

Capítulo 4

Noções da teoria da plasticidade

4.1 Introdução

No âmbito da Resistência dos Materiais e da Teoria da Elasticidade, a resolução do problema estrutural impõe sempre os conceitos de elasticidade e linearidade, na definição do comportamento reológico dos materiais de que são constituídas as estruturas.

Um material é dito de comportamento elástico se, quando sob ação de uma solicitação externa, as deformações se processam de forma imediata e ainda, ao se retirar a solicitação, este volta à sua configuração inicial, ou seja as deformações são reversíveis.

Um material é dito de comportamento linear, quando existir proporcionalidade entre tensões e deformações, ou seja as suas relações constitutivas são expressas pela lei de Hooke quando se tratar de estados de tensão simples e pela lei de Hooke generalizada quando se tratar de estados de tensão triaxiais.

Em resumo, no estudo dos problemas estruturais no âmbito da Resistência dos Materiais e da Teoria da Elasticidade consideram-se as estruturas constituídas de materiais com comportamento reológico definido por resposta elástica e linear.

O conceito de não linearidade física está associado aos materiais para os quais não existe proporcionalidade entre tensão e deformação e, portanto, não é válida a lei de Hooke nas duas formas anteriormente citadas.

O conceito de plasticidade está associado aos materiais para os quais a resposta deixa de ser elástica, ou seja, embora as deformações continuem processando-se de forma imediata, ao se retirar a solicitação estes não voltam às configurações iniciais, permanecendo deformados (deformação residual). Tais deformações irreversíveis são as chamadas deformações plásticas.

Para exemplificar serão analisados alguns diagramas que representam as relações entre tensões σ e deformações ε obtidos em ensaios de tração e compressão simples para distintos materiais.

A Figura 4.1a mostra um material de comportamento elástico e linear também definido como um material elasto-frágil. Neste caso as deformações entre A e A' se processam de forma reversível e respeitando proporcionalidade com as tensões, ou seja

$$\sigma = E\varepsilon$$

com

$$E = \operatorname{tg}\alpha.$$

Observar que este material é frágil, pois ao se atingirem os pontos A e A' o material se desagrega ficando definidas nestes pontos as tensões de ruptura à tração (σ_{rt}) e à compressão (σ_{rc}).

Note-se também que ao se atingir a tensão σ_e as deformações crescem rapidamente sem que ocorram variações de tensão e, portanto, definindo um trecho reto praticamente paralelo ao eixo dos ε que é dito patamar de escoamento e que é próprio dos materiais dúcteis. Para estes materiais a tensão limite de elasticidade σ_e é também denominada tensão de escoamento.

A continuidade do ensaio leva a um aumento de tensão no final do patamar que se deve à contração da seção transversal e que ocorre pouco antes de se atingir a ruptura.

Os aços laminados a quente (CA50-A) apresentam diagramas tensão–deformação do tipo indicado na Figura 4.2.

Já os aços encruados por laminação a frio (CA50-B), apresentam diagrama tensão–deformação como o indicado na Figura 4.3.

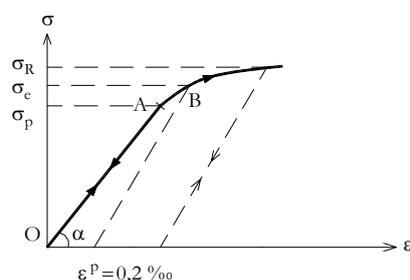


Figura 4.3: Diagrama tensão–deformação do aço CA 50-B.

Notar que estes aços não apresentam patamar de escoamento. O seu limite de elasticidade é convencional e se caracteriza pela tensão σ_e para qual está associada uma deformação plástica (permanente) $\varepsilon = 0,2\%$.

No estudo que aqui se apresenta acerca das noções da Teoria da Plasticidade, serão considerados materiais cujo diagrama tensão–deformação está indicado na Figura 4.4 e que são definidos como elasto–plástico ideais.

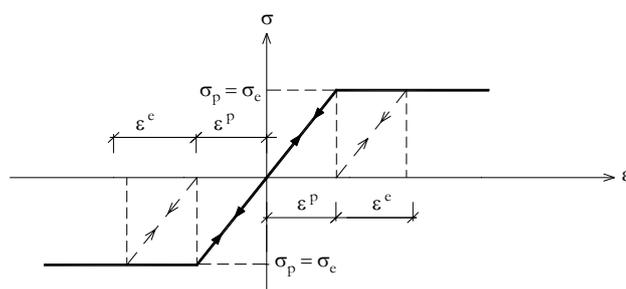


Figura 4.4: Diagrama tensão–deformação de material elasto–plástico ideal.

4.2 Generalidades

Neste item serão abordados alguns aspectos relativos ao conceito de segurança das estruturas e a sua interdependência com as condições de resposta dos materiais, ou seja a

resposta em regime elástico-linear e a resposta em regime elasto-plástico; adotar-se-á aqui, como modelo reológico aquele correspondente ao material elasto-plástico ideal.

O conceito de segurança de uma estrutura que, a princípio é puramente qualitativo, está ligado à capacidade de que esta apresenta de suportar, durante toda a vida útil, as diversas ações para as quais ela foi projetada, mantendo as condições funcionais a que se destina.

Obviamente, para que se possa quantificar esta segurança é necessário que:

- se conheça a resposta da estrutura para as ações consideradas, determinando-se os esforços internos, as deformações e os deslocamentos, os quais estão associados a um dado comportamento reológico.
- se estabeleçam determinados critérios de comparação com as respostas encontradas de tal forma que se possa medir a sua segurança. Tais critérios de comparação podem ser de dois tipos:
 - a) critérios de resistência onde são definidas condições que permitem medir a segurança quanto à capacidade que a estrutura tem de resistir às ações para as quais foi projetada.
 - b) critérios de funcionalidade e durabilidade das estruturas que permitem estabelecer as condições adequadas para a sua utilização.

A forma clássica de avaliação da segurança das estruturas em relação à sua capacidade resistente é feita pelo método das tensões admissíveis onde a medida da segurança é obtida através do coeficiente de segurança interno γ_i e adotando-se, em geral, como critério de resistência para as estruturas reticuladas, o Critério da Máxima Tensão Normal.

Desta forma, a medida da segurança, tendo em conta o Método das Tensões Admissíveis e na hipótese de se considerar um material de comportamento elasto-plástico ideal (Figura 4.4), pode ser expressa pela desigualdade

$$-\bar{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}$$

onde σ é a tensão normal em qualquer ponto da estrutura, devida ao carregamento externo, $\bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{\gamma_i}$ é a tensão admissível, $\gamma_i > 1$ é o coeficiente de segurança interno e σ_e a tensão de escoamento na tração ou compressão.

A adoção do M.T.A. na avaliação das estruturas implica que em nenhum ponto da estrutura se possa ter tensões em módulo superiores à tensão admissível; o coeficiente de segurança γ_i mede o quanto a tensão admissível se afasta da tensão limite de escoamento. Fica claro também que, na avaliação da segurança em termos das tensões admissíveis, para materiais com comportamento elasto-plástico ideal, basta ter-se a resposta da estrutura (σ) em regime elástico linear.

Como ilustração tome-se o exemplo 1.

Exemplo 1 Adotando-se o M.T.A., determinar para as estruturas mostradas nas Figuras 4.5a e 4.5b, o coeficiente de segurança interno γ_i na hipótese de o material ter comportamento elasto-plástico ideal com tensão de escoamento na tração e na compressão $\sigma_e = 10000 \text{ N/cm}^2$.

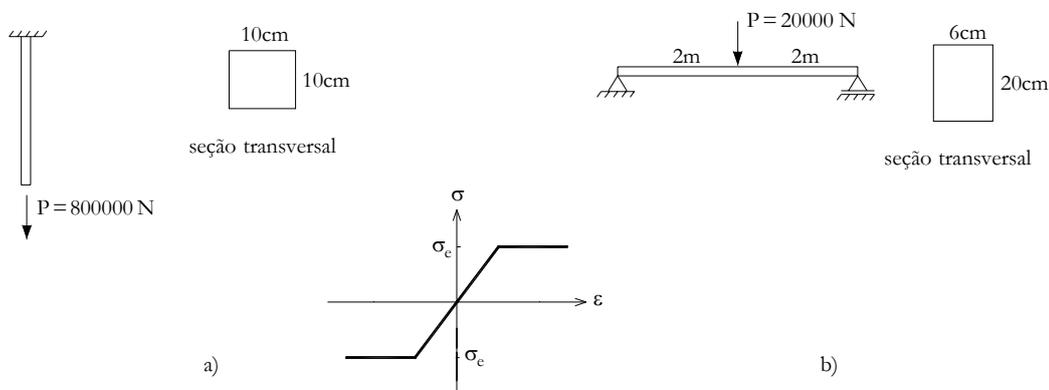


Figura 4.5: Exemplos.

Solução:

No caso da viga submetida à carga axial, a sua solução em termos de esforços solicitantes é dada por força normal constante ao longo da barra e igual a $N = 800000 \text{ N}$. Portanto em todos os pontos da barra a tensão normal é

$$\sigma = \sigma_{\text{máx}} = \frac{N}{A} = \frac{800000}{100} = 8000 \text{ N/cm}^2.$$

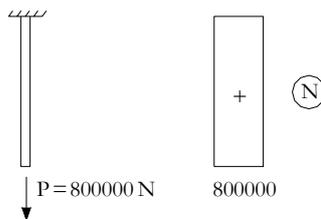


Figura 4.6: Viga – Carga axial.

Impondo-se a condição de segurança pelo M.T.A. e adotando-se como critério de resistência o critério da Máxima Tensão Normal tem-se

$$\sigma_{\text{máx}} \leq \bar{\sigma}$$

onde

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_e}{\gamma_i} = \frac{10000}{\gamma_i}$$

isto é

$$8000 \leq \frac{10000}{\gamma_i}.$$

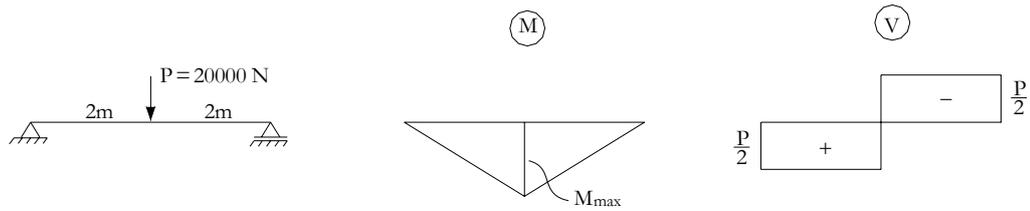


Figura 4.7: Viga. Flexão.

De onde se conclui que $\gamma_i = 1,25$ é o coeficiente de segurança interno da estrutura da Figura 4.5a.

No caso da viga sobre dois apoios, a sua solução em termos de esforços solicitantes é indicada na Figura 4.7, onde

$$M_{\text{máx}} = \frac{P\ell}{4} = \frac{20000 \times 400}{4}$$

$$M_{\text{máx}} = 2000000 \text{ N.cm}$$

e

$$V = \frac{P}{2} = 10000 \text{ N.}$$

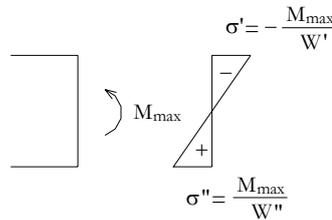


Figura 4.8:

Assim, as tensões normais máximas ocorrem na seção de $M_{\text{máx}}$ e nas fibras superior e inferior e são dadas por:

$$\sigma'_{\text{máx}} = -\frac{M_{\text{máx}}}{W'}$$

$$\sigma''_{\text{máx}} = +\frac{M_{\text{máx}}}{W''}$$

onde $W' = W'' = \frac{bh^2}{6} = \frac{6 \times (20)^2}{6} = 400 \text{ cm}^3$ e $M_{\text{máx}} = 2000000 \text{ N.cm}$.

Desta forma tem-se

$$\sigma''_{\text{máx}} = -\sigma'_{\text{máx}} = 5000 \text{ N/cm}^2.$$

Impondo-se a condição de segurança pelo M.T.A. e adotando-se como critério de resistência o Critério da Máxima Tensão Normal tem-se:

$$\begin{array}{l} \text{na fibra inferior} \\ \text{na fibra superior} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sigma''_{\text{máx}} = +5000 \leq \bar{\sigma} = \frac{10000}{\gamma_i} \Rightarrow \gamma_i \leq 2,0 \\ \sigma'_{\text{máx}} = -5000 \leq -\bar{\sigma} = -\frac{10000}{\gamma_i} \Rightarrow \gamma_i \leq 2,0 \end{array}$$

ou seja o coeficiente de segurança interno da estrutura da Figura 4.5b é

$$\gamma_i = 2,0.$$

Notar que a adoção do Critério da Máxima Tensão Normal para as estruturas submetidas a esforços de flexão acompanhados de força cortante, não exige a avaliação das tensões de cisalhamento decorrentes desta última.

Tome-se agora para análise o exemplo 2.

Exemplo 2 Para as mesmas estruturas da Figura 4.5 determinar o valor da carga $P = P_I$ para a qual ocorre no ponto mais solicitado da estrutura tensão normal igual à tensão de escoamento ($|\sigma_{\text{máx}}| = \sigma_e$), ou seja, determinar o valor de P_I para que a estrutura entre em regime plástico.

Solução:

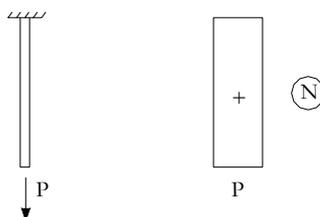


Figura 4.9:

Para a estrutura a) tem-se

$$N = N_{\text{máx}} = P = \text{cte}$$

e, portanto,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} = \frac{P}{100} \text{ N/cm}^2$$

constante para todo os pontos da estrutura.

Desta forma a condição imposta para determinação de P_I fica

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{máx}} &= \frac{P_I}{A} = \sigma_e = 10000 \text{ N/cm}^2 \\ \therefore P_I &= 1000000 \text{ N} \end{aligned}$$

Para a estrutura b) tem-se (Figura 4.10) na seção do meio do vão

$$\begin{aligned} M_{\text{máx}} &= \frac{P \times 400}{4} \text{ N.cm} \\ M_{\text{máx}} &= 100P \text{ N.cm.} \end{aligned}$$

As tensões normais máximas em módulo nas fibras extremas ocorrem na seção do meio do vão e são:

$$\begin{aligned} \text{na fibra inferior} \quad \sigma''_{\text{máx}} &= \frac{M_{\text{máx}}}{W''} = \frac{100P}{400} = 0,25P \text{ N/cm}^2 \\ \text{na fibra superior} \quad \sigma'_{\text{máx}} &= \frac{-M_{\text{máx}}}{W'} = -\frac{100P}{400} = -0,25P \text{ N/cm}^2. \end{aligned}$$

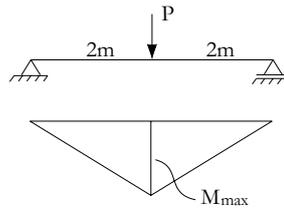


Figura 4.10:

Desta forma a condição imposta para determinação de P_I fica

$$\begin{aligned} \sigma''_{\text{máx}} &= 0,25P_I = \sigma_e = 10000 \text{ kgf/cm}^2 \therefore P_I = 40000 \text{ N} \\ \sigma'_{\text{máx}} &= -0,25P_I = -\sigma_e = -10000 \text{ kgf/cm}^2 \therefore P_I = 40000 \text{ N}. \end{aligned}$$

Assim a carga $P_I = 40000 \text{ N}$ define o final de comportamento da estrutura em regime elástico e, portanto, o início do regime plástico. Nesta caso as tensões normais na seção do meio do vão se distribuem conforme indicado na Figura 4.11.

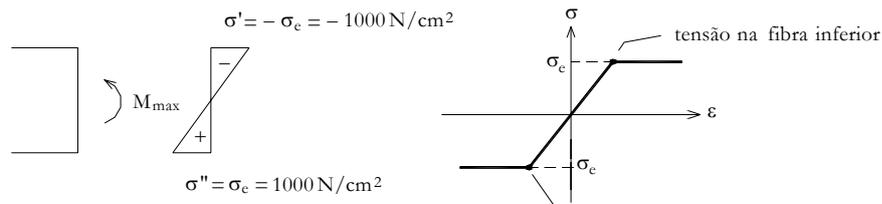


Figura 4.11: Tensões no meio do vão.

Posto isso, define-se como Primeiro Limite de uma estrutura submetida a uma carga única P , como sendo o valor da carga $P = P_I$ que causa o início de escoamento da estrutura, ou seja, é o valor da carga que provoca o aparecimento, no ponto mais solicitado da estrutura, de uma tensão normal igual à tensão de escoamento σ_e .

Assim, no exemplo 2 tem-se para as estruturas a) e b), o Primeiro Limite de cada uma delas dado, respectivamente, por $P_I = 1000000 \text{ N}$ e $P_I = 40000 \text{ N}$.

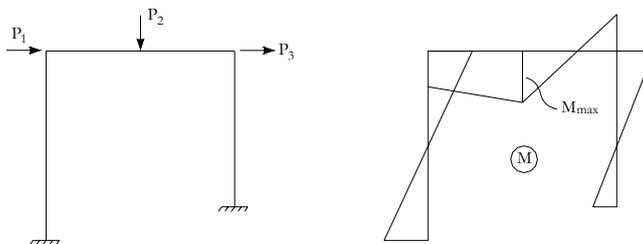


Figura 4.12:

Imagine-se que a estrutura esteja submetida a um conjunto de cargas fixas, conforme indicado na Figura 4.12. Define-se como Primeiro Limite da estrutura submetida a um

conjunto de carregamento fixo, ao multiplicador γ_I deste carregamento para o qual na seção mais solicitada se atinja uma tensão $\sigma_{\text{máx}} = \sigma_e$.

Pode-se agora imaginar estabelecer-se uma medida de segurança em relação ao Primeiro Limite da estrutura, definindo-se assim um coeficiente de segurança externo dado por:

$$\gamma_e = \frac{P_I}{P} > 1$$

ou, o que é o mesmo, avaliando-se o multiplicador γ_I .

Tal coeficiente de segurança estabelece, portanto, como medida de segurança, a distância entre a carga de Primeiro Limite da estrutura e a carga de utilização.

Analisando-se o exemplo 2 e determinando-se o coeficiente de segurança externo para as estruturas a) e b) tem-se

$$\begin{aligned} \text{estrutura a)} \quad \gamma_e &= \frac{P_I}{P} = \frac{1000000}{800000} = 1,25 \\ \text{estrutura b)} \quad \gamma_e &= \frac{P_I}{P} = \frac{40000}{20000} = 2,00. \end{aligned}$$

É importante observar que a medida de segurança avaliada em termos do M.T.A. a partir da determinação do coeficiente de segurança interno γ_i (exemplo 1) e aquela feita em relação ao coeficiente de segurança externo γ_e obtido em relação ao Primeiro Limite das estruturas, (exemplo 2), conduz a valores de $\gamma_i = \gamma_e$. Isto se deve obviamente ao fato de que as respostas das estruturas em ambos os exemplos mantiveram a proporcionalidade entre tensão e deformação (resposta linear) e, portanto, enquanto for válido o comportamento elástico linear, os coeficientes de segurança interno e externo são iguais.

É de extrema importância avaliar-se agora o que ocorre com as estruturas a) e b) do exemplo anterior, quando, atingido o valor da carga de Primeiro Limite P_I , se continue a aumentar o carregamento, portanto introduzindo-se acréscimos de carga ΔP em relação a P_I .

Para a estrutura a) pode-se observar que ao se atingir a carga $P_I = 1000000 \text{ N}$ de Primeiro Limite, todos os pontos da estrutura atingem o escoamento e, portanto, a estrutura perde a capacidade de absorver qualquer acréscimo de carga além de P_I , atingindo assim a ruína. Neste caso a carga P_I para a qual a estrutura entra em regime plástico é igual à carga que leva a estrutura à ruína por plastificação de todas as seções.

Para a estrutura b), ao atingir-se a carga P_I , a estrutura continua a ter capacidade portante, ou seja, continua a ter capacidade de absorver acréscimos de carga além de P_I ; porém a resposta da estrutura já não se processa mais em regime elástico linear em todos os seus pontos. Assim, as fibras extremas da seção do meio do vão, atingiram os patamares de escoamento à tração e à compressão e, portanto, para qualquer acréscimo de carga acima de P_I , nestas fibras a tensão é mantida em $\pm\sigma_e$ e nelas se processam somente acréscimos de deformações.

Analisando-se o que ocorre na seção do meio do vão em termos de distribuição de tensões normais para valores de $P > P_I$, nota-se que os outros pontos desta seção continuam a se deformar em regime plástico linear até atingirem o patamar de escoamento e a partir daí se deformam plasticamente (Figura 4.13).

A continuar-se a carregar a viga, ocorrerá na seção do meio do vão a plastificação de toda a seção, ou seja, toda a seção atinge a tensão de escoamento e, portanto, esta seção perde a capacidade de absorver acréscimos de esforços (Figura 4.14) criando-se aí uma rótula plástica.

Em outras palavras, ao atingir-se a plastificação de uma seção transversal de uma estrutura, por efeito de flexão, é como se se esgotasse a capacidade desta seção de absorver

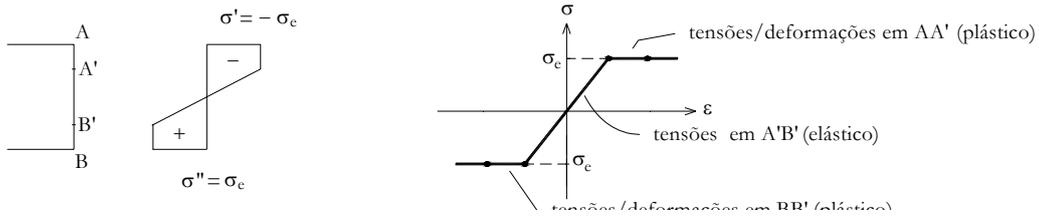


Figura 4.13: Seção do meio do vão $P > P_I$.

