Universidade de São Paulo
Instituto de Física

FÍSICA MODERNA I

AULA 16

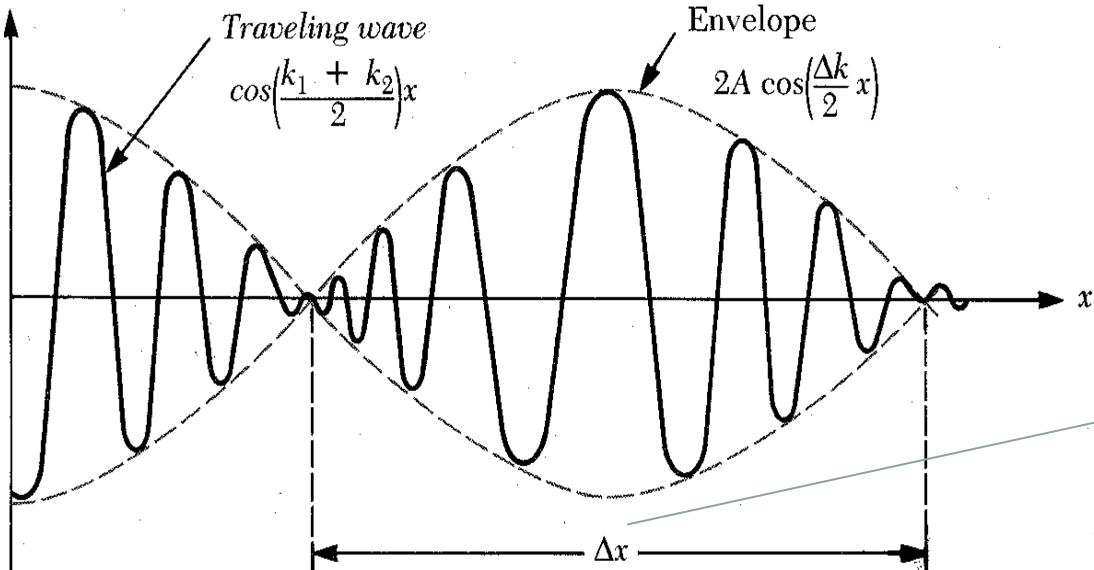
Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 114
rizzutto@if.usp.br

1o. Semestre de 2014
Monitor: Gabriel M. de Souza Santos

Página do curso:
http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=2905

30/04/2014

Superposição de duas Ondas



Podemos interpretar a onda soma como sendo um envelope que modula lentamente uma onda com k e w médios

Δx é a largura do envoltório e é inversamente proporcional ao número de onda

$$\Psi(x,t) = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A\cos\frac{1}{2}(\Delta kx - \Delta\omega t)\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

amplitude (envelope)

A velocidade de propagação das ondas individuais v_f=w/k

$$\frac{1}{2}(\Delta kx - \Delta\omega t) = \frac{1}{2}\Delta k\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right) = \frac{1}{2}\Delta k(x - v_g t)$$

velocidade de grupo

A velocidade de propagação do grupo (que é a velocidade do envoltório)

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Em contraste com o pulso a combinação de ondas não é localizada no espaço

Ondas harmônicas que compõem um pacote de ondas. A velocidade é dada por:

$$v_f = \lambda f \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} \qquad \omega = 2\pi f$$

Velocidade de fase

$$v_f = \left(\frac{2\pi}{k}\right)\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

$$v_f = \left(\frac{\omega}{k}\right)$$

$$v_f .k = \omega$$

A velocidade de grupo esta relacionada a velocidade de fase por:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

- A velocidade v_g pod ser > ou < que v_f

Meios não dispersivos

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

Se a velocidade de fase é a mesma para todas as frequências e para todas os comprimentos de onda

$$\frac{dv_f}{dk} = 0 \qquad \therefore v_g = v_f$$

O meio pelo qual a v_f é a mesma para todas as frequências é dito → NÃO DISPERSIVO

Exemplos de meios não dispersivos:

- Corda perfeitamente flexível para ondas mecânicas
- Ar para as ondas sonoras
- Vácuo para ondas eletromagnéticas

<u>Característica importante:</u>

como todas as ondas harmônicas que foram um pacote de ondas se movem com a mesma velocidade, o pacote se propaga sem mudar de forma

Meios dispersivos

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(kv_f) = v_f + k\frac{dv_f}{dk}$$

Por outro lado quando a velocidade de fase é diferente para as diferentes frequências, temos que $\frac{dv_f}{dk} \neq 0$ $\therefore v_f \neq v_g$

Neste caso o meio é dito $\Longrightarrow$ DISPERSIVO

Exemplos de meios dispersivos:

- Água para as ondas do mar
- Corda que não é perfeitamente flexível para ondas mecânicas
- Meio transparente como o vidro ou água para as ondas luminosas
- Qualquer meio para as ondas da matéria

- Para o postulado de de Broglie

$$E = h\nu = \hbar\omega \qquad \mathrm{p} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \qquad \mathrm{E} = \frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}}$$

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{\hbar}\frac{\hbar}{p} = \frac{p^2}{2mp} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$

- A velocidade de fase não corresponde a velocidade da partícula

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v$$

- O pacote de onda se propaga com velocidade do elétron

Exercício:

1) Certas ondas de oceano viajam com velocidade de fase

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

onde g é a aceleração da gravidade. Determine a velocidade do grupo do "pacote de onda" destas ondas (expresse em termos da velocidade de fase).

