo $\vec{B}_0$ que faz um ângulo reto com o eixo do cilindro. Calcule $\vec{B}$ e $\vec{H}$ em todo o espaço. Calcule também as densidades e correntes superficiais de magnetização. [**Dica**: devido à simetria por translações ao longo do eixo $z$, os campos dependem apenas de $\rho$ e $\phi$. Você terá de encontrar, via separação de variáveis, a base de funções que é solução da equação de Laplace associada a esse problema. Essa base é muito simples!]

**4.3** — Arapuca magnética

a. Uma partícula carregada se move num plano perpendicular a um campo magnético uniforme $\vec{B}$. Mostre que, se $\vec{B}$ varia lentamente com o tempo, então o momento de dipolo magnético produzido pelo movimento orbital da carga permanece constante. Mostre também que o fluxo magnético através da órbita, $\Phi = \pi r^2 B$, é constante. Essas constantes têm o nome sofisticado de "invariantes adiabáticos do movimento".

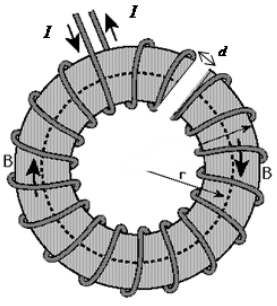
b. Vamos agora mostrar como se faz uma "arapuca magnética". Suponha que o campo magnético cresce lentamente na direção $z$. Se a partícula tiver uma pequena velocidade na direção $z$, então o campo magnético no qual ela está imersa vai crescer lentamente à medida que ela avança sobre o eixo $z$. Como o fluxo através da órbita da partícula deve permanecer constante, o raio dessa órbita deve diminuir, e a velocidade deve aumentar. Mas os campos magnéticos não podem alterar a *magnitude* da velocidade, o que significa que $v_z$ deve *diminuir*! De fato, se o campo crescer o suficiente, a velocidade na direção $z$ chegará a zero, e a partícula então cai numa espécie de "arapuca" magnética.

   Escreva a velocidade como:

$$v^2 = v_\perp^2 + v_z^2 \,.$$

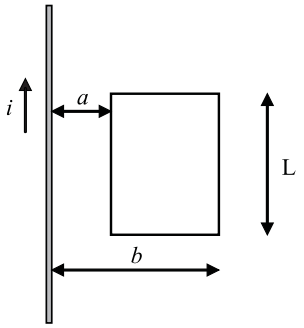
   Use os resultados do item (a) acima para mostrar que $v_z^2 \approx v(0)^2 - v_\perp^2(0) B_z(z)/B_z(0)$, onde $v(0)$ é a velocidade inicial, $v_\perp(0)$ é a velocidade orbital inicial, e $B_z(0)$ é a componente $z$ do campo magnético na posição inicial.

**4.4** — Um solenoide tem $N$ espiras circulando um núcleo de ferro toroidal, de raio médio $r$ e seção transversal de raio $a$ ($r \gg a$). No entanto o toro de ferro apresenta uma pequena descontinuidade de largura $d$, como mostrado na figura ao lado. Calcule a energia magnética armazenada em função da corrente $I$ das espiras e da largura $d$ da fenda no regime onde a permeabilidade do ferro, $\mu$, é muito grande. Calcule a força necessária para impedir que a fenda se feche. Suponha que o campo máximo na fenda é 1,5 tesla. Expresse a força/área que tende a fechar o vão em termos da pressão atmosférica.




**4.5** — Um solenoide longo, de raio $a$ é alimentado com corrente alternada, de modo que o campo em seu interior seja função do tempo e expresso por: $\vec{B}(t) = B_0 \cos\omega t$. Uma espira circular, de raio $a/2$ e resistência $R$ é colocada no interior do solenoide com seu vetor de área paralelo à direção $+z$. Encontre a corrente induzida no laço circular em função do tempo.

**4.6** — O fio retilíneo muito longo da figura ao lado conduz uma corrente $i$ no sentido indicado, cuja magnitude está crescendo a uma taxa $di/dt$.




a. Quando a corrente no fio é igual a $i$, calcule o fluxo magnético através da espira retangular.

b. Obtenha uma expressão para a força eletromotriz induzida na espira.

c. Suponha agora que a corrente no fio retilíneo seja constante com valor $i$. Se alguém movimentar a espira retangular para a direita, com velocidade $v$, qual é a força eletromotriz gerada na espira, e qual o sentido da corrente na espira irá circular?

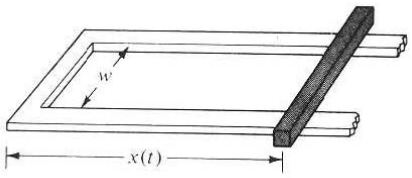
**4.7** — Uma barra metálica uniforme de massa $m$ pode deslizar com atrito desprezível ao longo de um par de trilhos horizontais fixos e separados por uma distância $w$, conforme mostra a figura abaixo. Sabendo que a resistência elétrica total deste sistema é $R$, e que um campo magnético uniforme, estacionário, orientado verticalmente e de módulo $B$, permeia o circuito, responda os seguintes itens:

a. Determine a corrente $i$ induzida no circuito em termos de $R$, $B$, $w$ e $v$, a velocidade instantânea da barra. Considere como o sentido positivo da corrente na barra aquele indicado na figura. Ao determinar a corrente induzida, despreze o campo magnético produzido pela própria corrente;

b. Suponha que em $t = 0$ a barra esteja numa posição $x_0$ e com velocidade $v_0$. Determine $x(t)$ e $v(t)$;

c. A energia cinética inicial da barra era $\frac{1}{2}mv_0^2$. Verifique que a energia dissipada pela resistência da barra é exatamente $\frac{1}{2}mv_0^2$.