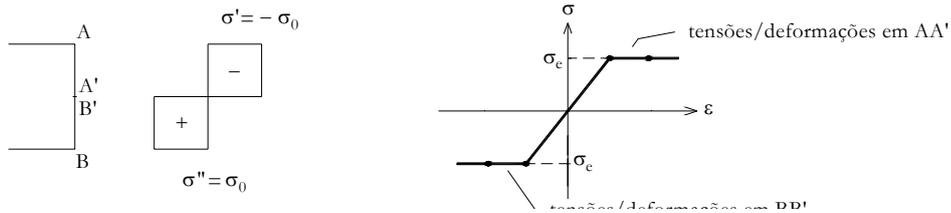


Figura 4.14: Plastificação da seção transversal em BB'

acréscimos de momento fletor além daquele que equilibra a distribuição de tensões da seção plastificada. Este momento é chamado de momento de plastificação da seção transversal. A denominação de rótula plástica dada às seções transversais plastificadas por flexão está ligada à sua perda de capacidade de absorção de momento fletor, acima do momento de plastificação, para quaisquer acréscimos de carga superiores àquela que provoca a referida plastificação.

Desta forma, para a estrutura b) do exemplo, existe uma carga $P_{II} > P_I$ para a qual a seção do meio do vão plastifica-se, criando-se, portanto, neste ponto uma rótula plástica, onde o momento de plastificação é M_{II} ; assim, para a carga P_{II} os esforços de flexão na viga estão indicados na Figura 4.15. Obviamente a viga simples isostática, com a ocorrência da rótula na seção do meio do vão, se transforma em um mecanismo, ou seja, se transforma em um sistema hipostático, caracterizando sua ruína.

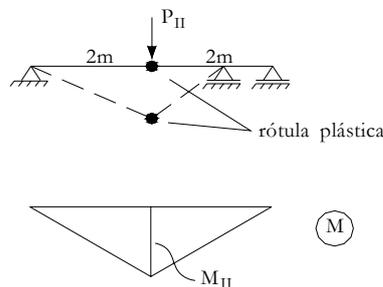


Figura 4.15:

Posto isso, define-se como Segundo Limite de uma estrutura, submetida a uma carga única P , como sendo o valor da carga $P = P_{II}$ que leva a estrutura inicial, a torna-se parcial ou totalmente hipostática, devido à plastificação de algumas seções.

Assim no exemplo 2, para a estrutura correspondente à barra solicitada axialmente, a carga que define o seu Segundo Limite, coincide com a carga de Primeiro Limite e, portanto, tem-se

$$P_{II} = 1000000 N$$

Para a estrutura b) do mesmo exemplo, que corresponde à viga simplesmente apoiada, o valor da carga que define o Segundo Limite da estrutura, como se verá adiante, pode ser calculado¹, obtendo-se:

$$P_{II} = 60000 N$$

Define-se como Segundo Limite de uma estrutura submetida a um conjunto de carregamento fixo, ao multiplicador γ_{II} deste carregamento, para o qual a estrutura inicial torna-se parcial ou totalmente hipostática, devido à plastificação de algumas seções.

É importante salientar que os conceitos mais modernos de segurança das estruturas estão associados ao Método dos Estados Limites. Assim uma das medidas de segurança das estruturas pode ser feita a partir do Estado Limite Último de Colapso da estrutura o qual corresponde ao esgotamento da capacidade portante da estrutura por transformação desta em estrutura parcial ou totalmente hipostática devido à plastificação de algumas seções. Isto significa que a segurança ao Estado Limite Último de Colapso é imposta em relação a um afastamento ao seu Segundo Limite, ou seja, determinando-se um coeficiente de segurança externo γ_e tal que:

$$\gamma_e = \frac{P_{II}}{P} > 1,0$$

ou, o que é mesmo, avaliando-se o multiplicador γ_{II} .

Assim a medida da segurança em relação ao Segundo Limite ou, o que é o mesmo, em relação ao Estado Limite Último de Colapso da Estrutura, avaliada para as estruturas a) e b) do exemplo 2 fica:

$$\begin{aligned} \text{estrutura a)} \quad \gamma_e &= \frac{P_{II}}{P} = \frac{100000}{80000} = 1,25 \\ \text{estrutura b)} \quad \gamma_e &= \frac{P_{II}}{P} = \frac{6000}{2000} = 3,00. \end{aligned}$$

¹Para seção retangular o momento de plastificação M_{II} é

$$\begin{aligned} M_{II} &= F_z \cdot c = \sigma_e b \frac{h}{2} \frac{h}{2} = \sigma_e \frac{bh^2}{4} \\ M_{II} &= 10000 \times 6 \times \frac{(20)^2}{4} = 6000000 N.cm \\ M_{II} &= \frac{P_{II} \ell}{4} \Rightarrow 6000000 = \frac{P_{II} \times 400}{4} \\ \therefore P_{II} &= 60000 N \end{aligned}$$

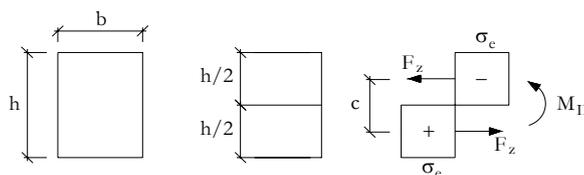


Figura 4.16:

Nota-se que para a estrutura a) a medida da segurança em relação ao Primeiro Limite e ao Segundo Limite não mudou, pois para esta estrutura $P_I = P_{II}$; porém para a estrutura b) a medida de segurança em relação ao Segundo Limite (ou seja, em relação ao seu colapso) é $\gamma_e = 3,0$, enquanto em relação ao M.T.A. é $\gamma_i = 2,0$.

Isto indica que a imposição da segurança em relação ao seu Segundo Limite pode levar a estruturas mais econômicas; ressalte-se ainda que as diferenças entre as medidas de segurança em relação ao Segundo Limite e ao Primeiro Limite tendem a ser maiores quanto maior for o grau de hiperestaticidade das estruturas.

Fica claro aqui que a consideração da segurança das estruturas em relação ao seu Estado Limite de Colapso, exige que se determine o Segundo Limite desta. Tal avaliação só pode ser feita, obviamente, saindo-se do regime elástico linear e adotando-se um comportamento elasto-plástico na análise da estrutura. Aqui reside a importância dos estudos das barras em regime elasto-plástico ideal que se apresentará a seguir. Serão abordados em seguida os métodos de cálculo para determinação das cargas de Segundo Limite ou dos multiplicadores destas cargas, tendo em conta materiais de comportamento elasto-plástico ideal em estruturas de barras submetidas a esforços axiais e de flexão.

Em resumo, pode-se dizer que a medida da segurança feita com base no M.T.A. pela determinação do coeficiente de segurança interno γ_i ou, o que é o mesmo para estruturas em regime elástico linear, pela determinação do coeficiente de segurança externo γ_e definido em relação ao Primeiro Limite tem como crítica principal a distância grande que pode introduzir entre a situação de utilização e aquela que corresponderia à ruína da estrutura. Esta distância pode ser tanto maior quanto maior for o grau de hiperestaticidade da estrutura, podendo conduzir a estruturas mais seguras porém anti-econômicas².

A medida da segurança feita a partir da determinação do coeficiente de segurança externo γ_e avaliado em relação ao Segundo Limite da estrutura é, portanto, mais satisfatória podendo assim, mesmo com restrições maiores, conduzir a estruturas mais seguras e mais econômicas, exigindo porém a determinação das respostas estruturais fora do regime elástico linear. Daí a importância, como já se citou, da consideração da plasticidade no comportamento das estruturas.

4.3 Critérios de resistência

Nos exemplos até aqui apresentados consideraram-se estruturas de barra com comportamento elasto-plástico ideal e adotou-se como critério de resistência o da Máxima Tensão Normal também chamado de Critério de Rankine.

De forma geral pode-se dizer que os critérios de resistência definem condições tais que para dado material e dado estado de tensão este se encontra em regime elástico linear ou regime plástico. Desta forma definem-se as chamadas funções de plastificação ϕ tais que, aplicadas a um dado estado de tensão em um ponto da estrutura, apresentam a seguinte característica:

$$\begin{aligned} \phi(\{\sigma\}) < 0 & \quad \text{o estado de tensão é elástico} \\ \phi(\{\sigma\}) = 0 & \quad \text{o estado de tensão é plástico} \\ \phi(\{\sigma\}) > 0 & \quad \text{o estado de tensão é impossível.} \end{aligned}$$

²Segundo o prof. Décio de Zagottis em seu "Introdução à Segurança no Projeto Estrutural": "A utilização do Método das Tensões Admissíveis, hoje, é inadmissível".

4.3.1 Critério da Máxima Tensão Normal

Exemplificando, o Critério da Máxima Tensão Normal ou Critério de Rankine estabelece que um material entra em regime plástico quando a tensão normal se iguala à tensão de escoamento à tração σ_{et} ou à compressão σ_{ec} . Desta maneira a função de plastificação associada a este critério de resistência pode ser escrita:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \sigma_1 - \sigma_{et} \\ \phi_2 &= \sigma_{ec} - \sigma_3\end{aligned}$$

onde σ_1 é a tensão principal de tração e σ_3 é a tensão principal de compressão.

A representação do Critério de Rankine no plano (σ, τ) do Círculo de Mohr fica caracterizada por duas linhas paralelas ao eixo dos τ e passando por σ_{et} e σ_{ec} tais que (Figura 4.17):

- círculo A: regime elástico
- círculo B: regime plástico com encruamento por tração
- círculo C: regime plástico com encruamento por compressão
- círculo D: estado de tensão impossível.

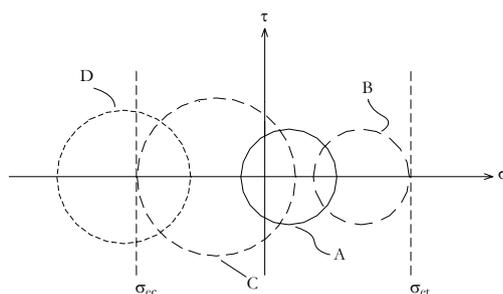


Figura 4.17: Critério de Rankine.

Existem vários critérios de resistência que procuram identificar, para distintos materiais e levando em conta os estados múltiplos de tensão que se instalam nas estruturas, se tais materiais estão em regime elástico ou plástico. A seguir se descrevem alguns critérios de resistência mais usuais.

4.3.2 Critério da Maior Tensão de Cisalhamento (Critério de Tresca)

Este critério impõe a condição de que a maior tensão de cisalhamento não deve ultrapassar a metade da tensão limite de tração do material obtida em ensaio de tração simples.

Assim, a função de plastificação associada ao Critério de Tresca se escreve

$$\phi = \tau_{\text{máx}} - \frac{\sigma_t}{2}$$

ou, ainda,

$$\phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_t}{2}$$

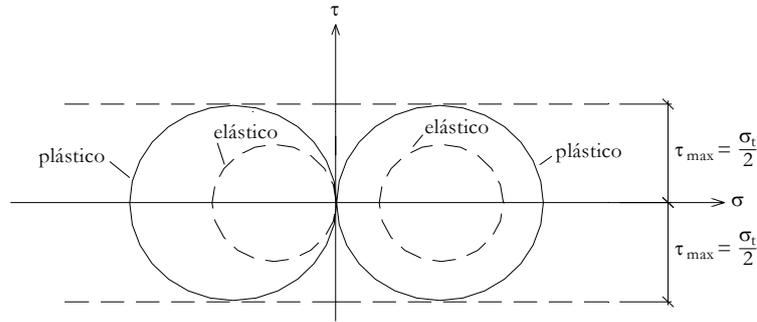


Figura 4.18: Critério de Tresca.

pois, $\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ e σ_1 e σ_3 são as tensões principais extremas.

A representação deste critério no plano (σ, τ) do círculo de Mohr fica (Figura 4.18).

Este critério é em geral utilizado para materiais dúcteis com resistências iguais à tração e à compressão.

4.3.3 Critério de Mohr–Coulomb

Este critério estabelece que a tensão de cisalhamento não deve ultrapassar o valor

$$c - \sigma \text{tg} \varphi$$

onde σ é a tensão normal atuante, c é a coesão do material, φ é o ângulo de atrito interno do material.

Assim, a função de plastificação associada a este critério fica

$$\phi = \tau - R$$

onde

$$R = c - \sigma \text{tg} \varphi.$$

A representação deste critério no plano (σ, τ) do círculo de Mohr fica (Figura 4.19).

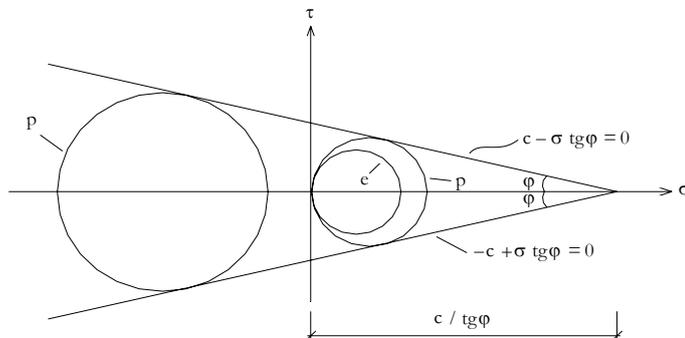


Figura 4.19: Critério de Mohr–Coulomb.

Este critério é muito empregado para materiais pulverulentos e é também conhecido como Critério do Atrito Interno.

4.4 Estudo das tensões nas estruturas reticuladas com comportamento elasto-plástico ideal.

Neste item se abordará o estudo das tensões nas estruturas reticuladas constituídas de materiais de comportamento elasto-plástico ideal cujo diagrama tensão-deformação encontra-se indicado na Figura 4.20.

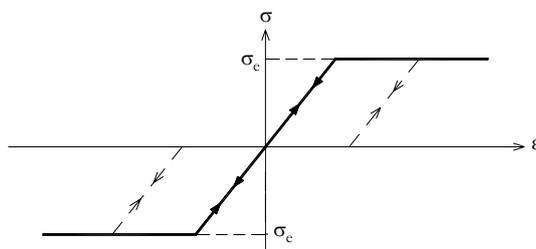


Figura 4.20: Material elasto-plástico ideal.

Inicialmente serão estudadas as estruturas submetidas a solicitações axiais e em seguida as estruturas submetidas à flexão.

Nos dois casos serão avaliados, para alguns exemplos, os valores das cargas de Primeiro e Segundo Limites destas estruturas, a partir da aplicação de carregamentos crescentes que acompanham a resposta elasto-plástica. Ainda nestes exemplos serão avaliadas as respostas da estrutura durante o descarregamento total desta, a partir da carga de Segundo Limite, ou seja, a partir da sua situação no instante da ruína, calculando-se aí os valores das deformações plásticas (permanentes) que se instalam nesta estruturas sob carga “zero”.

4.4.1 Solicitação axial

Exemplo 1 Considere-se uma viga engastada, constituída de material homogêneo de comportamento elasto-plástico ideal, submetida a um esforço externo axial P , conforme mostra a Figura 4.21.

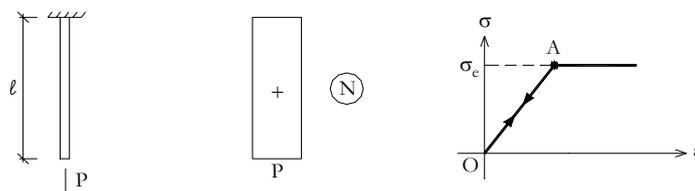


Figura 4.21: Viga engastada de material homogêneo. Solicitação axial.

Solução:

Trata-se evidentemente de uma estrutura isostática cuja solução é dada por $N = P$ constante ao longo da barra.

Desta forma tem-se:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P}{A}$$

onde A é a área da seção transversal da barra e σ é a tensão normal constante em todos os pontos da barra.

Tendo em conta a definição de Primeiro Limite tem-se

$$\sigma = \frac{P_I}{A} = \sigma_e$$

ou seja

$$P_I = \sigma_e A$$

onde σ_e é a tensão limite de elasticidade.

Porém, como a tensão normal é constante em todos os pontos da barra, a carga P_I faz com que a estrutura atinja a ruína (Segundo Limite) por plastificação de todas as suas seções. Desta forma tem-se

$$P_{II} = P_I = \sigma_e A$$

onde P_{II} é a carga de Segundo Limite.

Assim, para a estrutura isostática deste exemplo as cargas de Primeiro e Segundo Limites são coincidentes; portanto medir a segurança em relação ao Primeiro ou ao Segundo limite é indiferente.

Na iminência de atingir-se a carga $P_I = P_{II}$ todos os pontos estão com tensão igual à tensão σ_e e, portanto, coincidentes com o ponto A do diagrama tensão–deformação. Se descarregarmos agora integralmente a estrutura, ela volta pela reta AO , não resultando, assim, deformações permanentes.

Exemplo 2 Considere-se uma viga engastada constituída de dois materiais distintos de comportamento elasto–plástico ideal submetida a um esforço externo axial P , conforme mostrado na Figura 4.22. Deseja-se estudar ciclos de carga e descarga em situações envolvendo deformações plásticas.

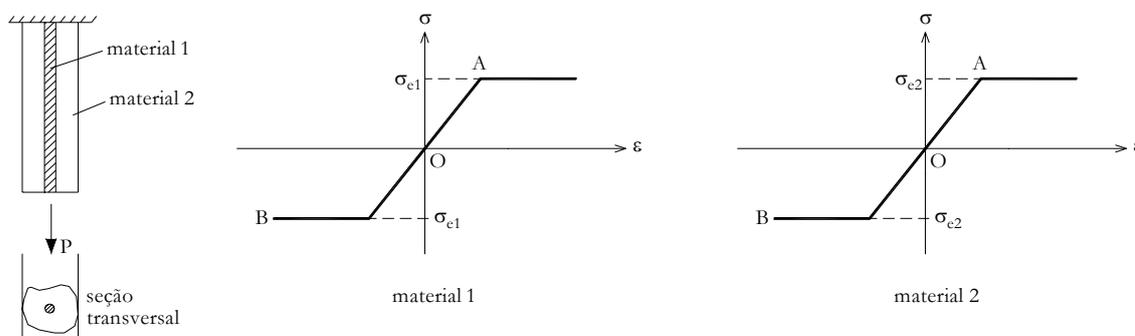


Figura 4.22: Viga engastada com dois materiais distintos. Solicitação axial.

Sejam A_1 , E_1 e A_2 , E_2 , respectivamente, a área e o módulo de elasticidade dos materiais 1 e 2; σ_{e1} e σ_{e2} são as tensões limite de elasticidade dos materiais 1 e 2, iguais à tração e à compressão.

Solução:

A solução do problema em termos da determinação das tensões normais σ_1 e σ_2 nos materiais 1 e 2, recai em um problema hiperestático cuja solução em regime elástico linear é obtida por:

$$\text{equilíbrio} : \quad P = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 \quad (4.1)$$

$$\text{compatibilidade} : \quad \epsilon_1 = \epsilon_2. \quad (4.2)$$

A equação de compatibilidade (4.2) em regime elástico linear fica:

$$\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}. \quad (4.3)$$

De (4.1) e (4.3) decorre:

$$\sigma_1 = P \frac{E_1}{A_1 E_1 + A_2 E_2} = \frac{P}{A_1 + \frac{E_2}{E_1} A_2} \quad (4.4)$$

$$\sigma_2 = P \frac{E_2}{A_1 E_1 + A_2 E_2} = \frac{P}{A_2 + \frac{E_1}{E_2} A_1} \quad (4.5)$$

solução esta que é válida enquanto

$$\sigma_1 \leq \sigma_{e1} \quad \sigma_2 \leq \sigma_{e2}.$$

Adotando-se para este exemplo:

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 = A = 10 \text{ cm}^2 \\ E_1 &= 2E_2 = E \\ \sigma_{e1} &= 3\sigma_{e2} = \sigma_e = 30000 \text{ N/cm}^2 \end{aligned}$$

tem-se como solução elástica

$$\sigma_1 = \frac{2P}{3A} \quad (4.6)$$

$$\sigma_2 = \frac{P}{3A}. \quad (4.7)$$

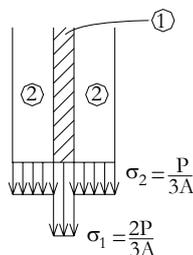


Figura 4.23: Solução elástica. Distribuição de tensões.

O Primeiro Limite da estrutura corresponde à carga P_I que provoca o aparecimento, no ponto mais solicitado da barra, de uma tensão normal igual à tensão de escoamento σ_e .

Para o material 1 esta condição fica:

$$\sigma_1 = \frac{2P}{3A} = \sigma_{e1} = 30000 \text{ N/cm}^2$$

ou

$$P_I = 450000 \text{ N}. \quad (4.8)$$

Para o material 2 esta condição fica:

$$\sigma_2 = \frac{P}{3A} = \sigma_{e2} = 10000 \text{ N/cm}^2$$

ou

$$P_I = 300000 N. \quad (4.9)$$

Desta forma, observando-se os valores de (4.8) e (4.9), pode-se concluir que $P_I = 300000 N$, corresponde ao escoamento do material 2 e, portanto, para esta carga tem-se

$$\begin{aligned} \text{material 1} \quad \sigma_1 &= \frac{2P}{3A} = \frac{2 \times 300000}{3 \times 10} \\ \sigma_1 &= 20000 \text{ N/cm}^2 < \sigma_{e1} = 30000 \text{ N/cm}^2 \\ \text{material 2} \quad \sigma_2 &= \frac{P}{3A} = \frac{300000}{3 \times 10} = 10000 \text{ N/cm}^2 = \sigma_{e2}. \end{aligned}$$

Assim, o material 1 ainda está em regime elástico linear, enquanto o material 2 entrou em regime elasto-plástico (Figura 4.24).