Lembrando que a velocidade de grupo: $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$

Sabemos que: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ e $\omega = 2\pi f$ e $v_f = \lambda f = \left(\dfrac{2\pi}{k}\right) . \left(\dfrac{\omega}{2\pi}\right) = \left(\dfrac{\omega}{k}\right)$

então:

$$v_f = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \left(\frac{g}{2\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{2\pi}{k}\right)^{1/2}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{\omega}{k} \qquad \omega = \sqrt{gk}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(\sqrt{gk})$$

$$v_g = \frac{1}{2}k^{-1/2}\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} \qquad v_g = \frac{1}{2}v_f$$

Probabilidade

A conexão Ψ (função de onda) com probabilidades foi proposto por Max Born em 1925 e diz:

A probabilidade que a partícula seja encontrada em um intervalo infinitesimal dx em torno do ponto x é denominado por P(d)dx e é dado por:

$$P(x)dx = \left|\Psi(x,t)\right|^2 dx$$

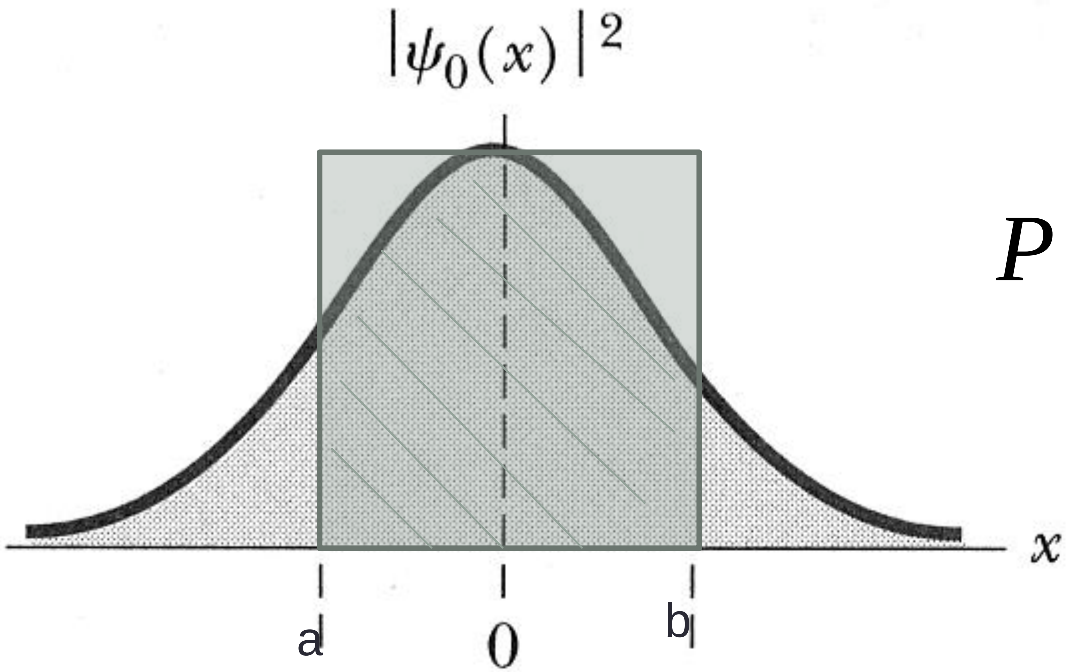
Ψ não é uma quantidade mensurável, mas o seu módulo ao quadro é mensurável e é justamente a probabilidade por unidade de comprimento ou densidade de probabilidade P(x) para encontrar a partícula no ponto x no tempo t.