d. É justificável desprezar no item (a) o campo magnético produzido pela corrente induzida? Para responder esse item, calcule a razão entre o maior valor do campo magnético produzido pela corrente induzida ($B_i$) e o valor do campo aplicado ($B$). Estime $B_i$ calculando o campo magnético na superfície da barra livre, assumindo que ela é muito longa e tem secção transversal circular com raio $a = 3{,}0$ mm.




**4.8** — Considere um transformador de núcleo de ar na forma de dois solenoides cilíndricos concêntricos de comprimento $\ell$ e raios $r_1 < r_2$. Cada solenoide é composto por $N_i$ espiras, cuja resistência total é $R_i$. Considere que o solenoide externo tem seus terminais mantidos em curto-circuito. Para efeitos de cálculo, despreze efeitos de borda.

a. Calcule a indutância do solenoide interno ($L_1$) e externo ($L_2$) usando a definição $L_i = \frac{\Phi_i}{I_i}$, e calcule a indutância mútua $M$ entre os solenoides.

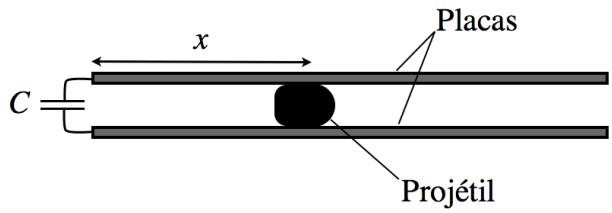
b. Utilizando o item anterior, deduza as correntes $I_1(t)$ e $I_2(t)$ nas bobinas, admitindo que o solenoide interno é alimentado por uma tensão $V_1(t) = V_0 \cos(\omega t)$. [**Dica**: Basta resolver as equações acopladas dos circuitos para determinar $I_2(t)$.]

c. Calcule a potência média dissipada no solenoide externo.

**4.9** — Uma casca esférica condutora de raio a está sujeita a um campo magnético constante $B = B_0\hat{z}$, e gira com velocidade angular $\omega$ ao redor do eixo $z$. Calcule a força eletromotriz induzida entre o polo Norte ($z = a$) e o equador ($z = 0$) dessa esfera.

**4.10** — Considere dois anéis condutores idênticos, de raio $R$, que estejam paralelos um ao outro, mas separados por uma distância $d$ ($d > R$). Encontre o valor aproximado para a indutância mútua entre os dois anéis. Suponha que o anel inferior carregue uma corrente $I = I_0 \cos \omega t$. Calcule aproximadamente a força eletromotriz induzida no outro anel. [**Dica**: você pode aproximar o campo magnético de um anel pelo campo de um dipolo magnético.]

**4.11** — Um canhão eletromagnético consiste de duas placas paralelas estreitas, conectadas a uma fonte de alta voltagem (geralmente isso é feito por meio de um capacitor muito potente). O projétil é feito de material condutor, e pode correr por entre as placas, como indicado na figura. A corrente intensa que flui pelas placas e pelo projétil gera um campo magnético poderoso, que interage com a corrente que flui pelo projétil. Essa auto-indutância do sistema é a causa da aceleração do projétil.




a. Mostre que, se a fonte produz uma corrente constante, a força no projétil é diretamente proporcional ao produto do quadrado da corrente e da auto-indutância por unidade de comprimento das placas. [**Dica**: despreze a resistência e mostre que o balanço de energia do sistema é: $dW + \frac{1}{2}I^2 dL = I^2 dL$, onde $dW$ é o trabalho realizado pelo projétil, $\frac{1}{2}I^2 dL$ é o aumento da energia do campo magnético e $I^2 dL$ é o trabalho feito pela fonte de voltagem para manter a corrente constante.]

b. Suponha que a indutância por unidade de comprimento é 10 h. Estime a corrente necessária para acelerar um projétil de 200 g até uma velocidade de 1000 m/s, em um canhão de 1 m de comprimento.

**4.12** — Um dispositivo para medir a magnitude de correntes alternadas em um fio é baseado em um solenoide helicoidal com $N$ espiras, cada qual de área $A$. O comprimento $L$ da bobina é tal que $L \gg \sqrt{A}$. O conector da última bobina retorna por dentro do eixo das espiras, como no desenho abaixo. As espiras são então curvadas de modo a circundar um fio de interesse que transporta uma corrente $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Qual é a tensão $V(t)$ induzida nos terminais do solenoide curvado? Mostre que essa força eletromotriz induzida independe da posição de onde colocamos o fio condutor percorrendo corrente no interior dela. **Dica**: calcule o fluxo sentido pela bobina devido a um fio perpendicular colocado a uma distância $a$ do centro da bobina. Utilize o seguinte resultado:

$$\int_0^{2\pi} \frac{R - a\cos\theta}{R^2 - 2aR\cos\theta + a^2} d\theta = \frac{2\pi}{R}$$