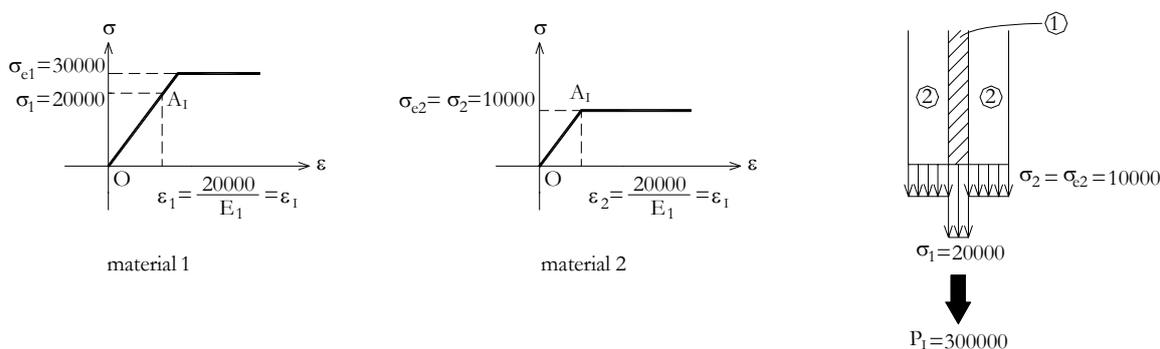


Figura 4.24: Carga de Primeiro Limite, tensões e deformações.

As deformações ε_1 e ε_2 ficam:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{20000}{E_1} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma_{e2}}{E_2} = \frac{10000 \times 2}{E_1} = \frac{20000}{E_1}. \end{aligned}$$

Obviamente $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ em função da condição de compatibilidade de deformação imposta aos dois materiais. Portanto, a deformação dos dois materiais quando se atinge o Primeiro Limite é:

$$\varepsilon_I = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{20000}{E_1}.$$

Se agora, a partir desta situação, se quiser aumentar o carregamento com valores de acréscimo de carga ΔP a partir de P_I , deve-se notar que

- o material 1 ainda tem capacidade de absorver acréscimos de carregamento, pois ainda se encontra em regime elástico linear ($\sigma_1 < \sigma_{e1}$)
- o material 2 atingiu o patamar de escoamento ($\sigma_2 = \sigma_{e2}$) e, portanto, perde a capacidade de absorver acréscimos de carga; logo, para estes acréscimos de carga ele se deforma sem acréscimos de tensão acompanhando a deformação do material 1, mantendo a compatibilidade.

Assim, o modelo estrutural para determinação de acréscimos de tensão, para os acréscimos de carga ΔP acima de P_I , corresponde à barra só constituída do material 1, respondendo elasticamente, e com o material 2 acompanhando a deformação do material 1.

Desta forma os acréscimos de tensão $\Delta\sigma_1$ e $\Delta\sigma_2$ para um acréscimo de carga ΔP acima de P_I ficam:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_1 &= \frac{\Delta P}{A_1} = \frac{\Delta P}{A} \\ \Delta\sigma_2 &= 0\end{aligned}$$

e, portanto, as tensões finais para o carregamento $P = P_I + \Delta P$ são:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 20000 + \frac{\Delta P}{A} \quad (N/cm^2) \\ \sigma_2 &= 10000 \text{ N/cm}^2.\end{aligned}$$

É fácil observar que deve existir um valor do acréscimo de carga ΔP acima de P_I para o qual o material 1 atinge o escoamento. Ao atingir-se este ponto ambos os materiais estarão escoados e, portanto, a barra atingirá a ruína (Segundo Limite) por plastificação de todas as suas seções. A imposição desta condição permite escrever

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 20000 + \frac{\Delta P}{A} = \sigma_{e1} = 30000 \text{ N/cm}^2 \\ \Delta P &= 100000 \text{ N}.\end{aligned}$$

Assim, a carga P_{II} de Segundo Limite fica

$$P_{II} = P_I + \Delta P$$

ou seja,

$$P_{II} = 300000 + 100000 = 400000 \text{ N}.$$

O acréscimo de deformação elástica que o material 1 sofre devido ao acréscimo de carga ΔP é:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_1 &= \frac{\Delta\sigma_1}{E_1} = \frac{\Delta P}{AE_1} \\ \Delta\varepsilon_1 &= \frac{100000}{10 \times E_1} = \frac{10000}{E_1}.\end{aligned}$$

Obviamente, devido à compatibilidade, o acréscimo de deformação no material 2 é $\Delta\varepsilon_2 = \Delta\varepsilon_1 = \frac{10000}{E_1}$ e, portanto, a deformação final da barra fica

$$\varepsilon_{II} = \varepsilon_I + \Delta\varepsilon_1 = \frac{20000}{E_1} + \frac{10000}{E_1}$$

ou

$$\varepsilon_{II} = \frac{30000}{E_1}.$$

A Figura 4.25 mostra as tensões e deformações nos materiais 1 e 2 quando se atinge a carga P_{II} do Segundo Limite.

Imagine-se agora que, atingida a carga de Segundo Limite, se proceda a um descarregamento total da barra, ou seja, que se aplique uma variação de carga ΔP tal que:

$$P = P_{II} + \Delta P = 0.$$

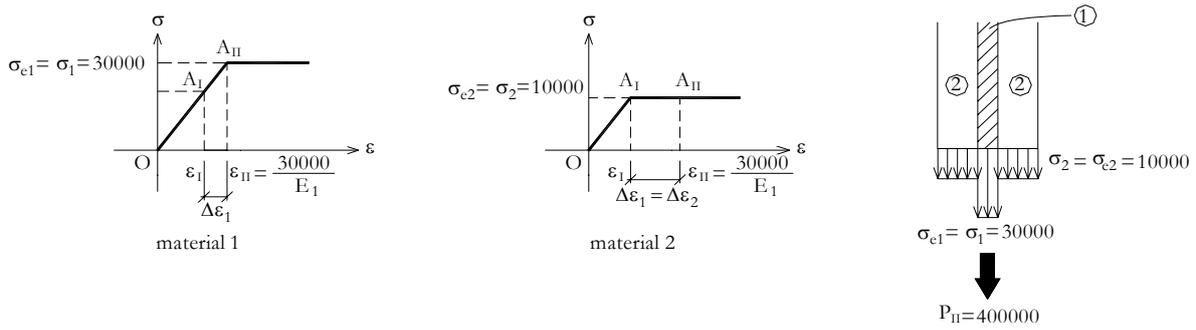


Figura 4.25: Carga de Segundo Limite. Tensões e deformações.

Desta forma tem-se, lembrando que $P_{II} = 400000 \text{ N}$:

$$\Delta P = -400000 \text{ N}.$$

Ao aplicar-se esta variação de carga ΔP , nota-se (Figura 4.26) que o material 1 responderá elasticamente durante a descarga voltando pela reta $A_{II}O$ do diagrama tensão-deformação; o material 2, que já se encontra plastificado, durante a descarga responderá também elasticamente, voltando a partir do ponto A_{II} , por uma reta paralela a OA_I .

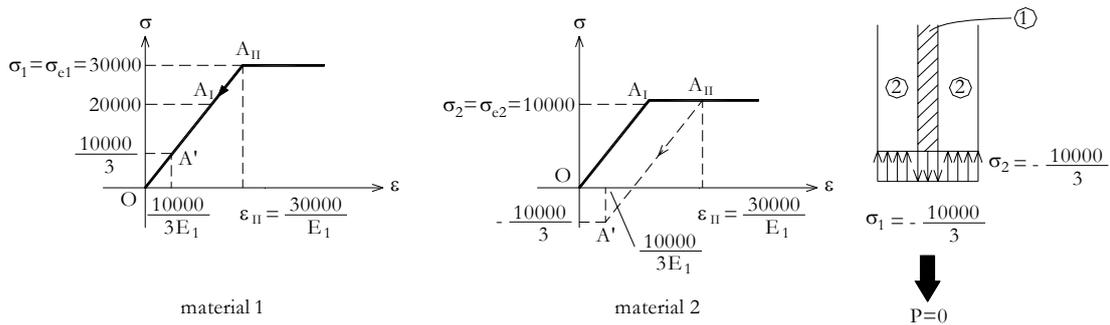


Figura 4.26: Descarga total a partir de Segundo Limite. Tensões e deformações.

Portanto, como durante a descarga, ambos os materiais respondem elasticamente à aplicação de $\Delta P = -400000 \text{ N}$, as variações de tensão $\Delta\sigma_1$ e $\Delta\sigma_2$, respectivamente, nos materiais 1 e 2 obedecem a solução elástica (equações (4.6) e (4.7)). Assim tem-se:

$$\Delta\sigma_1 = \frac{2\Delta P}{3A} \quad \text{e} \quad \Delta\sigma_2 = \frac{\Delta P}{3A}$$

e, numericamente,

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_1 &= -\frac{2 \times 400000}{3 \times 10} = -\frac{80000}{3} \text{ N/cm}^2 \\ \Delta\sigma_2 &= -\frac{400000}{3 \times 10} = -\frac{40000}{3} \text{ N/cm}^2. \end{aligned}$$

Desta forma as tensões finais nos materiais 1 e 2, após a descarga total, ficam:

$$\begin{array}{ll}
 \text{material 1} & \sigma_1 = \sigma_{e1} + \Delta\sigma_1 \\
 & \sigma_1 = 30000 - \frac{80000}{3} = \frac{10000}{3} N/cm^2 \\
 \text{material 2} & \sigma_2 = \sigma_{e2} + \Delta\sigma_2 \\
 & \sigma_2 = 10000 - \frac{40000}{3} = -\frac{10000}{3} N/cm^2.
 \end{array}$$

Notar que:

- o material 1, após a descarga, continua tracionado;
- o material 2, após a descarga, passou a estar comprimido, porém com uma tensão σ_2 em módulo menor que a tensão de escoamento à compressão, o que confirma a hipótese feita de descarga com resposta elástica;
- a resultante das tensões na seção transversal é nula, obedecendo obviamente a equação de equilíbrio ($P = 0$); as tensões instaladas nos materiais 1 e 2 são tensões residuais.

A variação de deformação elástica que ocorre nos materiais 1 e 2 durante a descarga pode ser calculada por:

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\Delta\sigma_1}{E_1} = -\frac{80000}{3E_1}$$

ou

$$\Delta\varepsilon_2 = \frac{\Delta\sigma_2}{E_2} = -\frac{40000 \times 2}{3E_1} = -\frac{80000}{3E_1}$$

mostrando, obviamente, que $\Delta\varepsilon_1 = \Delta\varepsilon_2$ (compatibilidade).

Assim, a deformação final nos materiais 1 e 2, após a descarga total fica:

$$\begin{array}{l}
 \varepsilon_1 = \varepsilon_{II} + \Delta\varepsilon_1 = \frac{30000}{E_1} - \frac{80000}{3E_1} \\
 \varepsilon_1 = \frac{10000}{3E_1} = \varepsilon_2.
 \end{array}$$

A Figura 4.26 mostra as tensões e deformações correspondentes à situação de descarga total (ponto A').

Pode-se imaginar que, atingida a carga P_{II} de Segundo Limite, se proceda a descarregamento da barra que leve a se atingir o Primeiro Limite por compressão, ou seja, aplique-se uma variação de carga ΔP sobre P_{II} de tal forma a se atingir, ou no material 1 ou no material 2, uma tensão igual à tensão de escoamento por compressão.

Como a descarga se faz elasticamente, as variações de tensão $\Delta\sigma_1$ e $\Delta\sigma_2$ devidas à variação de carga ΔP ficam:

$$\Delta\sigma_1 = \frac{2\Delta P}{3A} \quad \Delta\sigma_2 = \frac{\Delta P}{3A}.$$

As tensões finais nos materiais 1 e 2, após a descarga podem ser escritas:

$$\begin{array}{ll}
 \text{material 1} & \sigma_1 = \sigma_{e1} + \Delta\sigma_1 \\
 & \sigma_1 = 30000 + \frac{2\Delta P}{3A} \\
 \text{material 2} & \sigma_2 = \sigma_{e2} + \Delta\sigma_2 \\
 & \sigma_2 = 10000 + \frac{\Delta P}{3A}.
 \end{array}$$

A condição de se atingir, nos materiais 1 e 2, uma tensão igual à tensão de escoamento por compressão, pode ser expressa pelas igualdades:

$$\begin{aligned} \text{material 1} \quad \sigma_1 &= 30000 + \frac{2\Delta P}{3A} = -\sigma_{e1} = -30000 \text{ N/cm}^2 \\ \Delta P &= -900000 \text{ N} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \text{material 2} \quad \sigma_2 &= 10000 + \frac{\Delta P}{3A} = -\sigma_{e2} = -10000 \text{ N/cm}^2 \\ \Delta P &= -600000 \text{ N}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Observando-se os valores de (4.10) e (4.11) conclui-se que $\Delta P = -600000 \text{ N}$ corresponde à variação de carga que leva ao escoamento por compressão do material 2; assim as variações de tensão $\Delta\sigma_1$ e $\Delta\sigma_2$ tomam os valores:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_1 &= -\frac{2 \times 600000}{3A} = -40000 \text{ N/cm}^2 \\ \Delta\sigma_2 &= -\frac{600000}{3A} = -20000 \text{ N/cm}^2. \end{aligned}$$

As tensões finais ao se atingir o Primeiro Limite por compressão ficam:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{e1} + \Delta\sigma_1 = -10000 \text{ N/cm}^2 > -\sigma_{e1} = -30000 \text{ N/cm}^2 \\ \sigma_2 &= \sigma_{e2} + \Delta\sigma_2 = -10000 \text{ N/cm}^2 = -\sigma_{e2} \end{aligned}$$

mostrando que o material 2 plastificou por compressão e o que o material 1 ainda se encontra em regime elástico.

A variação de deformação elástica que se processa nos materiais 1 e 2 devida à variação de carga ΔP pode ser calculada por:

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\Delta\sigma_1}{E_1} = -\frac{40000}{E_1}$$

ou

$$\Delta\varepsilon_2 = \frac{\Delta\sigma_2}{E_2} = -\frac{2 \times 20000}{E_1} = -\frac{40000}{E_1} = \Delta\varepsilon_1.$$

Assim, a deformação final nos materiais 1 e 2 na situação de Primeiro Limite por compressão fica:

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{II} + \Delta\varepsilon_1 = \frac{30000}{E_1} - \frac{40000}{E_1}$$

ou

$$\varepsilon_I = -\frac{10000}{E_1},$$

igual nos materiais 1 e 2.

A carga de Primeiro Limite por compressão fica, portanto,

$$P_I = P_{II} + \Delta P$$

ou seja,

$$\begin{aligned} P_I &= 400000 - 600000 \\ P_I &= -200000 \text{ N}. \end{aligned}$$

A Figura 4.27 mostra as tensões e deformações correspondentes à situação de Primeiro Limite por compressão (ponto B_I).

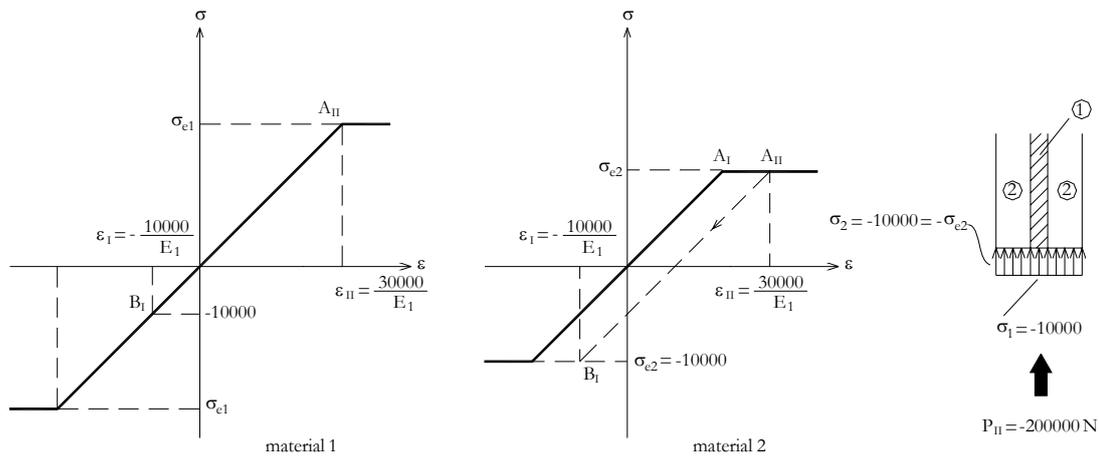


Figura 4.27: Carga de Primeiro Limite na compressão. Tensões e deformações.

Se, a partir desta situação, se quiser aumentar a compressão com variações de carga ΔP a partir da carga P_I de Primeiro Limite à compressão, deve-se notar que o material 1 ainda tem capacidade de resposta para receber acréscimos de tensão de compressão, pois ainda está em regime elástico linear ($\sigma_1 > -\sigma_{e1}$) enquanto o material 2 atingiu o patamar de escoamento por compressão ($\sigma_2 = -\sigma_{e2}$) e, portanto, deforma-se sem acréscimo de tensão, acompanhando a deformação do material 1.

Desta forma as variações de tensão $\Delta\sigma_1$ e $\Delta\sigma_2$ para valores de ΔP acima de P_I ficam:

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta P}{A} \quad \text{e} \quad \Delta\sigma_2 = 0$$

e, portanto, as tensões finais para o carregamento $P = P_I + \Delta P$ são:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -10000 + \frac{\Delta P}{A} \quad (N/cm^2) \\ \sigma_2 &= -10000 \text{ N/cm}^2. \end{aligned}$$

Pode-se agora determinar qual o valor da variação de carga ΔP acima de P_I para o qual o material 1 atinge o escoamento, fazendo, portanto, com que se chegue a uma condição de Segundo Limite na compressão por plastificação total da barra. A imposição desta condição permite escrever:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -10000 + \frac{\Delta P}{A} = -\sigma_{e1} = -30000 \text{ N/cm}^2 \\ \therefore \Delta P &= -200000 \text{ N}. \end{aligned}$$

Assim, a carga P_{II} de Segundo Limite na compressão fica:

$$P_{II} = P_I + \Delta P$$

ou seja,

$$\begin{aligned} P_{II} &= -200000 - 200000 \\ \text{ou } P_{II} &= -400000 \text{ N}. \end{aligned}$$

O acréscimo de deformação elástica que os materiais 1 e 2 sofrem devido a ΔP é:

$$\Delta\epsilon_1 = \frac{\Delta\sigma_1}{E_1} = \frac{\Delta P}{AE_1} = \Delta\epsilon_2$$

ou

$$\Delta\varepsilon_1 = -\frac{200000}{AE_1} = -\frac{20000}{E_1} = \Delta\varepsilon_2.$$

Portanto, a deformação final na barra nesta situação é:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{II} &= \varepsilon_I + \Delta\varepsilon_1 = -\frac{10000}{E_1} - \frac{20000}{E_1} \\ \varepsilon_{II} &= -\frac{30000}{E_1}.\end{aligned}$$

A Figura 4.28 mostra as tensões e deformações nos materiais 1 e 2 quando se atinge a carga P_{II} de Segundo Limite na compressão (ponto B_{II}).

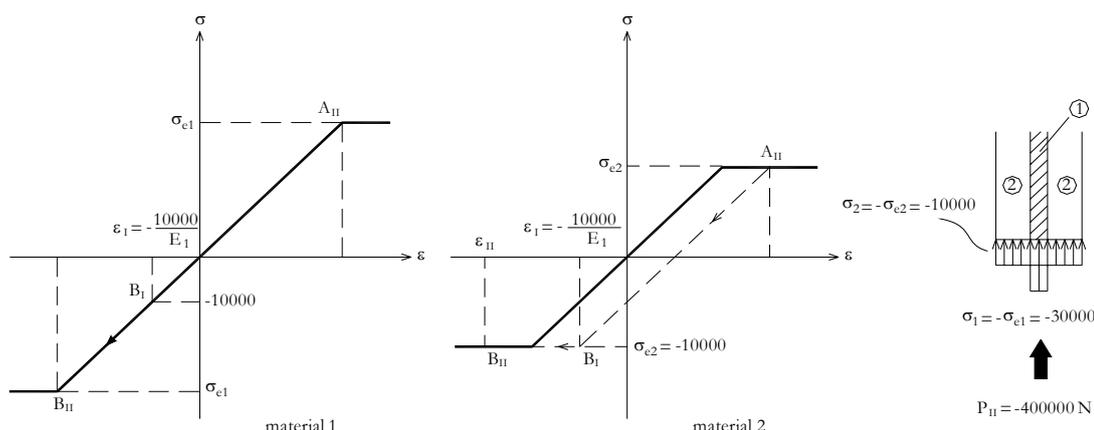


Figura 4.28: Carga de Segundo Limite na compressão Tensão e deformação.

Para fechar o ciclo de carregamento é interessante analisar a descarga total a partir do Segundo Limite à compressão.

Como $P_{II} = -400000\text{ N}$ então a variação de carga ΔP para a descarga total será

$$\Delta P = +400000\text{ N}.$$

As variações de tensão $\Delta\sigma_1$ e $\Delta\sigma_2$ decorrentes da aplicação de ΔP obedecem a solução elástica (equações (4.6) e (4.7)) e, portanto, ficam:

$$\Delta\sigma_1 = \frac{2\Delta P}{3A} \quad \text{e} \quad \Delta\sigma_2 = \frac{\Delta P}{3A}$$

ou, numericamente,

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_1 &= \frac{2 \times 400000}{3 \times 10} = \frac{80000}{3}\text{ N/cm}^2 \\ \Delta\sigma_2 &= \frac{400000}{3 \times 10} = \frac{40000}{3}\text{ N/cm}^2.\end{aligned}$$

As tensões finais após a descarga total se escrevem:

$$\begin{aligned}\text{material 1} \quad \sigma_1 &= -\sigma_{e1} + \Delta\sigma_1 \\ \sigma_1 &= -30000 + \frac{80000}{3} = -\frac{10000}{3}\text{ N/cm}^2 \\ \text{material 2} \quad \sigma_2 &= -\sigma_{e2} + \Delta\sigma_2 \\ \sigma_2 &= -10000 + \frac{40000}{3} = +\frac{10000}{3}\text{ N/cm}^2.\end{aligned}$$

A variação de deformação elástica nos dois materiais durante a descarga é

$$\Delta\varepsilon_1 = \Delta\varepsilon_2 = \frac{\Delta\sigma_1}{E_1} = \frac{\Delta\sigma_2}{E_2}$$

ou

$$\Delta\varepsilon_1 = \Delta\varepsilon_2 = \frac{80000}{3E_1}.$$

Portanto, a deformação final fica

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \varepsilon_{II} + \Delta\varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = -\frac{30000}{E_1} + \frac{80000}{3E_1} \end{aligned}$$

ou

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{10000}{3E_1}.$$

A Figura 4.29 mostra as tensões e deformações nos materiais 1 e 2 correspondentes à situação de descarga total (ponto B').