<u>Já que a partícula deve ser encontrada em algum lugar ao longo do eixo x, a soma das probabilidade sobre todos os valores de x deve ser 1.</u>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$$

Qualquer função que satisfaz esta equação é dita normalizada

A probabilidade de uma partícula estar no intervalo a=<x<=b esta relacionado área embaixo da curva de a até b de uma função densidade de probabilidade $|\Psi(x,t)|^2$



$$P = \int_a^b |\Psi(x,t)|^2 dx =$$

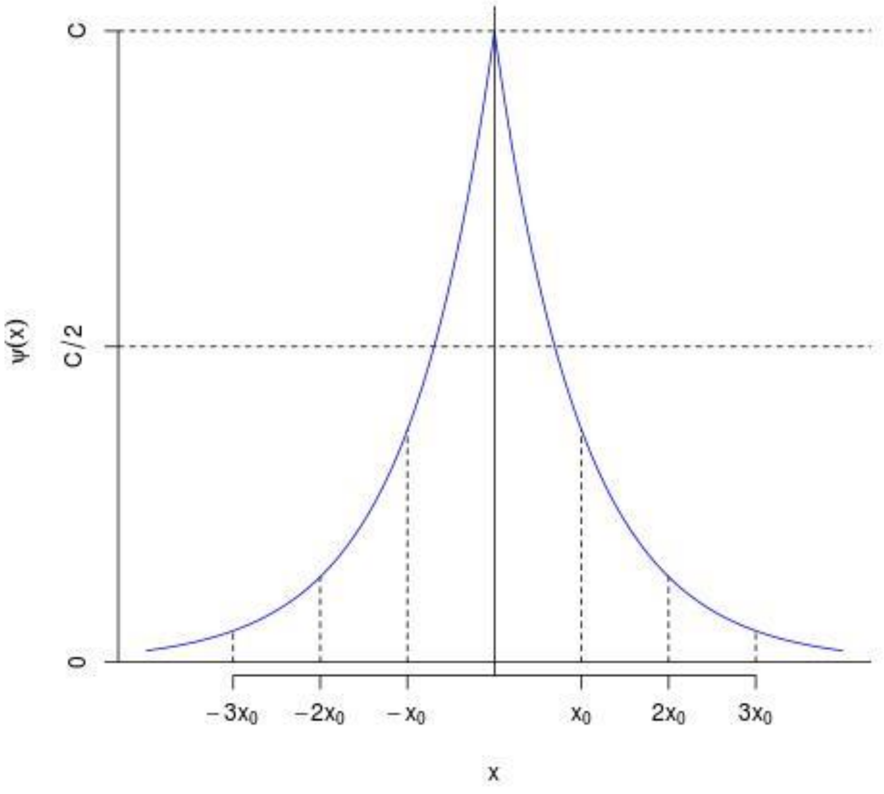
o área embaixo da curva entre a e b

Exercício:

2) A função de onda inicial de uma partícula é dada por:

$$\Psi(x,0) = Ce^{-|x|/x_0}$$ onde C e x_0 são constantes

a) Desenhe esta função



Exercício:

2) A função de onda inicial de uma partícula é dada por:

$$\Psi(x,0) = Ce^{-|x|/x_0}$$ onde C e x_0 são constantes.

b) Encontre C em termos de x_0 temos que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C^2 e^{-2|x|/x_0} dx = 1$$

$$2C^2 \int_{0}^{+\infty} e^{-2|x|/x_0} dx = 2C^2 \left. \frac{e^{-|x|/x_0}}{-2/x_0} \right|_0^{\infty}$$

$$-C^2 x_0 (0-1) = C^2 x_0 = 1$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$$

Exercício:

2) A função de onda inicial de uma partícula é dada por:

$$\Psi(x,0) = Ce^{-|x|/x_0}$$ onde C e x_0 são constantes.

c) Calcule a probabilidade de encontrar a partícula no intervalo $-x_0 =< x <= x_0$.

$$P = \int_a^b |\Psi(x,t)|^2 dx$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$$

$$P = \int_{-x_0}^{+x_0} C^2 e^{-2|x|/x_0} dx =$$

$$2C^2 \int_0^{+x_0} e^{-2|x|/x_0} dx = 2C^2 \left. \frac{e^{-2|x|/x_0}}{-2/x_0} \right|_0^{x_0}$$

$$-C^2 x_0 (e^{-2} - 1) = \frac{1}{x_0} x_0 (1 - e^{-2})$$

$$\boxed{P = (1 - e^{-2}) = 0.8647 = 86,5\%}$$

O princípio da incerteza

Vimos que o princípio de incerteza de Heisenberg, diz:
que é impossível determinar (fazer medidas) simultaneamente da posição e momento de uma partícula) (x e p_x, por exemplo) apresentam uma relação entre suas incertezas dada por

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{p}{h} = \frac{p}{\hbar}$$

Quanto mais bem definida a posição de uma partícula (pacote de onda mais estreito), menos definido será o momento dessa partícula (uma combinação maior de comprimentos de onda, e portanto de momentos será necessário)

O princípio de incerteza também pode ser enunciado em termos da energia e do tempo:
Das propriedades do pacote de onda, tem-se que:

$$\Delta\omega . \Delta t \geq \frac{1}{2}$$

$$E = h\nu = h\frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega$$

$$\Delta E . \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Exercício:

3) Um elétron se move na direção x com velocidade de $3,6x10^6$m/s

Podemos medir sua velocidade com precisão de 1%

a) Com que precisão podemos medir simultaneamente sua posição

b) o que podemos dizer sobre o movimento na direção y