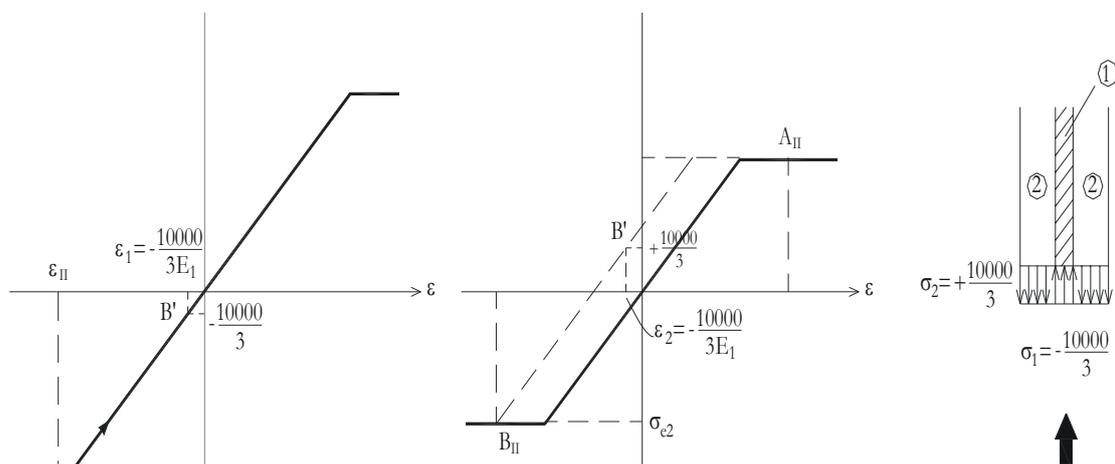


Figura 4.29: Descarga a partir do Segundo Limite na compressão, tensões e deformações.

A Figura 4.30 mostra a representação da variação da carga P durante todo o processo de carga, descarga e nova carga realizado na barra, em relação às deformações associadas ao carregamento. É importante observar que:

- trecho 0 – 1: variação de P linear – resposta elástica da barra com dois materiais;
- trecho 1 – 2: variação de P linear – resposta elástica do material 1;
- trecho 2 – 3: variação de P linear – resposta elástica da barra com dois materiais;
- trecho 3 – 4: variação de P linear – resposta elástica do material 1;
- trecho 4 – 5: variação de P linear – resposta elástica da barra com dois materiais.

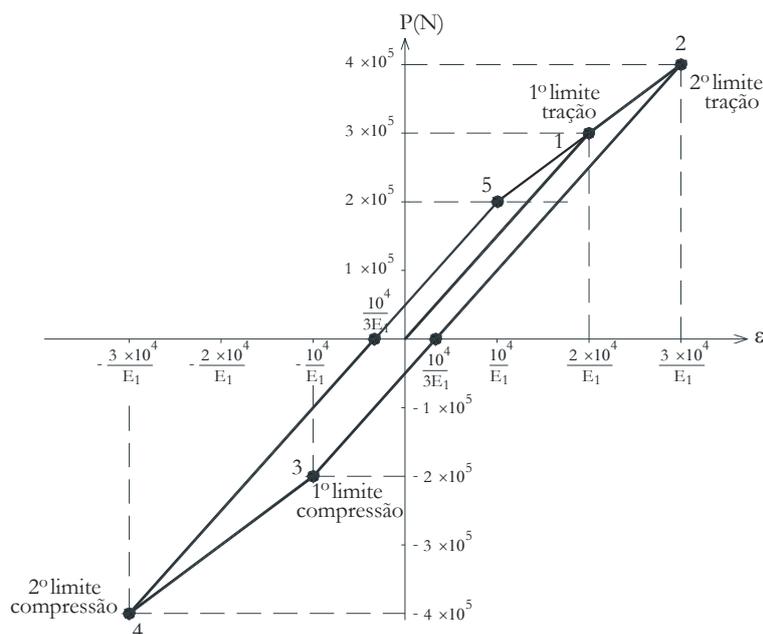


Figura 4.30: Diagrama $P = P(\varepsilon)$.

Notar ainda que no fim do ciclo de carregamento até a descarga total ficam instalados nos dois materiais tensões residuais auto-equilibradas com deformações permanentes correspondentes a $\varepsilon = -\frac{10000}{3E_1}$.

Exemplo 3 Considere-se a mesma viga engastada constituída de dois materiais distintos de comportamento elasto-plástico ideal submetida a um esforço externo P .

Sejam: $A_1 = 3A$ a área da seção transversal do material 1; $A_2 = A$ a área da seção transversal do material 2; $\sigma_{e1} = 3\sigma_e$ a tensão de escoamento à tração e à compressão do material 1 e $\sigma_{e2} = \sigma_e$ a tensão de escoamento à tração e à compressão do material 2.

Considere-se que $E_1 = E_2 = E$ é o módulo de elasticidade dos materiais 1 e 2. Seguindo a mesma sistemática detalhada no exemplo 2, determinar as cargas P_I e P_{II} , respectivamente, de Primeiro e Segundo Limite à tração e proceder à descarga total, avaliando em cada etapa a deformação da barra.

Solução:

- Solução elástica linear

Das expressões (4.4) e (4.5) e tendo-se em conta que $A_1 = 3A$, $A_2 = A$ e $E_1 = E_2 = E$ vem

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P}{4A} \quad (4.12)$$

- Determinação do Primeiro Limite à tração

Condições para determinação de P_I

$$\begin{aligned} \text{material 1} \quad \sigma_1 &= \frac{P_I}{4A} = \sigma_{e1} = 3\sigma_e \\ P_I &= 12\sigma_e A \\ \text{material 2} \quad \sigma_2 &= \frac{P_I}{4A} = \sigma_{e2} = \sigma_e \\ P_I &= 4\sigma_e A. \end{aligned}$$

Portanto a carga de Primeiro Limite é $P_I = 4\sigma_e A$ que corresponde à plastificação do material 2.

As tensões nos materiais 1 e 2 e a deformação, quando se aplica P_I , ficam

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{P_I}{4A} = \frac{4\sigma_e A}{4A} = \sigma_e < \sigma_{e1} = 3\sigma_e \\ \sigma_2 &= \frac{P_I}{4A} = \frac{4\sigma_e A}{4A} = \sigma_e = \sigma_{e2} \\ \varepsilon_I &= \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma_e}{E} \end{aligned}$$

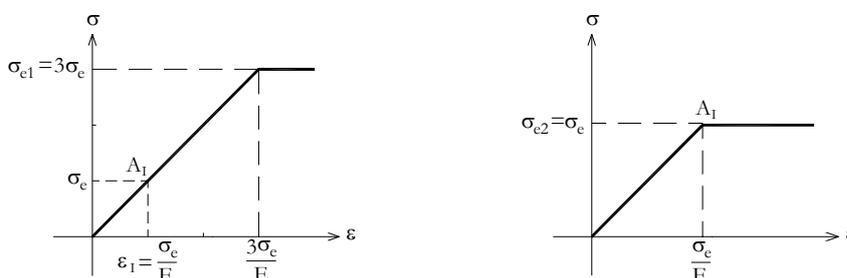


Figura 4.31: Carga de Primeiro Limite. Tensões e deformações.

- Determinação do Segundo Limite à tração

Para um acréscimo de carga ΔP acima de P_I têm-se

$$\Delta\sigma_2 = 0$$

isto é, o material 2 atingiu o escoamento e

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta P}{3A}$$

e, portanto, as tensões ficam

$$\begin{aligned} \text{material 1} \quad \sigma_1 &= \sigma_e + \Delta\sigma_1 \\ \sigma_1 &= \sigma_e + \frac{\Delta P}{3A} \\ \text{material 2} \quad \sigma_2 &= \sigma_e. \end{aligned}$$

A condição de Segundo Limite será obtida quando σ_1 atingir a tensão de escoamento do material 1, ou seja,

$$\sigma_1 = \sigma_{e1} = 3\sigma_e$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_e + \frac{\Delta P}{3A} = 3\sigma_e \\ \Delta P &= 6\sigma_e A.\end{aligned}$$

Assim, a carga de Segundo Limite fica

$$P_{II} = P_I + \Delta P$$

ou

$$\begin{aligned}P_{II} &= 4\sigma_e A + 6\sigma_e A \\ P_{II} &= 10\sigma_e A.\end{aligned}$$

O acréscimo de tensão no material 1 é, portanto,

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta P}{3A} = \frac{6\sigma_e A}{3A}$$

ou $\Delta\sigma_1 = 2\sigma_e$, o que leva a um acréscimo de deformação para os dois materiais de

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_1 &= \frac{\Delta\sigma_1}{E} = \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\varepsilon_1 &= \Delta\varepsilon_2 = \frac{2\sigma_e}{E}\end{aligned}$$

e a uma deformação final

$$\varepsilon_{II} = \frac{\Delta\sigma_e}{E} + \Delta\varepsilon_1$$

ou

$$\varepsilon_{II} = \frac{3\sigma_e}{E}.$$

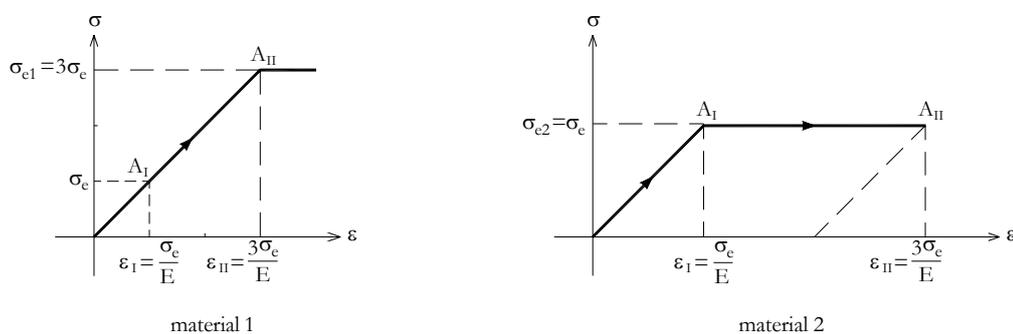


Figura 4.32: Carga de Segundo Limite. Tensões e deformações.

- Descarga total

Esta condição impõe que se dê uma variação de carga $\Delta P = -P_{II}$ a partir de P_{II} , ou seja, descarregando totalmente a barra.

A descarga se processa elasticamente de tal forma que as variações de tensão nos dois materiais são dadas pela solução elástica do problema (4.12), ou seja:

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = \frac{\Delta P}{4A}.$$

Assim, para a descarga total correspondente a $\Delta P = -P_{II} = -10\sigma_e A$ tem-se:

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = -\frac{5}{2}\sigma_e$$

o que leva às tensões finais nos materiais 1 e 2 tais que

$$\begin{aligned} \text{material 1} \quad \sigma_1 &= 3\sigma_e - \frac{5}{2}\sigma_e = \frac{\sigma_e}{2} \\ \text{material 2} \quad \sigma_2 &= \sigma_e - \frac{5}{2}\sigma_e = -\frac{3}{2}\sigma_e > -\sigma_{e1} = -\sigma_e. \end{aligned}$$

Nota-se que a descarga não pode processar-se totalmente em regime elástico, pois, como se deduz das tensões acima, o material 2 vai plastificar antes por compressão. Desta forma a descarga deve ser feita por etapas, ou seja,

- etapa 1: plastificação do material 2 por compressão

Nesta etapa a resposta dos dois materiais é elástica e, portanto,

$$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = \frac{\Delta P}{4A}$$

A condição de plastificação do material 2 se escreve

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_e + \Delta\sigma_2 = -\sigma_{e1} = -\sigma_e \\ \Delta\sigma_2 &= \frac{\Delta P}{4A} = -2\sigma_e \therefore \Delta P = -8\sigma_e A. \end{aligned}$$

A variação de tensão no material 1 para $\Delta P = -8\sigma_e A$ fica

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta P}{4A} = \frac{-8\sigma_e A}{4A} = -2\sigma_e$$

e, portanto, a tensão final σ_1 é

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 3\sigma_e - 2\sigma_e \\ \sigma_1 &= \sigma_e. \end{aligned}$$

A variação da deformação fica

$$\Delta\varepsilon_1 = \Delta\varepsilon_2 = \frac{\Delta\sigma_1}{E} = -\frac{2\sigma_e}{E}$$

e a deformação no final desta etapa é dada por

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \frac{3\sigma_e}{E} - \frac{2\sigma_e}{E} \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_2 = \frac{\sigma_e}{E}. \end{aligned}$$

A Figura 4.33 indica as tensões e deformação no final desta etapa (ponto B_I).

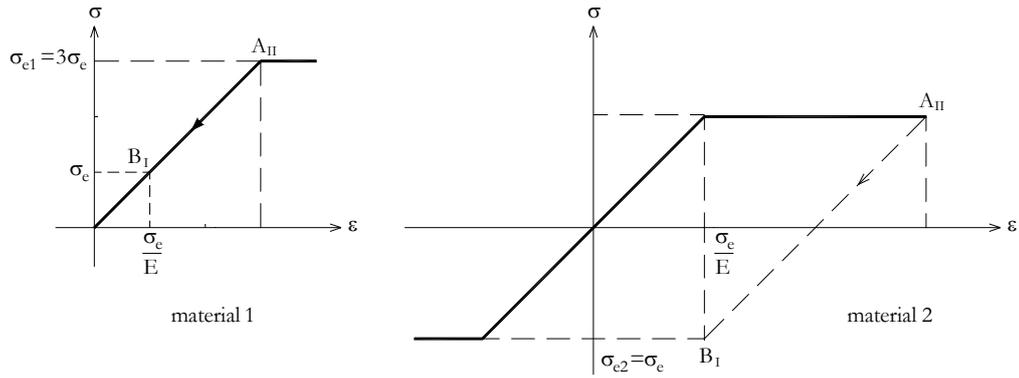


Figura 4.33: Descarga 1º etapa – Primeiro Limite por compressão.

- etapa 2: complementação da descarga

Na primeira etapa a descarga corresponde a uma valor de $\Delta P = -8\sigma_e A$. A carga correspondente à descarga total é de $\Delta P = -10\sigma_e A$. Portanto, nesta etapa se aplica $\Delta P = -2\sigma_e A$ com resposta elástica só do material 1, ou seja

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_1 &= \frac{\Delta P}{A_1} = \frac{\Delta P}{3A} = -\frac{2\sigma_e}{3} \\ \Delta\sigma_2 &= 0.\end{aligned}$$

A variação de deformação que ocorre nesta etapa é

$$\Delta\varepsilon_1 = \Delta\varepsilon_2 = \frac{\Delta\sigma_1}{E} = -\frac{2\sigma_e}{3E}.$$

As tensões finais ficam:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_e - \frac{2\sigma_e}{3} = \frac{\sigma_e}{3} \\ \sigma_2 &= -\sigma_e\end{aligned}$$

e a deformação final

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\sigma_e}{E} - \frac{2\sigma_e}{3E} = \frac{\sigma_e}{3E}.$$

Notar que as tensões residuais finais são auto-equilibradas, ou seja,

$$R = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = \frac{\sigma_e}{3} \times 3A - \sigma_e A = 0$$

A Figura 4.34 mostra as tensões e deformação no final da descarga (ponto B'). A representação de $P = P(\varepsilon)$ está indicada na Figura 4.35.

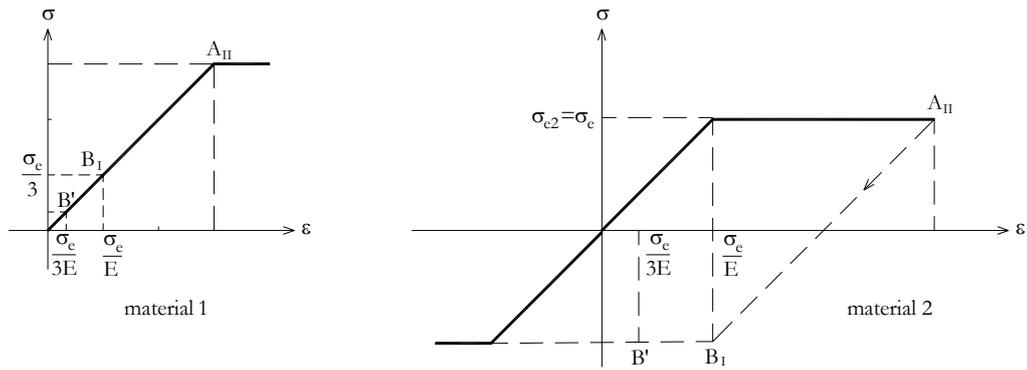


Figura 4.34: Descarga final.

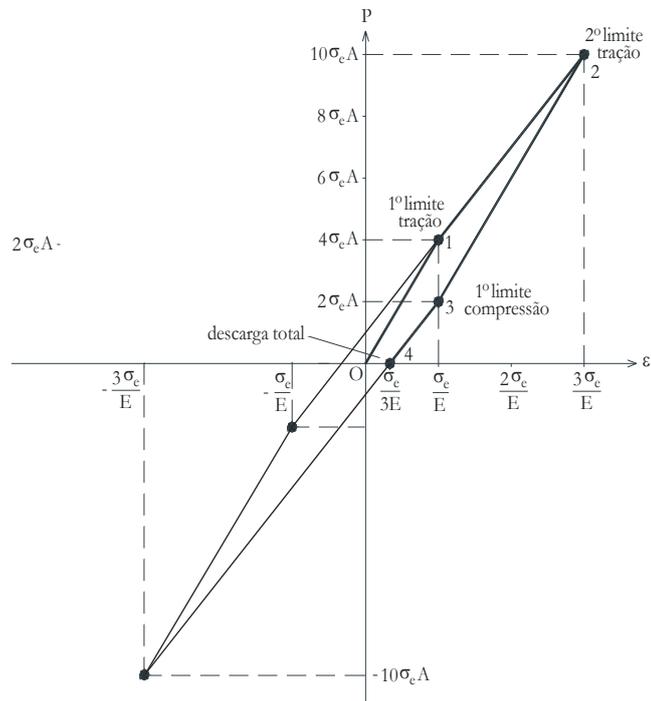


Figura 4.35: Diagrama $P = P(\varepsilon)$.

Exemplo 4 Considere-se a treliça isostática indicada na Figura 4.36. Sejam A a área da seção transversal das barras, σ_e e E , respectivamente, a tensão de escoamento e o módulo de elasticidade do material de que são constituídas as barras. Determinar as cargas de Primeiro e Segundo Limites da estrutura.

Solução:

- Solução elástica linear

– equilíbrio do nó A

$$N_1 \text{sen} \alpha = N_2 \text{sen} \alpha \therefore N_1 = N_2 = N$$

$$P = 2N \cos \alpha \therefore N_1 = N_2 = \frac{P}{2 \cos \alpha}$$

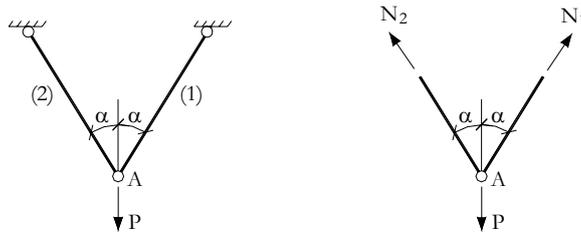


Figura 4.36: Treliça isostática. Determinação de P_I e P_{II} .

– tensões nas barras

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{N}{A}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P}{2A \cos \alpha}$$

- Determinação do Primeiro Limite à tração

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{P}{2A \cos \alpha} = \sigma_e$$

$$P_I = 2\sigma_e A \cos \alpha.$$

Porém a carga P_I faz com que se atinja o escoamento em todos os pontos da estrutura, fazendo, portanto, com que se atinja a sua ruína. Desta forma para a treliça isostática tem-se

$$P_{II} = P_I = 2\sigma_e A \cos \alpha.$$

Exemplo 5 Considere-se a treliça hiperestática indicada na Figura 4.37a. As barras são constituídas de um mesmo material elasto-plástico ideal com módulo de elasticidade E e tensão de escoamento à tração e à compressão igual em módulo a σ_e . Determinar as cargas P_I e P_{II} de Primeiro e Segundo Limites e proceder à descarga total.

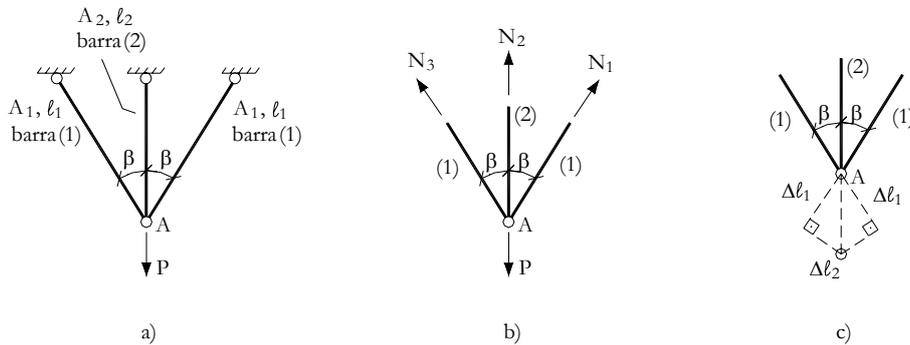


Figura 4.37: Treliça hiperestática. Determinação de P_I e P_{II} .

Solução:

- Solução elástica linear

As equações de equilíbrio (Figura 4.37b) se escrevem:

$$N_1 \operatorname{sen} \beta = N_3 \operatorname{sen} \beta \therefore N_1 = N_3$$

$$P = 2N_1 \cos \beta + N_2. \quad (4.13)$$

A equação de compatibilidade de deslocamentos (Figura 4.37c) fica:

$$\Delta \ell_1 = \Delta \ell_2 \cos \beta. \quad (4.14)$$

Porém

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \ell_1}{EA_1} \quad \text{e} \quad \Delta \ell_2 = \frac{N_2 \ell_2}{EA_2}$$

e ainda $\ell_2 = \ell_1 \cos \beta$.

Desta forma a equação (4.14) fica

$$\frac{N_1 \ell_1}{EA_1} = \frac{N_2 \ell_1}{EA_2} \cos^2 \beta$$

$$\therefore N_1 = \frac{A_1}{A_2} N_2 \cos^2 \beta. \quad (4.15)$$

Portanto de (4.13) e (4.15) tem-se

$$N_1 = \left(\frac{P}{1 + 2 \frac{A_1}{A_2} \cos^3 \beta} \right) \frac{A_1}{A_2} \cos^2 \beta = \frac{P \cos^2 \beta}{\frac{A_2}{A_1} + 2 \cos^3 \beta} \quad (4.16)$$

$$N_2 = \frac{P}{1 + 2 \frac{A_1}{A_2} \cos^3 \beta}. \quad (4.17)$$

Adotando-se: $A_1 = 4A_2$ e $\beta = 60^\circ$ ($\cos \beta = 0,5$) a solução elástica linear da treliça hiperestática se reduz a (equações (4.16) e (4.17)):

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2} \quad (4.18)$$

e ainda

$$\Delta \ell_1 = \frac{N_1 \ell_1}{EA_1} = \frac{P \ell_2}{4EA_2} \quad (4.19)$$

$$\Delta \ell_2 = \frac{N_2 \ell_2}{EA_2} = \frac{P \ell_2}{2EA_2} \quad (4.20)$$

com

$$\Delta \ell_2 = 2\Delta \ell_1. \quad (4.21)$$

As tensões normais nas barras 1 e 2 ficam:

$$\text{barra 1} \quad \sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{P}{2A_1} = \frac{P}{8A_2} \quad (4.22)$$

$$\text{barra 2} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{P}{2A_2} \quad (4.23)$$

- Determinação do Primeiro Limite à tração

– condição de escoamento da barra 1

$$\sigma_1 = \frac{P_I}{8A_2} = \sigma_e \therefore P_I = 8\sigma_e A_2$$

– condição de escoamento da barra 2

$$\sigma_2 = \frac{P_I}{2A_2} = \sigma_e \therefore P_I = 2\sigma_e A_2.$$

Desta forma, a carga de Primeiro Limite é $P_I = 2\sigma_e A_2$ que leva ao escoamento da barra 2.

Assim, para $P_I = 2\sigma_e A_2$ tem-se:

$$N_1 = N_2 = \sigma_e A_2$$

e

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{2\sigma_e A_2}{8A_2} = \frac{\sigma_e}{4} < \sigma_e \\ \sigma_2 &= \sigma_e. \end{aligned}$$

E ainda de (4.20) vem:

$$\Delta l_2 = \frac{2\sigma_e A_2 \ell_2}{2EA_2} = \frac{\sigma_e \ell_2}{E}$$

que corresponde ao deslocamento vertical do ponto A na condição de Primeiro Limite, ou seja,

$$\Delta l_{2I} = \frac{\sigma_e \ell_2}{E}.$$

A Figura 4.38 mostra as forças normais e tensões nas barras 1 e 2, bem como o deslocamento vertical do ponto A , na situação de Primeiro Limite.

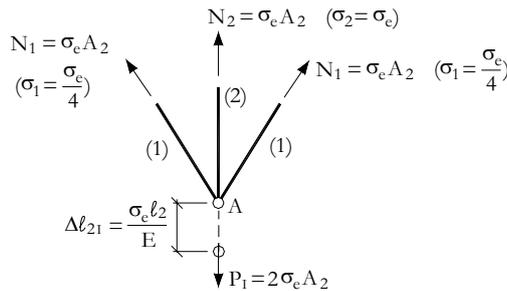


Figura 4.38: Primeiro Limite à tração. Forças e tensões nas barras 1 e 2. Deslocamento vertical do ponto A .

- Determinação do Segundo Limite à tração

Para a determinação da carga P_{II} de Segundo Limite à tração é importante notar que para acréscimos de carga ΔP acima da carga P_I , a barra 2 não tem capacidade de absorver esforços, pois está plastificada; desta forma o acréscimo de carga ΔP é absorvido pelas barras 1, enquanto a barra 2 só acompanha a deformação mantendo a compatibilidade no nó A .

Assim, para o acréscimo de carga ΔP a estrutura passa a ser constituída pelas barras 1, o que corresponde a uma treliça isostática, ou seja, a plastificação da barra 2 faz com que a estrutura inicial correspondente a uma treliça com grau de hiperestaticidade 1, se modifique para absorver ao acréscimo de carga ΔP , passando a responder como treliça isostática constituída pelas barras 1.

Assim, para o acréscimo ΔP tem-se (Figura 4.39)

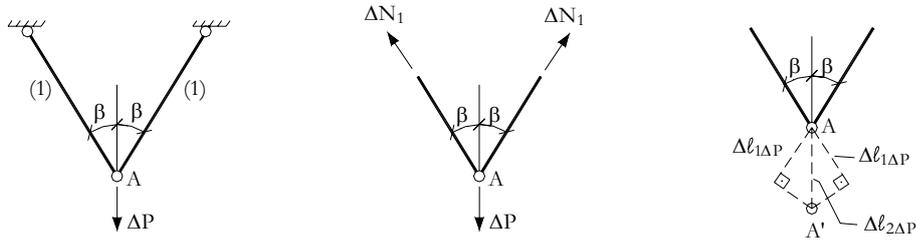


Figura 4.39: Acréscimo de carga ΔP acima de P_I . Solução da estrutura.

$$\Delta P = 2\Delta N_1 \cos \beta$$

ou

$$\Delta P = \Delta N_1 \quad (\cos \beta = 0,5)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_1 &= \frac{\Delta N_1}{A_1} = \frac{\Delta P}{4A_2} \\ \Delta \sigma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Desta forma as tensões finais, após a aplicação de ΔP ficam:

$$\begin{aligned} \text{barra 1} \quad \sigma_1 &= \frac{\sigma_e}{4} + \frac{\Delta P}{4A_2} \\ \text{barra 2} \quad \sigma_2 &= \sigma_e. \end{aligned}$$

Impondo a condição de Segundo Limite à tração tem-se

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_e}{4} + \frac{\Delta P}{4A_2} = \sigma_e$$

ou seja,

$$\Delta P = 3\sigma_e A_2$$

e

$$\begin{aligned} \Delta N_1 &= 3\sigma_e A_2 \\ \Delta N_2 &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, a carga P_{II} fica

$$P_{II} = P_I + \Delta P$$

ou

$$P_{II} = 5\sigma_e A_2.$$

O acréscimo no alongamento ($\Delta l_{1\Delta P}$) das barras 1 devido a ΔP fica

$$\Delta l_{1\Delta P} = \frac{\Delta N_1 l_1}{EA_1} = \frac{3\sigma_e A_2 \times 2l_2}{E \times 4A_2}$$

$$\Delta l_{1\Delta P} = \frac{3\sigma_e l_2}{2E}.$$

Assim, o deslocamento vertical do ponto A (AA') devido a ΔP ($\Delta l_{2\Delta P}$) fica:

$$\Delta l_{2\Delta P} = \frac{\Delta l_{1\Delta P}}{\cos \beta}$$

ou

$$\Delta l_{2\Delta P} = \frac{3\sigma_e l_2}{E}.$$

O deslocamento vertical final do ponto A na condição de Segundo Limite fica:

$$\Delta l_{2II} = \Delta l_{2I} + \Delta l_{2\Delta P}$$

ou seja,

$$\Delta l_{2II} = \frac{\sigma_e l_2}{E} + \frac{3\sigma_e l_2}{E}$$

$$\Delta l_{2II} = \frac{4\sigma_e l_2}{E}.$$

A Figura 4.40 mostra as forças normais e tensões finais nas barras 1 e 2, bem como o deslocamento vertical do ponto A , na situação de Segundo Limite.

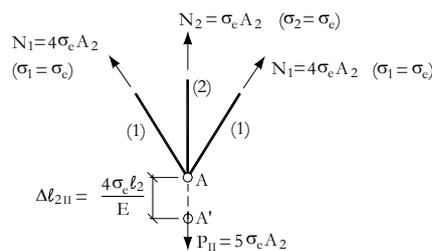


Figura 4.40: Segundo Limite à tração. Forças e tensões nas barras. Deslocamento vertical do ponto A .

- Descarga total

A seguir se fará a descarga total da estrutura a partir da carga P_{II} . Esta descarga, como se verá, deverá ser feita em duas etapas:

- etapa 1: descarga elástica da treliça até o Primeiro Limite por compressão

Nesta etapa a estrutura responde à variação de carga ΔP a partir da carga P_{II} obedecendo a resposta linear da treliça hiperestática.

Assim, as variações de força normal nas barras 1 e 2 devidas à variação de carga ΔP ficam (4.18)

$$\Delta N_1 = \Delta N_2 = \frac{\Delta P}{2}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_1 &= \frac{\Delta N_1}{A_1} = \frac{\Delta P}{8A_2} \\ \Delta \sigma_2 &= \frac{\Delta N_2}{A_2} = \frac{\Delta P}{2A_2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_e + \frac{\Delta P}{8A_2} \\ \sigma_2 &= \sigma_e + \frac{\Delta P}{2A_2}.\end{aligned}$$

A condição de Primeiro Limite na compressão pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}\text{barra 1} \quad \sigma_1 &= \sigma_e + \frac{\Delta P}{8A_2} = -\sigma_e \\ \therefore \Delta P &= -16\sigma_e A_2 \\ \text{barra 2} \quad \sigma_2 &= \sigma_e + \frac{\Delta P}{2A_2} = -\sigma_e \\ \therefore \Delta P &= -4\sigma_e A_2.\end{aligned}$$

Assim, a carga de Primeiro Limite à compressão é aquela que leva a barra 2 ao escoamento:

$$P_I = P_{II} + \Delta P$$

ou seja

$$\begin{aligned}P_I &= 5\sigma_e A_2 - 4\sigma_e A_2 \\ P_I &= \sigma_e A_2.\end{aligned}$$

Notar que $\Delta P = -4\sigma_e A_2$ é, portanto, inferior à variação de carga necessária para a descarga total ($\Delta P = -5\sigma_e A_2$). Daí a necessidade de se ter uma segunda etapa para se descarregar totalmente a estrutura.

No final da etapa 1 as variações de força normal e de tensão nas barras, devidas à variação de carga $\Delta P = -4\sigma_e A_2$ são:

$$\Delta N_1 = \Delta N_2 = \frac{\Delta P}{2}$$

ou

$$\Delta N_1 = \Delta N_2 = -2\sigma_e A_2$$

e

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_1 &= \frac{\Delta N_1}{A_1} = -\frac{2\sigma_e A_2}{4A_2} = -\frac{\sigma_e}{2} \\ \Delta \sigma_2 &= \frac{\Delta N_2}{A_2} = -\frac{2\sigma_e A_2}{A_2} = -2\sigma_e.\end{aligned}$$

Portanto, as forças normais e tensões no final desta etapa ficam:

$$\begin{array}{ll}
 \text{barra 1} & N_1 = 4\sigma_e A_2 - 2\sigma_e A_2 & \sigma_1 = \sigma_e - \frac{\sigma_e}{2} = +\frac{\sigma_e}{2} < \sigma_e \\
 & N_1 = 2\sigma_e A_2 & \\
 \text{barra 2} & N_2 = \sigma_e A_2 - 2\sigma_e A_2 & \sigma_2 = \sigma_e - 2\sigma_e = -\sigma_e \\
 & N_2 = -\sigma_e A_2. &
 \end{array}$$

A variação devida a ΔP no deslocamento vertical do ponto A é dada por

$$\Delta l_{2\Delta P} = \frac{\Delta N_2 l_2}{EA_2}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \Delta l_{2\Delta P} &= \frac{\Delta P l_2}{2EA_2} & (\Delta P = -4\sigma_e A_2) \\
 \Delta l_{2\Delta P} &= -\frac{2\sigma_e A_2}{E}.
 \end{aligned}$$

Desta forma o deslocamento vertical do ponto A no final da etapa 1 da descarga fica:

$$\Delta l_{2D1} = \Delta l_{2II} + \Delta l_{2\Delta P}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \Delta l_{2D1} &= \frac{4\sigma_e A_2}{E} - \frac{2\sigma_e A_2}{E} \\
 \Delta l_{2D1} &= \frac{2\sigma_e A_2}{E}.
 \end{aligned}$$

A Figura 4.41 mostra as forças normais e tensões nas barras 1 e 2, bem como, o deslocamento vertical do ponto A no final da etapa 1 de descarga.

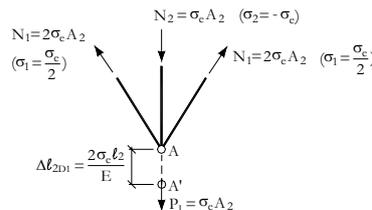


Figura 4.41: Descarga. Etapa 1. Forças e tensões nas barras. Deslocamento vertical do ponto A .

- etapa 2

Para se completar a descarga total deve-se, portanto, aplicar uma variação de carga $\Delta P = -\sigma_e A_2$.

Novamente aqui, como a barra 2 está plastificada a estrutura passa a ser constituída pelas barras 1 caracterizada por uma treliça isostática.

Desta forma, para esta variação de carga $\Delta P = -\sigma_e A_2$, tem-se:

$$\Delta P = 2\Delta N_1 \cos \beta$$

ou

$$\begin{aligned}\Delta N_1 &= \Delta P = -\sigma_e A_2 \\ \Delta N_2 &= 0\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\Delta \sigma_1 &= \frac{\Delta N_1}{A_1} = -\frac{\sigma_e A_2}{4A_2} = -\frac{\sigma_e}{4} \\ \Delta \sigma_2 &= 0.\end{aligned}$$

As forças normais e tensões finais na situação de descarga total ficam:

$$\begin{array}{lll} \text{barra 1} & N_1 = 2\sigma_e A_2 - \sigma_e A_2 & \sigma_1 = \frac{\sigma_e}{2} - \frac{\sigma_e}{4} = \frac{\sigma_e}{4} \\ & N_1 = \sigma_e A_2 & \\ \text{barra 2} & N_2 = -\sigma_e A_2 & \sigma_2 = -\sigma_e. \end{array}$$

A variação no deslocamento vertical do ponto A devida a ΔP é dada por

$$\Delta \ell_{2\Delta P} = 2\Delta \ell_{1\Delta P} = 2\frac{\Delta N_1 \ell_1}{EA_1}$$

ou

$$\begin{aligned}\Delta \ell_{2\Delta P} &= -\frac{2\sigma_e A_2 \times 2\ell_2}{E \times 4A_2} \\ \Delta \ell_{2\Delta P} &= -\frac{\sigma_e \ell_2}{E}.\end{aligned}$$

Assim, o deslocamento vertical do ponto A no final da etapa 2 de descarga, ou seja, na descarga total fica

$$\begin{aligned}\Delta \ell_{2D2} &= \Delta \ell_{2D1} + \Delta \ell_{2\Delta P} \\ \Delta \ell_{2D2} &= \frac{2\sigma_e \ell_2}{E} - \frac{\sigma_e \ell_2}{E} \\ \Delta \ell_{2D2} &= \frac{\sigma_e \ell_2}{E}.\end{aligned}$$

A Figura 4.42 mostra as forças normais e tensões nas barras 1 e 2, bem como, o deslocamento vertical após o ciclo de carga e descarga total.

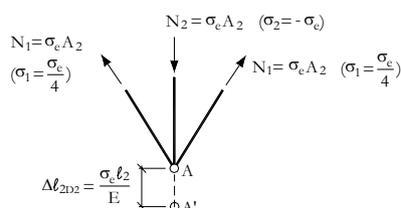


Figura 4.42: Descarga total. Forças e tensões nas barras. Deslocamento vertical do ponto A

É interessante notar que, após o ciclo completo de carga até o Segundo Limite e descarga total, a estrutura se mantém solicitada internamente com tensões residuais auto-equilibradas e com deformações permanentes responsáveis pelo deslocamento vertical do ponto A .

Na Figura 4.43 se representa a variação de P em função do deslocamento vertical do ponto A , indicando as cargas de Primeiro e Segundo Limite e os pontos de descarga das etapas 1 e 2.

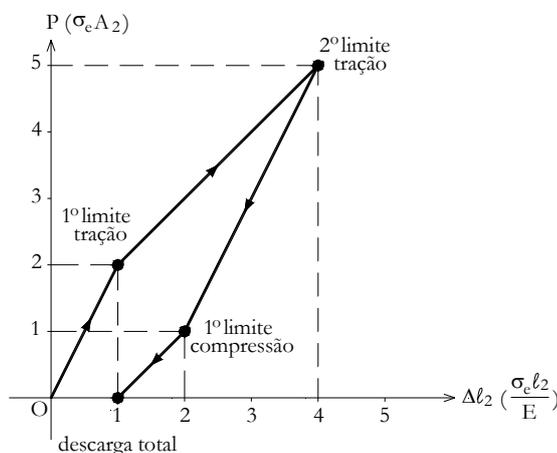


Figura 4.43: Diagrama de $P(\Delta l_2)$.

É interessante neste ponto fazer-se algumas considerações sobre os aspectos ligados às medidas de segurança da treliça hiperestática do exemplo 5, a partir das soluções obtidas em relação ao Primeiro e Segundo Limite.

Imagine-se que se queira dimensionar as barras da treliça submetida a um carregamento P .

Analisando a solução de Primeiro Limite (Figura 4.38) tem-se:

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2}.$$

Adotando-se um coeficiente de segurança γ_i vem

$$\text{barra 2} \quad \sigma_2 = \frac{\gamma_i P}{2A_{2I}} \leq \sigma_e \quad \therefore \quad A_{2I} \geq \frac{\gamma_i P}{2\sigma_e}$$

onde A_{2I} é a área da seção transversal da barra 2.

Analisando a solução da Segundo Limite (Figura 4.40) tem-se

$$N_1 = \frac{4}{5}P \quad N_2 = \frac{P}{5}.$$

Adotando-se um coeficiente de segurança γ_e vem

$$\begin{aligned} \text{barra 1} \quad \sigma_1 &= \frac{\gamma_e 4P}{5A_{1II}} \leq \sigma_e \quad \therefore \quad A_{1II} \geq \frac{4\gamma_e P}{5\sigma_e} \\ \text{barra 2} \quad \sigma_2 &= \frac{\gamma_e P}{5A_{2II}} \leq \sigma_e \quad \therefore \quad A_{2II} \geq \frac{\gamma_e P}{5\sigma_e}. \end{aligned}$$

Desta forma tem-se

$$\frac{A_{2II}}{A_{2I}} = \frac{2\gamma_e}{5\gamma_i}.$$

Adotando-se $\gamma_e = 4,0$ e $\gamma_i = 2,0$ a relação acima fica:

$$\frac{A_{2II}}{A_{2I}} = \frac{4}{5} \quad \therefore \quad A_{2I} = 1,25A_{2II}$$

ou seja, o dimensionamento feito a partir da solução de Primeiro Limite leva a uma seção transversal da barra 2, que é 25% maior que aquela que se teria se o dimensionamento fosse feito a partir da solução de Segundo Limite, ou seja, este último leva a uma estrutura mais econômica.

4.4.2 Solicitação por flexão

Neste item se apresentará o estudo das tensões nas estruturas com comportamento elasto-plástico ideal submetidas à flexão.

Considere-se inicialmente uma seção transversal com duplo eixo de simetria, submetida à flexão pura, ou seja, a uma solicitação tal que $M \neq 0$, $N = 0$ e $V = 0$ (Figura 4.44).

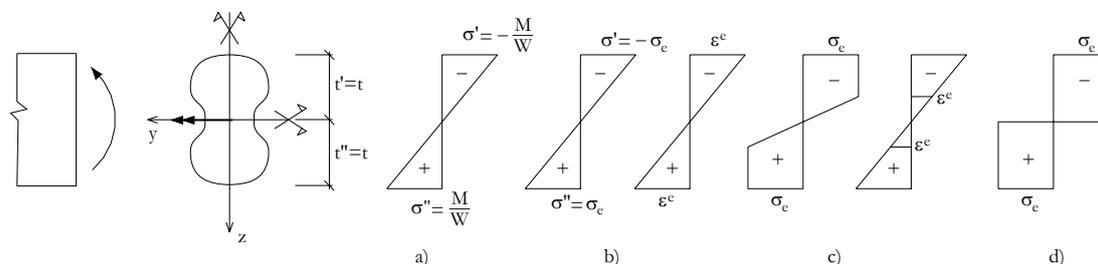


Figura 4.44: Seção com duplo eixo de simetria. Flexão pura.

Em regime elástico linear as tensões normais devidas a M são dadas por:

$$\sigma = \frac{M}{I}z$$

e as tensões nas fibras extremas por

$$\sigma'' = \frac{M}{W''} \quad \text{e} \quad \sigma' = \frac{M}{W'}$$

onde

$$W' = \frac{I}{t'} \quad \text{e} \quad W'' = \frac{I}{t''}.$$

Como o eixo central de inércia em torno do qual atua a flexão dada por M é um eixo de simetria, então $t' = t'' = t$ e, portanto, $W' = W''$. Assim, tem-se:

$$\sigma'' = -\sigma' = \frac{M}{W}.$$

À medida que se aumenta a intensidade de M , mantida a resposta elástica linear, as tensões crescem proporcionalmente às deformações, até que nas fibras extremas, que correspondem aos pontos de máxima tensão de tração e compressão, atinja-se a tensão de escoamento, ou seja:

$$\sigma'' = -\sigma' = \sigma_e. \quad (\text{Figura 4.44b})$$

Define-se como Primeiro Limite da Seção Transversal ao momento M_I que provoca o início de escoamento da seção transversal. Neste caso tem-se:

$$\sigma'' = -\sigma' = \sigma_e = \frac{M_I}{W} \quad \therefore \quad M_I = \sigma_e W. \quad (4.24)$$

Para valores de $M > M_I$ outros pontos da seção transversal continuam a se deformar em regime elástico linear, até atingirem os patamares de escoamento à tração ou compressão, tornando a seção parcialmente plastificada (Figura 4.44c).

A plastificação total da seção se dará quando todos os seus pontos atingirem a tensão de escoamento σ_e nas zonas de tração e compressão (Figura 4.44d).

Define-se como Segundo Limite da Seção Transversal ao momento M_{II} que provoca a sua plastificação total, fazendo com que perca a capacidade de absorver acréscimos de momento fletor, criando, portanto, nesta seção uma rótula plástica; M_{II} é também chamado de momento de plastificação da seção transversal.

Nestas condições as equações de equilíbrio escritas para a distribuição de tensões decorrente da plastificação total da seção transversal ficam (Figura 4.45):

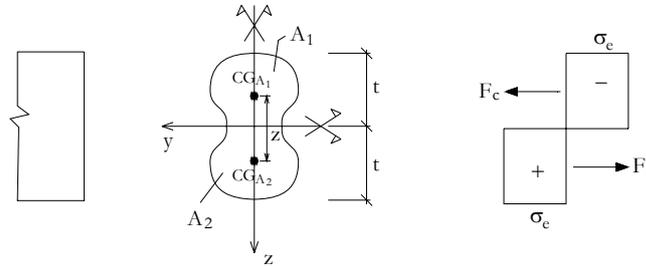


Figura 4.45: Seção totalmente plastificada com duplo eixo de simetria.

- equilíbrio de forças

$$F_t = F_c$$

onde

$$F_t = \sigma_e A_2 \quad \therefore \quad \text{resultante das tensões de tração}$$

$$F_c = \sigma_e A_1 \quad \therefore \quad \text{resultante das tensões de compressão}$$

ou seja

$$\sigma_e A_1 = \sigma_e A_2$$

e, portanto,

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2}.$$

Notar que as regiões plastificadas por tração (A_2) e por compressão (A_1) devem ter áreas iguais e, portanto, iguais à metade da área A da seção transversal. O eixo y em torno do qual se realiza a flexão é um eixo de simetria e, portanto, divide a seção transversal em duas áreas iguais $A_1 = A_2 = \frac{A}{2}$; assim a linha neutra que divide as regiões plastificadas por tração e compressão coincide com o eixo central de inércia y .

- equilíbrio de momento

$$M_{II} = F_t z$$

onde M_{II} é o momento de segundo limite da seção transversal (momento de plastificação), z é a distância entre os centros de gravidade das áreas plastificadas por tração (A_2) e compressão (A_1).

Como

$$F_t = F_c = \sigma_e \frac{A}{2}$$

tem-se

$$M_{II} = \sigma_e \frac{A}{2} z. \quad (4.25)$$

Do acima exposto pode-se concluir que, na situação de plastificação total da seção transversal, a linha que delimita as regiões plastificadas por compressão e tração, sempre irá dividir a seção em duas áreas iguais para garantir a equação de equilíbrio de força $F_t = F_c$. Desta forma, se a seção transversal não tiver duplo eixo de simetria, então o eixo central de inércia y em torno do qual se realiza a flexão não irá coincidir com a linha que divide as regiões plastificadas.

Assim, qualquer que seja a seção, o seu momento de plastificação M_{II} será sempre dado pela expressão (4.25). Desta forma para determinação de M_{II} dever-se-á definir uma linha, paralela ao eixo central de inércia, que divida a seção transversal em duas áreas iguais e calcular a distância z entre os centros de gravidade das áreas A_1 e A_2 (Figura 4.46).

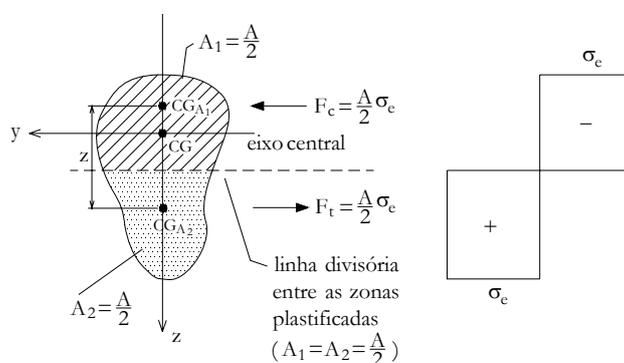


Figura 4.46: Seção plastificada sem duplo eixo de simetria.

Exemplo 1 Determinar os momentos de primeiro e segundo limites da seção retangular (Figura 4.47).

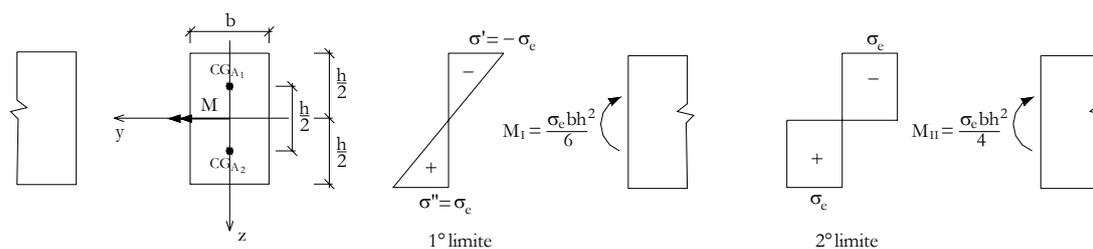


Figura 4.47: Seção retangular. Determinação de M_I e M_{II} .

1º Limite:

$$\sigma'' = -\sigma' = \sigma_e = \frac{M_I}{W}$$

$$W = \frac{bh^2}{6} \quad \therefore \quad M_I = \sigma_e \frac{bh^2}{6}$$

2º Limite:

$$M_{II} = \sigma_e \frac{A}{2} z$$

$$A = \frac{bh}{2} \quad z = \frac{h}{2} \quad \therefore \quad M_{II} = \sigma_e \frac{bh^2}{4}$$

É interessante notar que a relação entre o momento de plastificação M_{II} e o momento de primeiro limite M_I para a seção retangular é:

$$\frac{M_{II}}{M_I} = \frac{3}{2}$$

Exemplo 2 Determinar o momento de plastificação da seção T invertido indicada na Figura 4.48.

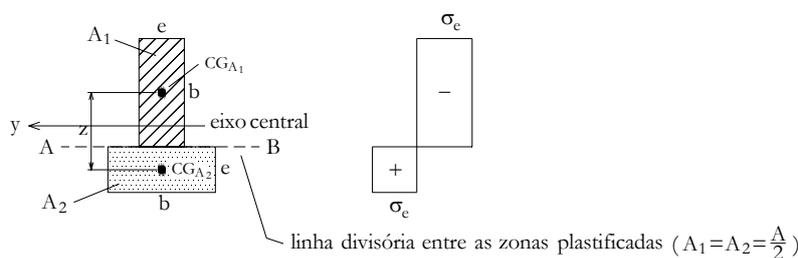


Figura 4.48: Seção T invertido. Determinação de M_{II} .

A linha AB divide a seção T invertido em duas áreas iguais tais que:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} = b e.$$

A distância z entre os centros de gravidade das áreas A_1 e A_2 é

$$z = \frac{b + e}{2}$$

Desta forma tem-se

$$M_{II} = \sigma_e \frac{A}{2} z$$

ou

$$M_{II} = \sigma_e b e \frac{b+e}{2}.$$

Exemplo 3 Para a seção retangular do exemplo 1 fazer a descarga total da seção a partir da sua plastificação inicial.

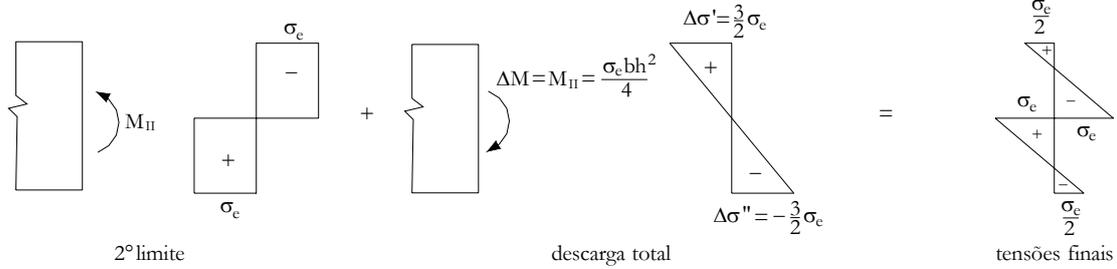


Figura 4.49: Seção retangular. Descarga.

Na hipótese de a descarga se fazer elasticamente, tem-se:

$$\Delta\sigma' = -\Delta\sigma'' = \frac{\Delta M}{W}$$

com

$$\Delta M = M_{II} = \sigma_e \frac{bh^2}{4}$$

$$W = \frac{bh^2}{6}$$

logo

$$\Delta\sigma' = -\Delta\sigma'' = \sigma_e \frac{bh^2}{4} \frac{6}{bh^2}$$

$$\Delta\sigma' = -\Delta\sigma'' = \frac{3}{2}\sigma_e$$

e, portanto, as tensões finais nas fibras extremas após a descarga ficam:

$$\sigma'' = \sigma_e + \Delta\sigma'' = \sigma_e - \frac{3}{2}\sigma_e = -\frac{\sigma_e}{2}$$

$$\sigma' = -\sigma_e + \Delta\sigma' = -\sigma_e + \frac{3}{2}\sigma_e = +\frac{\sigma_e}{2}.$$

A Figura 4.49 mostra o diagrama de tensões finais na seção após a descarga. Obviamente esta distribuição é auto-equilibrada ($N = 0, M = 0$).

Imagine-se agora que a partir da plastificação inicial da seção se proceda a uma descarga tal que conduza a uma plastificação das fibras superior e inferior, respectivamente, por tração e compressão (Figura 4.50).

Na hipótese de a descarga se fazer elasticamente, tem-se:

$$\Delta\sigma' = -\Delta\sigma'' = \frac{\Delta M}{W}$$

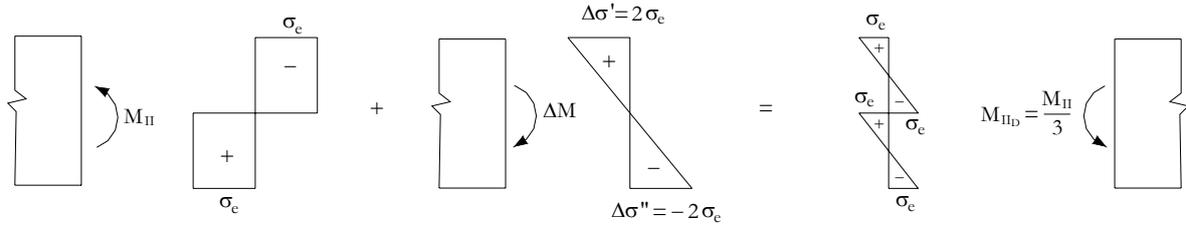


Figura 4.50: Seção retangular. 2º Limite na descarga.

onde

$$W = \frac{bh^2}{6}$$

e ΔM é o acréscimo de momento aplicado à seção a partir da sua plastificação inicial, tal que conduza a uma nova situação de plastificação das fibras superior e inferior, respectivamente, por tração e compressão. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{fibra inferior} \quad \sigma'' &= \sigma_e + \Delta\sigma'' = -\sigma_e \quad \therefore \quad \Delta\sigma'' = -2\sigma_e \\ \text{fibra superior} \quad \sigma' &= -\sigma_e + \Delta\sigma' = \sigma_e \quad \therefore \quad \Delta\sigma' = 2\sigma_e \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \Delta\sigma' = 2\sigma_e &= \frac{\Delta M}{W} \\ \therefore \quad \Delta M = 2\sigma_e \frac{bh^2}{6} \quad \text{ou} \quad \Delta M = \sigma_e \frac{bh^2}{3}. \end{aligned}$$

Portanto o momento que caracteriza o 2º Limite na descarga fica

$$M_{IID} = M_{II} - \Delta M$$

ou

$$M_{IID} = \sigma_e \frac{bh^2}{4} - \sigma_e \frac{bh^2}{3} = -\sigma_e \frac{bh^2}{12} = -\frac{M_{II}}{3}.$$

A Figura 4.50 mostra o diagrama final de tensões na seção transversal que caracteriza o seu limite na descarga. Notar que esta distribuição de tensões equilibra, obviamente, o momento $M_{IID} = \frac{M_{II}}{3}$.

No caso de as seções transversais estarem submetidas à flexão composta ($M \neq 0, N \neq 0$) pode-se mostrar (apêndice D) que a influência da força normal N é tal que provoca uma redução do momento de plastificação M_{II} obtido na hipótese de flexão pura.

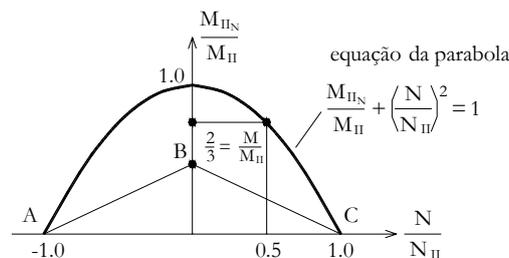


Figura 4.51: Seção retangular. Influência da força normal.

A parábola indicada a Figura 4.51, representa a variação do par $\left(\frac{M_{II,N}}{M_{II}}\right)$ em relação ao par $\left(\frac{N}{N_{II}}\right)$, para uma seção retangular e onde:

$M_{II,N}$ é o momento de plastificação da seção influenciado pela normal N

M_{II} é o momento de plastificação da seção submetida à flexão pura

$N_{II} = \sigma_e bh$ é a força normal que, se atuasse isolada, plastificaria a seção por tração ou compressão.

Como exemplo, se em uma seção transversal retangular atuar uma força normal N tal que $N = 0,5N_{II} = 0,5\sigma_e bh$, a relação $\left(\frac{M_{II,N}}{M_{II}}\right)$ assume o valor:

$$\left(\frac{M_{II,N}}{M_{II}}\right) = 0,75$$

ou seja, a força normal reduz o momento de plastificação para 75% do valor que se teria na hipótese de flexão pura, ou seja:

$$M_{II,N} = 0,75M_{II}$$

ou

$$M_{II,N} = 0,75\sigma_e \frac{bh^2}{4} = 3\sigma_e \frac{bh^2}{16}.$$

Pode-se mostrar ainda que em uma seção retangular submetida à flexão composta dada por M e N , e que, portanto, tem associada a ela os pares $\frac{M}{M_{II}}$ e $\frac{N}{N_{II}}$ tem-se:

- se $\frac{M}{M_{II}}$ e $\frac{N}{N_{II}}$ conduzir a pontos no interior da região triangular ABC toda a seção retangular está em regime elástico
- se $\frac{M}{M_{II}}$ e $\frac{N}{N_{II}}$ conduzir a pontos sobre as retas AB e BC a seção retangular tem uma das tensões extremas igual a σ_e (1° limite da seção transversal)
- se $\frac{M}{M_{II}}$ e $\frac{N}{N_{II}}$ conduzir a pontos entre as retas AB , BC e a parábola, então a seção está em regime elasto-plástico
- se $\frac{M}{M_{II}}$ e $\frac{N}{N_{II}}$ conduzir a pontos sobre a parábola, então a seção está plastificada e o seu momento de plastificação é $M_{II,N}$.

Como se pode notar a influência da força normal na redução do momento de plastificação da seção transversal, pode ser importante dependendo da intensidade da força N que acompanha a flexão.

É importante salientar aqui que também a força cortante que acompanha a flexão reduz o valor do momento de plastificação, porém a sua influência é muito pequena e pode sempre ser desprezada. Pode-se mostrar que para seções regulares com relação $\frac{h}{\ell}$ (ℓ é o vão da viga) da ordem de 0,1 a redução no valor do momento de plastificação, devida à força cortante é de cerca de 4%.

4.5 Análise limite

Como se viu, a quantificação do momento de plastificação de dada seção transversal depende da sua forma, das suas dimensões e da tensão de escoamento do material de que é constituída. O aparecimento de uma seção plastificada em dada estrutura indica que aquela seção perdeu a capacidade de absorver esforços de flexão, ou seja, perdeu a capacidade de absorver momento fletor, para acréscimos de carga superiores àquela que provocou a referida plastificação. Diz-se que nesta seção se formou uma rótula plástica.

Desta forma, para dada estrutura submetida a um carregamento crescente, enquanto forem ocorrendo rótulas plásticas (por plastificação de algumas seções transversais) de tal forma que não se caracterize um mecanismo, a estrutura continua a ter capacidade de absorver acréscimos de carregamento.

Evidentemente cada seção plastificada (ou cada rótula plástica que ocorra) modifica a estrutura que irá responder aos acréscimos de carga acima daquela que caracteriza a plastificação da referida seção.

Este processo de carregamento crescente com modificação da estrutura devida ao aparecimento de rótulas plásticas, continua até que a estrutura se torne parcial ou totalmente hipostática atingindo, portanto, a sua capacidade limite. Como se definiu, a carga ou o multiplicador do carregamento que leva a esta condição caracteriza o segundo limite da estrutura. A configuração da estrutura caracterizada pela plastificação das seções que definem a sua capacidade limite é chamada de configuração de ruína da estrutura associada àquele carregamento crescente.

A análise limite estuda os métodos de cálculo que permitem determinar, para dada estrutura submetida a dado conjunto de carregamento externo fixo, o multiplicador γ_{II} deste carregamento que leva a estrutura a atingir o seu segundo limite (ou a atingir a sua configuração de ruína).

No que se segue, serão abordados três métodos de cálculo que permitem o estudo da análise limite das estruturas de barras:

- Método Passo a Passo
- Teorema Estático
- Teorema Cinemático

4.5.1 Método passo a passo

No método passo a passo a determinação do multiplicador γ_{II} ou da carga P_{II} que caracteriza o segundo limite da estrutura é feita aplicando-se acréscimos de carregamento que vão determinando o aparecimento da plastificação de seções transversais, até que se atinja a ruína da estrutura. Este método permite seguir “passo a passo” toda a seqüência de plastificação das seções transversais até atingir-se a configuração final de ruína.

Os exemplos mostrados no item 4.4.1 quando do estudo das solicitações axiais utilizaram o método passo a passo para determinação das cargas P_{II} de segundo limite.

Evidentemente a aplicação do método passo a passo se inicia calculando-se a estrutura em regime elástico linear para o conjunto de carregamento fixo nela aplicado; a partir da resposta elástica linear identifica-se a seção (ou seções) mais solicitada(s) e o multiplicador do carregamento fixo ou o carregamento que proporcionalmente ao carregamento inicial, faz com que esta seção plastifique. A plastificação desta seção por flexão faz com que a estrutura, para acréscimos de carga, se comporte como se nesta seção existisse uma articulação.

Calcula-se a seguir a nova estrutura em regime elástico linear para dado acréscimo de carga que conduziu à plastificação da seção inicial. Por superposição de efeitos desta solução com a anterior determina-se qual o acréscimo de carga que conduz à plastificação de uma nova seção. Este procedimento se repete até se atingir a configuração de ruína da estrutura. A seguir serão mostrados alguns exemplos simples que irão ilustrar melhor a seqüência a ser seguida na aplicação do método passo a passo.

Exemplo 1 Determinar a carga p_{II} que caracteriza o segundo limite da viga simples isostática da Figura 4.52. A seção transversal é retangular e o material é elasto-plástico ideal com tensão de escoamento à tração e à compressão igual a σ_e .

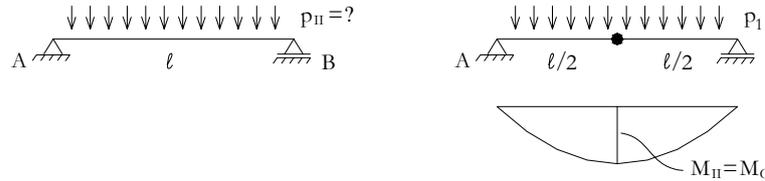


Figura 4.52: Viga simples isostática. Método passo a passo.

A solução elástica da viga simples isostática submetida a um carregamento uniformemente distribuído é tal que:

$$M_{máx} = \frac{p\ell^2}{8} \quad (\text{seção do meio do vão}).$$

Existe uma carga p_1 que faz com que a seção mais solicitada plastifique, ou seja

$$M_{C1} = \frac{p_1\ell^2}{8} = M_{II}$$

onde

$$M_{II} = \sigma_e \frac{bh^2}{4}$$

é o momento de plastificação da seção transversal retangular da viga.

Assim

$$\begin{aligned} \frac{p_1\ell^2}{8} &= \sigma_e \frac{bh^2}{4} \\ \therefore p_1 &= 2\sigma_e \frac{bh^2}{\ell^2}. \end{aligned}$$

O aparecimento de uma rótula plástica em uma seção da viga isostática caracteriza sua ruína e, portanto, a carga p_1 leva a estrutura a atingir o seu segundo limite.

Assim,

$$P_{II} = P_1 = 2\sigma_e \frac{bh^2}{\ell^2}$$

é a carga de Segundo Limite da viga isostática submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

Exemplo 2 Determinar a carga p_{II} de segundo limite da viga biengastada submetida a um carregamento uniformemente distribuído. A seção transversal é retangular e o material é elasto-plástico ideal (Figura 4.53a).

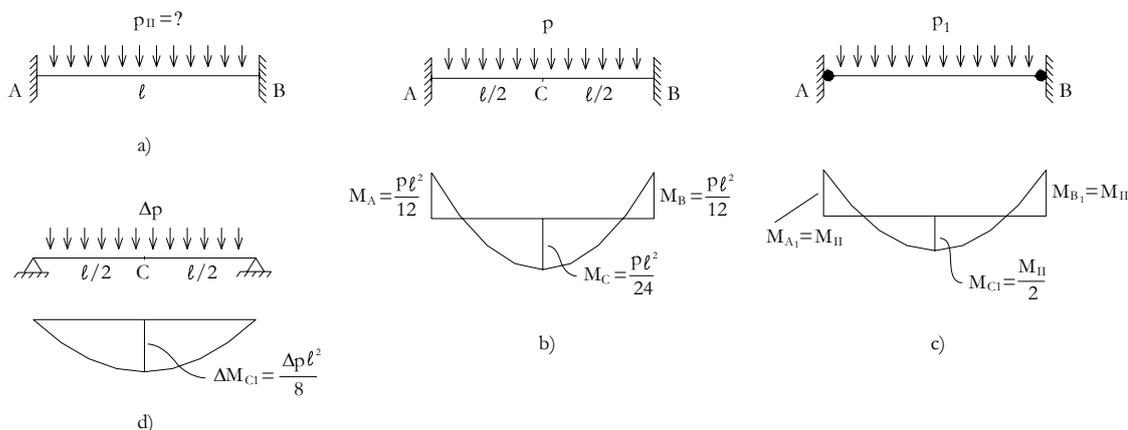


Figura 4.53:

A solução elástica (Figura 4.53b) indica que as seções mais solicitadas estão em A e B e que:

$$M_A = M_B = \frac{p\ell^2}{12} \quad \text{e} \quad M_C = \frac{p\ell^2}{24}$$

- 1º passo

Portanto existe uma carga p_1 tal que ocorra plastificação das seções A e B do engastamento, ou seja:

$$M_{A1} = M_{B1} = \frac{p_1\ell^2}{12} = M_{II} \quad \left(M_{II} = \sigma_e \frac{bh^2}{4} \right)$$

ou seja

$$p_1 = \frac{12M_{II}}{\ell^2}$$

e, portanto,

$$M_{C1} = \frac{p_1\ell^2}{24} = \frac{M_{II}}{2} < M_{II}. \quad (\text{Figura 4.53c})$$

A ocorrência de rótulas em A e B não caracteriza a ruína da estrutura e, portanto, para acréscimos de carga Δp acima de p_1 a estrutura se comporta como se fosse articulada em A e B , ou seja como se fosse uma viga simples isostática. Assim, nesta estrutura, (Figura 4.53d), para um acréscimo de carga Δp o momento máximo ocorre no meio do vão e vale:

$$\begin{aligned} \Delta M_{C1} &= \frac{\Delta p \ell^2}{8} \\ \Delta M_A &= \Delta M_B = 0. \end{aligned}$$

Por superposição de efeito o momento em C devido a p_1 e Δp se escreve:

$$\begin{aligned} M_{C2} &= M_{C1} + \Delta M_{C1} \quad \left(M_{C1} = \frac{M_{II}}{2} \right) \\ M_{C2} &= \frac{M_{II}}{2} + \frac{\Delta p \ell^2}{8}. \end{aligned}$$

- 2º passo

Portanto existe um acréscimo de carga Δp_1 tal que ocorra plastificação da seção C do meio do vão, ou seja:

$$M_{C2} = \frac{M_{II}}{2} + \frac{\Delta p_1 \ell^2}{8} = M_{II}$$

$$\therefore \Delta p_1 = \frac{4M_{II}}{\ell^2}.$$

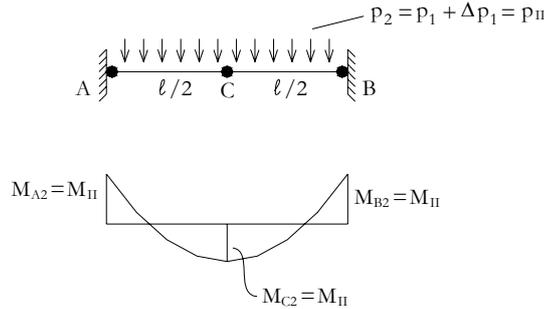


Figura 4.54:

Assim, por superposição de efeitos, a solução no final deste passo quando age $p_2 = p_1 + \Delta p_1$ fica (Figura 4.54)

$$M_{C2} = \frac{M_{II}}{2} + \frac{\Delta p \ell^2}{8} = M_{II}$$

$$M_{A2} = M_{A1} = M_{II} \quad (\Delta M_{A1} = 0)$$

$$M_{B2} = M_{B1} = M_{II} \quad (\Delta M_{B1} = 0)$$

com

$$p_2 = p_1 + \Delta p_1$$

ou

$$p_2 = \frac{12M_{II}}{\ell^2} + \frac{4M_{II}}{\ell^2} = \frac{16M_{II}}{\ell^2}.$$

Obviamente a configuração indicada na Figura 4.54 é de ruína e, portanto, tem-se

$$p_{II} = p_2 = \frac{16M_{II}}{\ell^2}$$

com

$$M_{II} = \sigma_e \frac{bh^2}{4}$$

que representa a carga de segundo limite da viga biengastada submetida a uma carga uniformemente distribuída.

Suponha-se agora que atingida a carga p_{II} se queira descarregar totalmente a viga, ou seja, que se aplique uma carga $\Delta p_2 = -p_{II}$. Admitindo-se que na descarga a resposta seja elástica obtém-se (Figura 4.55).

$$\Delta M_{A2} = \Delta M_{B2} = \frac{\Delta p_2 \ell^2}{12} = -\frac{p_{II} \ell^2}{12} \quad \left(p_{II} = \frac{16M_{II}}{\ell^2} \right)$$

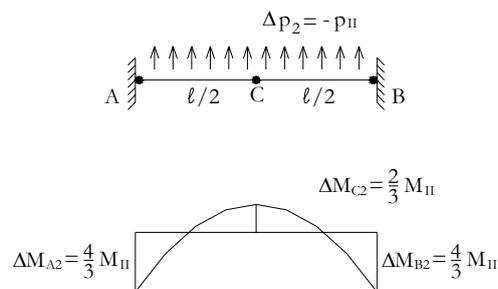


Figura 4.55:

ou

$$\Delta M_{A_2} = \Delta M_{B_2} = -\frac{4}{3} M_{II}$$

$$\Delta M_{C_2} = \frac{\Delta p_2 \ell^2}{24} = -\frac{p_{II} \ell^2}{24}$$

ou

$$\Delta M_{C_2} = -\frac{2}{3} M_{II}.$$

Assim, no final da descarga tem-se:

$$M_{A_3} = M_{A_2} + \Delta M_{A_2} = M_{II} - \frac{4}{3} M_{II} = -\frac{M_{II}}{3} \quad (\text{tração inferior})$$

$$M_{B_3} = M_{B_2} + \Delta M_{B_2} = M_{II} - \frac{4}{3} M_{II} = -\frac{M_{II}}{3} \quad (\text{tração inferior})$$

$$M_{C_3} = M_{C_2} + \Delta M_{C_2} = M_{II} - \frac{2}{3} M_{II} = \frac{M_{II}}{3} \quad (\text{tração inferior})$$

o que corresponde ao diagrama indicado na Figura 4.56.

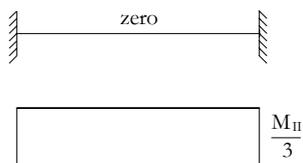


Figura 4.56:

Exemplo 3 Determinar a carga P_{II} de Segundo Limite da viga engastada-apoiada submetida a uma carga P no meio do vão. A seção é retangular e o material é elasto-plástico ideal (Figura 4.57).

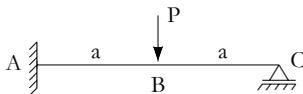


Figura 4.57: Viga engastada-apoiada. Método passo a passo.

A solução elástica está indicada na Figura 4.58, onde

$$M_A = \frac{3Pa}{8}$$

$$M_B = \frac{5Pa}{16}$$

e, portanto, a seção mais solicitada é M_A ($M_A > M_B$).

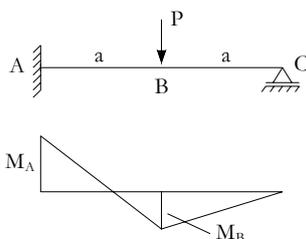


Figura 4.58:

• 1º passo:

– Determinação de P_1 tal que ocorra rótula em A :

$$M_{A1} = M_{II} = \frac{3P_1a}{8} \quad \therefore P_1 = \frac{8M_{II}}{3a}$$

$$M_{B1} = \frac{5P_1a}{16} = \frac{5M_{II}}{6} < M_{II}$$

– Esquema e diagrama no final deste passo

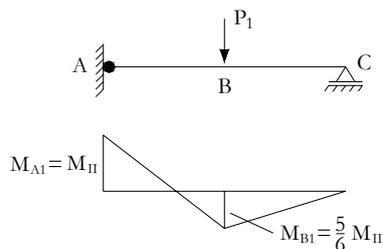


Figura 4.59:

– Acréscimo de carga ΔP . Solução elástica

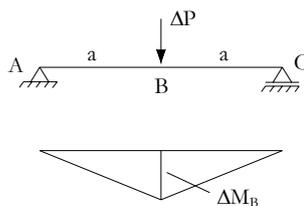


Figura 4.60:

$$\Delta M_B = \frac{\Delta P a}{2}$$

$$\Delta M_A = 0$$

• 2º passo

– Determinação de ΔP_1 tal que ocorra rótula em B :

$$M_{B2} = M_{B1} + \Delta M_{B1} = M_{II}$$

$$M_{A2} = M_{A1} \quad (\Delta M_{A1} = 0)$$

$$M_{B2} = \frac{5M_{II}}{6} + \frac{\Delta P_1 a}{2} = M_{II}$$

$$\therefore \Delta P_1 = \frac{M_{II}}{3a}$$

– Esquema e diagrama no final deste passo

$$P_2 = \frac{8M_{II}}{3a} + \frac{M_{II}}{3a}$$

$$P_2 = \frac{3M_{II}}{a}$$

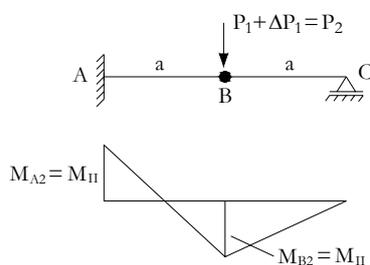


Figura 4.61:

A configuração do final desta fase é de ruína e, portanto,

$$P_{II} = P_2 = \frac{3M_{II}}{a}$$

Exemplo 4 Determinar o multiplicador γ_{II} do carregamento indicado na estrutura da Figura 4.62, que determina o seu Segundo Limite. É dado M_{II} o momento de plastificação.

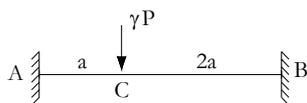


Figura 4.62: Viga biengastada com carga concentrada no terço do vão.

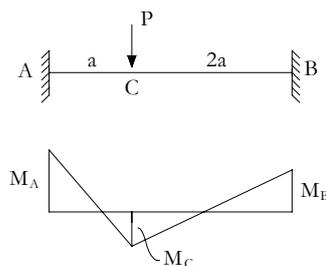


Figura 4.63:

A solução elástica para $\gamma = 1$ está indicada na Figura 4.63, onde:

$$\begin{aligned} M_A &= \frac{4Pa}{9} \\ M_B &= \frac{2Pa}{9} \\ M_C &= \frac{8Pa}{27} \end{aligned}$$

e, portanto, a seção mais solicitada é A.

• 1º passo:

– Determinação de γ_1 tal que ocorra rótula em A

$$\begin{aligned} M_{A1} &= \frac{4\gamma_1 Pa}{9} = M_{II} \\ \therefore \gamma_1 &= \frac{9M_{II}}{4Pa} \end{aligned}$$

– Esquema e diagrama no final deste passo

$$\begin{aligned} M_{B1} &= \frac{4\gamma_1 Pa}{9} = \frac{M_{II}}{2} < M_{II} \\ M_{C1} &= \frac{8\gamma_1 Pa}{27} = \frac{2M_{II}}{3} < M_{II} \end{aligned}$$

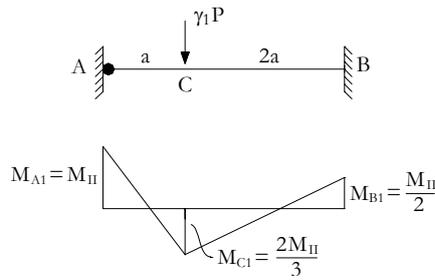


Figura 4.64:

– Acréscimo de carga $\Delta\gamma P$. Solução elástica

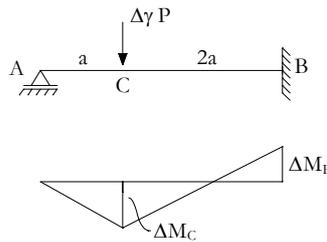


Figura 4.65:

$$\begin{aligned}\Delta M_B &= \frac{4\Delta\gamma Pa}{9} \\ \Delta M_C &= \frac{14\Delta\gamma Pa}{27} \\ \Delta M_A &= 0.\end{aligned}$$

• 2º passo:

– Determinação de $\Delta\gamma_1$ tal que ocorra uma segunda rótula em:

* rótula em B

$$\begin{aligned}M_{B2} &= M_{II} = M_{B1} + \Delta M_{B1} \\ M_{II} &= \frac{M_{II}}{2} + \frac{4\Delta\gamma_1 Pa}{9} \\ \therefore \Delta\gamma_1 &= \frac{9M_{II}}{8Pa}\end{aligned}$$

* rótula em C

$$\begin{aligned}M_{C2} &= M_{II} = M_{C1} + \Delta M_{C1} \\ M_{II} &= \frac{2M_{II}}{3} + \frac{14\Delta\gamma_1 Pa}{27} \\ \therefore \Delta\gamma_1 &= \frac{9M_{II}}{14Pa}.\end{aligned}$$

Portanto a segunda rótula ocorrerá em C com um acréscimo de carga $\Delta\gamma_1 P$ tal que $\Delta\gamma_1 = \frac{9M_{II}}{14Pa}$.

– Esquema e diagrama no final deste passo

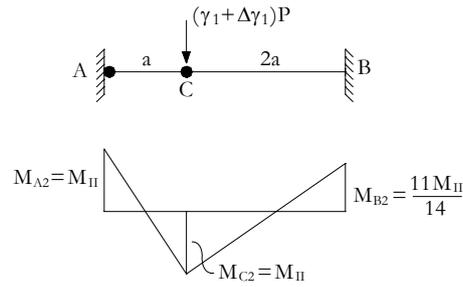


Figura 4.66:

$$\begin{aligned}\Delta M_{A1} &= 0 \\ \Delta M_{B1} &= \frac{4\Delta\gamma_1 Pa}{9} = \frac{2}{7}M_{II} \\ \Delta M_{C1} &= \frac{14\Delta\gamma Pa}{27} = \frac{1}{3}M_{II}.\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}M_{A2} &= M_{A1} + \Delta M_{A1} = M_{II} \\ M_{B2} &= M_{B1} + \Delta M_{B1} = \frac{1}{2}M_{II} + \frac{2}{7}M_{II} = \frac{11M_{II}}{14} < M_{II} \\ M_{C2} &= M_{C1} + \Delta M_{C1} = \frac{2}{3}M_{II} + \frac{1}{3}M_{II} = M_{II}.\end{aligned}$$

– Acréscimo de carga $\Delta\gamma P$. Solução elástica

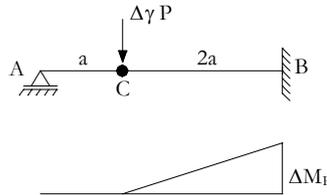


Figura 4.67:

$$\begin{aligned}\Delta M_A &= \Delta M_C = 0 \\ \Delta M_B &= \Delta\gamma P 2a\end{aligned}$$

• 3º passo

– Determinação de $\Delta\gamma_2$ tal que ocorra rótula em B

$$\begin{aligned}M_{B3} &= M_{II} = M_{B2} + \Delta M_{B2} \\ M_{II} &= \frac{11M_{II}}{14} + \Delta\gamma_2 P 2a \\ \therefore \Delta\gamma_2 &= \frac{3M_{II}}{28Pa}\end{aligned}$$

– Esquema e diagrama no final deste passo

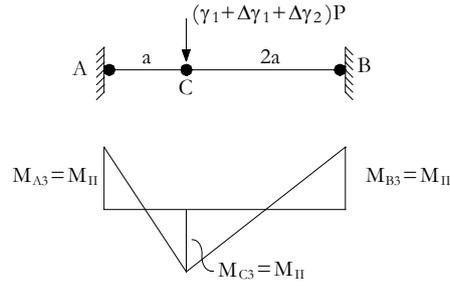


Figura 4.68:

$$\begin{aligned}\Delta M_{A2} &= 0 \\ \Delta M_{B2} &= \Delta \gamma_2 P 2a = \frac{3M_{II}}{14} \\ \Delta M_{C2} &= 0.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}M_{A3} &= M_{A2} + \Delta M_{A2} = M_{II} \\ M_{B3} &= M_{B2} + \Delta M_{B2} = M_{II} \\ M_{C3} &= M_{C2} + \Delta M_{C2} = M_{II}.\end{aligned}$$

A configuração no final do 3º passo é de ruína e, portanto, o multiplicador γ_{II} do carregamento que caracteriza o Segundo Limite da estrutura é:

$$\begin{aligned}\gamma_{II} &= \gamma_1 + \Delta \gamma_1 + \Delta \gamma_2 \\ \gamma_{II} &= \frac{9M_{II}}{4Pa} + \frac{9M_{II}}{14Pa} + \frac{3M_{II}}{28Pa}\end{aligned}$$

ou

$$\gamma_{II} = \frac{3M_{II}}{Pa}.$$

Exemplo 5 Analogamente ao exemplo 4, determinar o multiplicador γ_{II} do carregamento indicado na estrutura da Figura 4.69 que determina o seu Segundo Limite. É dado M_{II} , o momento de plastificação.

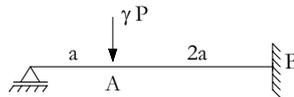


Figura 4.69:

- Solução elástica para $\gamma = 1$

$$\begin{aligned}M_A &= \frac{14Pa}{27} \\ M_B &= \frac{4Pa}{9}\end{aligned}$$

e, portanto, $M_A > M_B$.

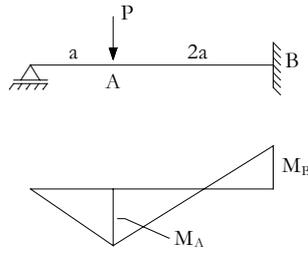


Figura 4.70:

• 1º passo

- Determinação de γ_1 tal que ocorra rótula em A

$$M_{A1} = M_{II} = \frac{14\gamma_1 Pa}{27}$$

$$\therefore \gamma_1 = \frac{27M_{II}}{14Pa}$$

- Esquema e diagrama no final deste passo

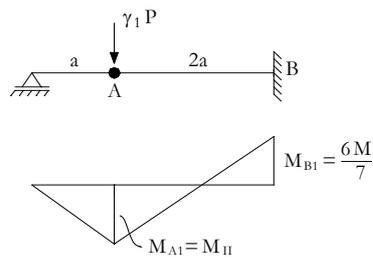


Figura 4.71:

$$M_{B1} = \frac{4\gamma_1 Pa}{9} = \frac{6M_{II}}{7} < M_{II}$$

- Acréscimo de carga $\Delta\gamma P$. Solução elástica

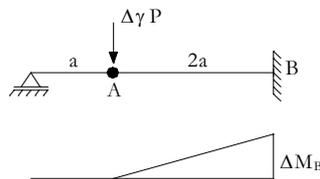


Figura 4.72:

$$\Delta M_B = \Delta\gamma P 2a$$

- 2º passo

- Determinação de $\Delta\gamma_1$ tal que ocorra rótula em B

$$M_{B2} = M_{B1} + \Delta M_{B1} = M_{II}$$

$$M_{II} = \frac{6M_{II}}{7} + \Delta\gamma_1 P 2a$$

$$\therefore \Delta\gamma_1 = \frac{M_{II}}{14Pa}$$

- Esquema e diagrama no final deste passo

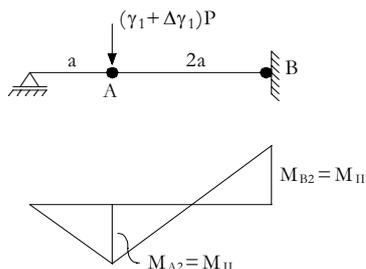


Figura 4.73:

$$\Delta M_{A1} = 0$$

$$\Delta M_{B1} = \frac{M_{II}}{7}$$

$$M_{A2} = M_{A1} + \Delta M_{A1} = M_{II}$$

$$M_{B2} = M_{B1} + \Delta M_{B1} = \frac{6M_{II}}{7} + \frac{M_{II}}{7} = M_{II}.$$

A configuração no final deste passo é de ruína e, portanto,

$$\gamma_{II} = \gamma_1 + \Delta\gamma_1$$

ou seja

$$\gamma_{II} = \frac{27M_{II}}{14Pa} + \frac{M_{II}}{14Pa}$$

$$\therefore \gamma_{II} = \frac{28M_{II}}{14Pa} = \frac{2M_{II}}{Pa}$$

Exemplo 6 Sistematização do Método Passo a Passo

Dada a estrutura da Figura 4.74, determinar o multiplicador γ_{II} do carregamento nela indicado que determine o seu Segundo Limite. É dado o momento de plastificação M_{II} , admitindo aqui constante para todas as barras.

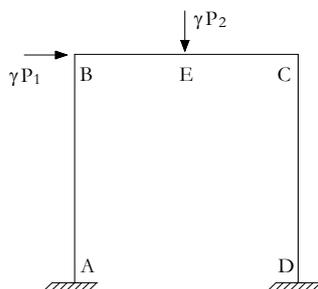


Figura 4.74:

- Solução elástica para $\gamma = 1$

- Resolve-se a estrutura original para $\gamma = 1$, obtendo-se o diagrama de momentos fletores (M)

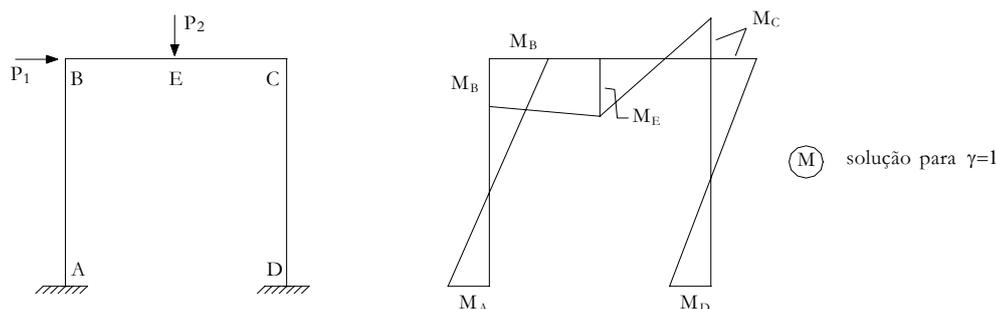


Figura 4.75:

- 1º passo

- Determinação de γ_1 tal que ocorra a primeira rótula na estrutura

Obviamente se M_{II} é o momento de plastificação constante para todas as barras da estrutura, então a primeira rótula ocorrerá na seção de momento máximo. Seja M_A o momento máximo; a condição de rótula em A é imposta por:

$$M_{A1} = M_{II} = \gamma_1 M_A$$

$$\therefore \gamma_1 = \frac{M_{II}}{M_A}$$

– Esquema e diagrama no final deste passo

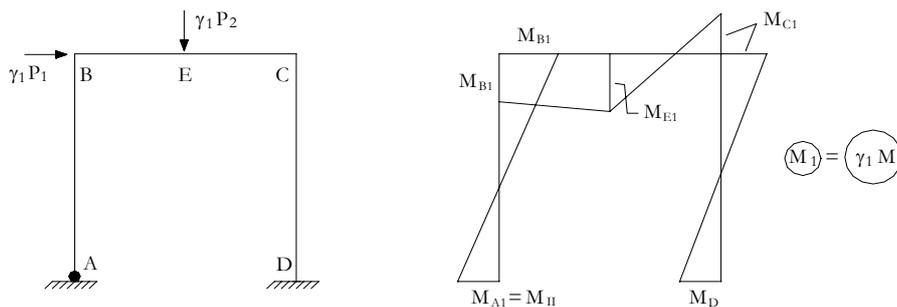


Figura 4.76:

– Acréscimo de carga $\Delta\gamma P$. Solução elástica.

Resolve-se a estrutura que decorre do aparecimento da rótula no final do 1º passo, para $\Delta\gamma = 1$, obtendo-se o diagrama de momentos fletores ΔM_1

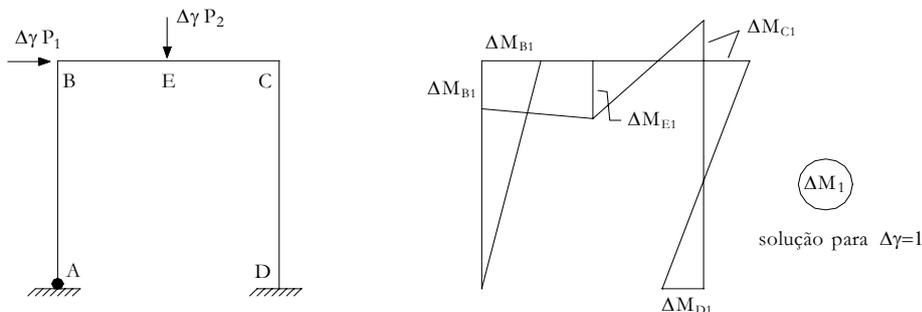


Figura 4.77:

• 2º passo

– Determinação de $\Delta\gamma_1$ tal que ocorra uma segunda rótula na estrutura. Esta condição é escrita para todas as seções onde ocorreram picos de momentos. Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
 \text{rótula em } B & \quad M_{B2} = M_{B1} + \Delta\gamma_1 \Delta M_{B1} = M_{II} \rightarrow \Delta\gamma_1 = a_1 \\
 \text{rótula em } C & \quad M_{C2} = M_{C1} + \Delta\gamma_1 \Delta M_{C1} = M_{II} \rightarrow \Delta\gamma_1 = a_2 \\
 \text{rótula em } D & \quad M_{D2} = M_{D1} + \Delta\gamma_1 \Delta M_{D1} = M_{II} \rightarrow \Delta\gamma_1 = a_3 \\
 \text{rótula em } E & \quad M_{E2} = M_{E1} + \Delta\gamma_1 \Delta M_{E1} = M_{II} \rightarrow \Delta\gamma_1 = a_4.
 \end{aligned}$$

O valor de $\Delta\gamma_1$ será, obviamente, o menor dentre aqueles determinados pela condição acima imposta. Suponha-se que a segunda rótula ocorra em D ($\Delta\gamma_1 = a_3$).

– Esquema e diagrama no final deste passo

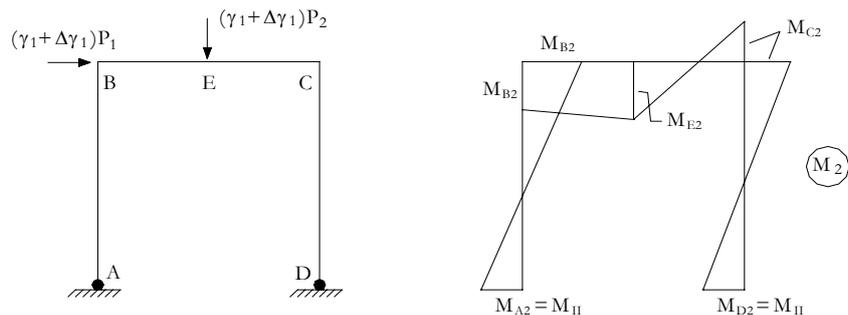


Figura 4.78:

Por superposição de efeitos os valores de momento do diagrama M_2 são:

$$M_2 = M_1 + \Delta\gamma_1 \Delta M_1$$

onde

$$\begin{aligned} M_1 &= \gamma_1 M \\ \Delta\gamma_1 &= a_3. \end{aligned}$$

O multiplicador do carregamento no final deste passo fica:

$$\gamma_1 + \Delta\gamma_1$$

– Acréscimo de carga $\Delta\gamma P$ sobre a carga final deste passo

Resolve-se a estrutura que decorreu do final deste passo, para $\Delta\gamma = 1$, obtendo-se o diagrama de momentos ΔM_2 .

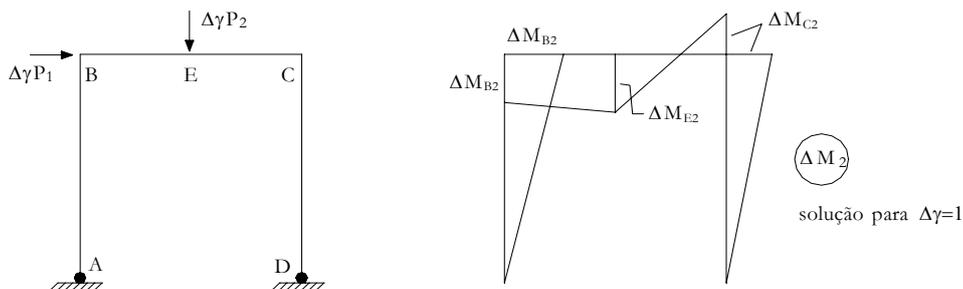


Figura 4.79:

• 3º passo

– Determinação de $\Delta\gamma_2$ tal que ocorra uma terceira rótula na estrutura. Esta condição é escrita para todas as seções onde ocorrem picos de momentos. Assim, tem-se

$$\begin{aligned} \text{rótula em } B & \quad M_{B3} = M_{B2} + \Delta\gamma_2 \Delta M_{B2} = M_{II} \rightarrow \Delta\gamma_2 = b_1 \\ \text{rótula em } C & \quad M_{C3} = M_{C2} + \Delta\gamma_2 \Delta M_{C2} = M_{II} \rightarrow \Delta\gamma_2 = b_2 \\ \text{rótula em } E & \quad M_{E3} = M_{E2} + \Delta\gamma_2 \Delta M_{E2} = M_{II} \rightarrow \Delta\gamma_2 = b_3. \end{aligned}$$

O valor de $\Delta\gamma_2$ será, obviamente, o menor dentre aqueles determinados pela condição acima imposta. Suponha-se que a terceira rótula ocorra em B ($\Delta\gamma_2 = b_1$).

– Esquema e diagrama no final deste passo

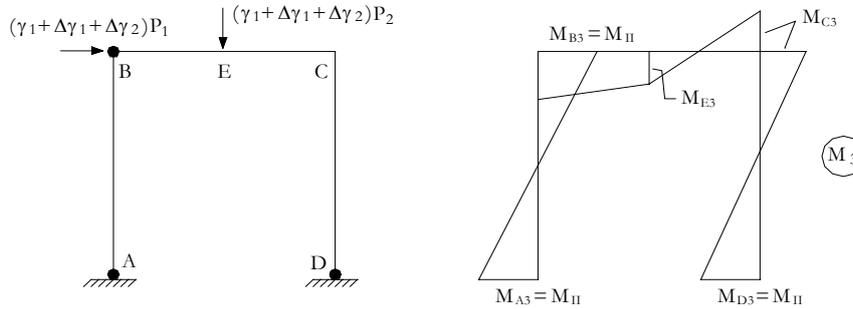


Figura 4.80:

Por superposição, os valores de momentos do diagrama M_3 são:

$$M_3 = M_2 + \Delta\gamma_2 \Delta M_2$$

onde

$$\Delta\gamma_2 = b_1.$$

O multiplicador do carregamento no final deste passo fica:

$$\gamma_1 + \Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2$$

– Acréscimo de carga $\Delta\gamma P$ sobre a carga final deste passo

Resolve-se a estrutura que decorreu do final deste passo, para $\Delta\gamma = 1$, obtendo-se o diagrama de momentos ΔM_3 .

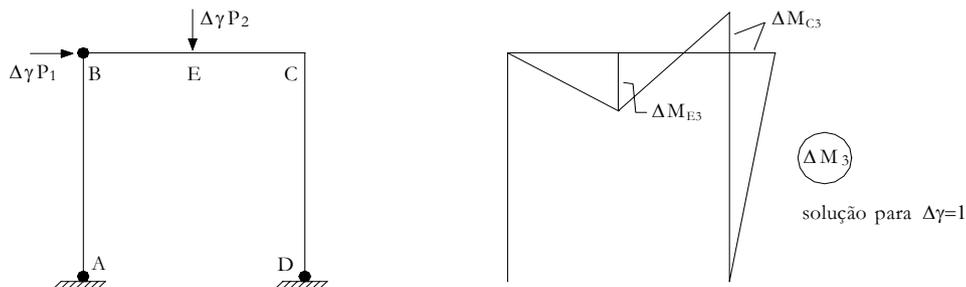


Figura 4.81:

• 4º passo

– Determinação de $\Delta\gamma_3$ tal que ocorra uma quarta rótula na estrutura. Esta condição pode ser assim escrita

$$\text{rótula em } C \quad M_{C4} = M_{C3} + \Delta\gamma_3 \Delta M_{C3} = M_{II} \rightarrow \Delta\gamma_3 = c_1$$

$$\text{rótula em } E \quad M_{E4} = M_{E3} + \Delta\gamma_3 \Delta M_{E3} = M_{II} \rightarrow \Delta\gamma_3 = c_2.$$

O valor de $\Delta\gamma_3$ será, obviamente, o menor dentre aqueles determinados pela condição acima imposta. Suponha-se que a quarta rótula ocorra em C ($\Delta\gamma_3 = c_1$).

– Esquema e diagrama no final deste passo

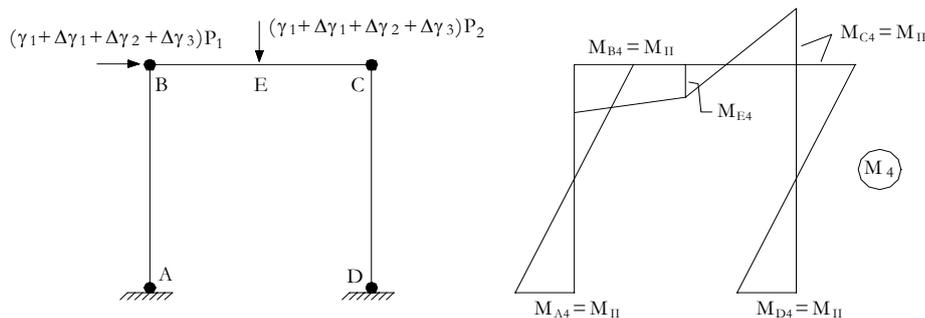


Figura 4.82:

Por superposição, os valores de momentos do diagrama M_4 são:

$$M_4 = M_3 + \Delta\gamma_3 \Delta M_3$$

onde

$$\Delta\gamma_3 = c_1.$$

O multiplicador do carregamento no final deste passo fica:

$$\gamma_1 + \Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2 + \Delta\gamma_3.$$

Porém a configuração atingida no final deste passo é de ruína. Assim, tem-se

$$\gamma_{II} = \gamma_1 + \Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2 + \Delta\gamma_3.$$

A seguir são apresentados alguns exemplos numéricos de aplicação da sistematização do Método Passo a Passo.

Exemplo numérico 1 Dada a estrutura da Figura 4.83, determinar o multiplicador γ_{II} do carregamento externo nela indicado que determine o seu Segundo Limite. É dado o momento de plastificação da seção transversal, constante para todas as barras, e igual a $M_{II} = 200 \text{ kNm}$.

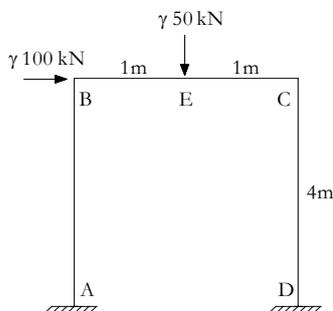


Figura 4.83:

- Solução elástica para $\gamma = 1$

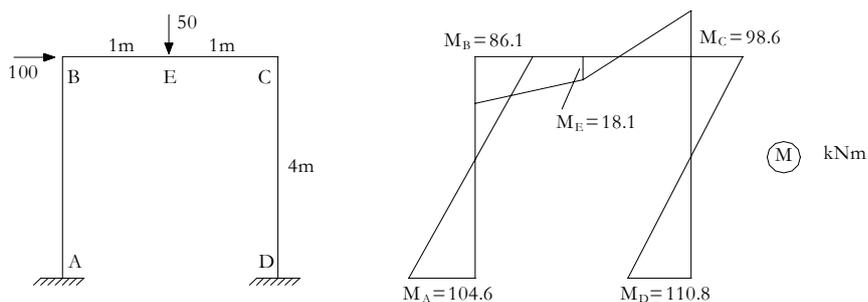


Figura 4.84:

- 1º passo

- Determinação de γ_1 (primeira rótula)

Como o momento de plastificação M_{II} é constante para toda a estrutura, a primeira rótula irá ocorrer na seção mais solicitada ($M_D = 110,8 \text{ kNm}$). A condição de plastificação da seção D fica:

$$\begin{aligned} \gamma_1 M_D &= M_{II} \Rightarrow 110,8 \gamma_1 = 200 \\ \therefore \gamma_1 &= 1,805 \end{aligned}$$

- Esquema e diagrama (final do 1º passo)

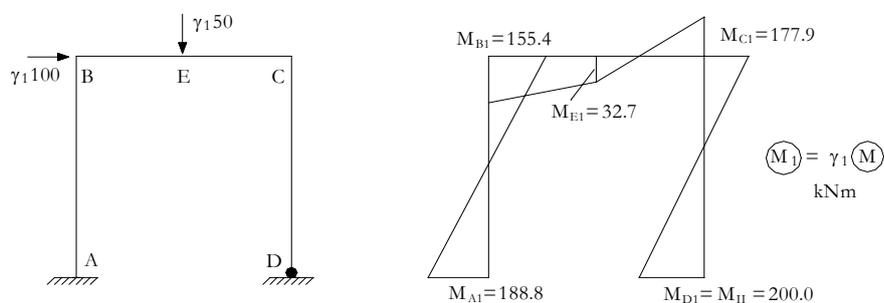


Figura 4.85:

- Acréscimo de carga $\Delta\gamma$. Solução elástica para $\Delta\gamma = 1$

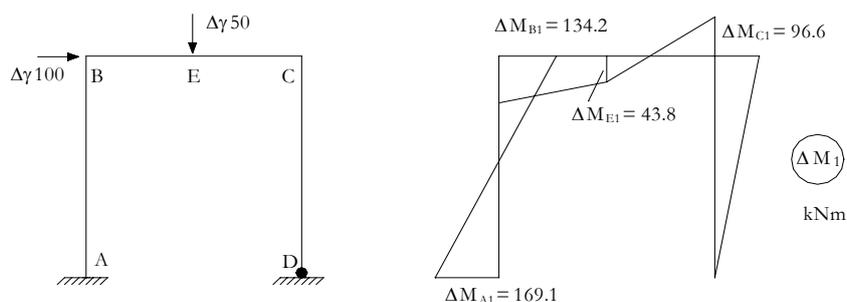


Figura 4.86:

- 2º passo

- Determinação de $\Delta\gamma_1$ (segunda rótula)

Condição para ocorrer a segunda rótula:

$$M_2 = M_1 + \Delta\gamma_1 \Delta M_1 = M_{II}$$

seção A	$M_{A2} = 188,8 + \Delta\gamma_1 169,1 = 200$	$\therefore \Delta\gamma_1 = 0,066$
seção B	$M_{B2} = 155,4 + \Delta\gamma_1 134,2 = 200$	$\therefore \Delta\gamma_1 = 0,332$
seção E	$M_{E2} = 32,7 + \Delta\gamma_1 43,8 = 200$	$\therefore \Delta\gamma_1 = 3,819$
seção C	$M_{C2} = 177,9 + \Delta\gamma_1 96,6 = 200$	$\therefore \Delta\gamma_1 = 0,228$

A segunda rótula ocorre em A, logo $\Delta\gamma_1 = 0,066$.

- Esquema e diagrama (final do 2º passo)

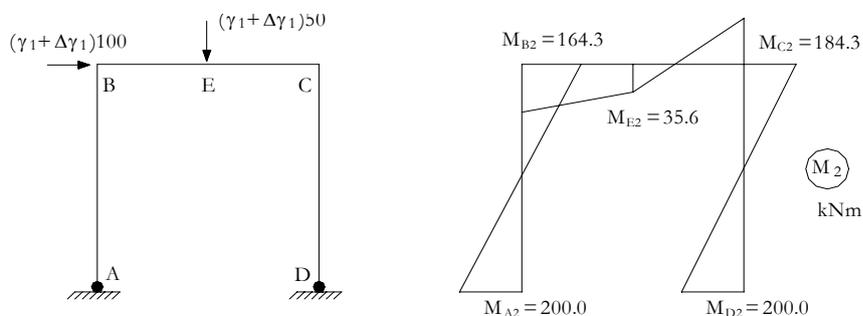


Figura 4.87:

- Acréscimo de carga $\Delta\gamma$. Solução elástica para $\Delta\gamma = 1$

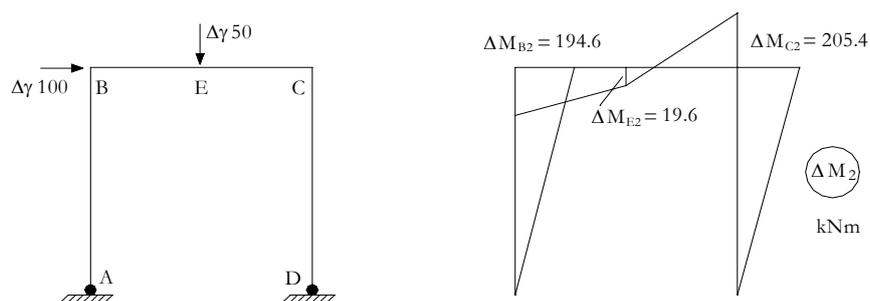


Figura 4.88:

- 3º passo

- Determinação de $\Delta\gamma_2$ (terceira rótula)

Condição para ocorrer a terceira rótula:

$$M_3 = M_2 + \Delta\gamma_2 \Delta M_2 = M_{II}$$

$$\begin{aligned}
 \text{seção } B \quad M_{B3} &= 164,3 + \Delta\gamma_2 194,6 = 200 \quad \therefore \Delta\gamma_2 = 0,183 \\
 \text{seção } E \quad M_{E3} &= 35,6 + \Delta\gamma_2 19,6 = 200 \quad \therefore \Delta\gamma_2 = 8,388 \\
 \text{seção } C \quad M_{C3} &= 184,3 + \Delta\gamma_1 205,4 = 200 \quad \therefore \Delta\gamma_2 = 0,076.
 \end{aligned}$$

A terceira rótula ocorre em C , logo $\Delta\gamma_2 = 0,076$.

– Esquema e diagrama (final do 3º passo)

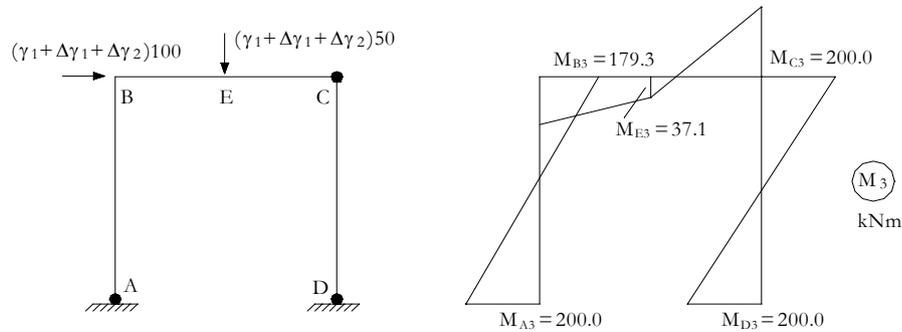


Figura 4.89:

– Acréscimo de carga $\Delta\gamma$. Solução elástica para $\Delta\gamma = 1$

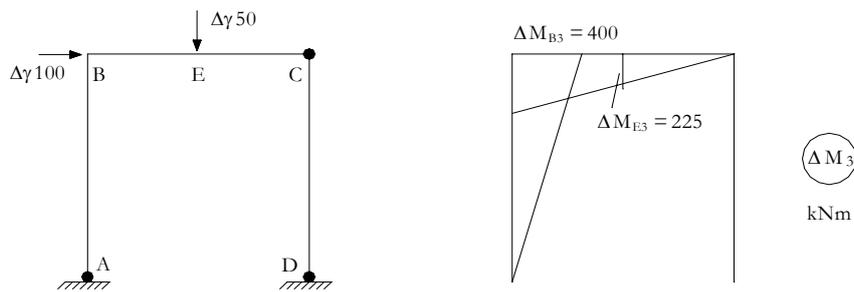


Figura 4.90:

• 4º passo

– Determinação de $\Delta\gamma_3$ (quarta rótula)

Condição para ocorrer a quarta rótula:

$$M_4 = M_3 + \Delta\gamma_3 \Delta M_3 = M_{II}$$

$$\begin{aligned}
 \text{seção } B \quad M_{B4} &= 179,1 + \Delta\gamma_3 400 = 200 \quad \therefore \Delta\gamma_3 = 0,052 \\
 \text{seção } E \quad M_{E4} &= 37,1 + \Delta\gamma_3 225 = 200 \quad \therefore \Delta\gamma_3 = 0,724.
 \end{aligned}$$

A quarta rótula ocorre em B , logo $\Delta\gamma_3 = 0,052$.

– Esquema e diagrama (final do 4º passo)

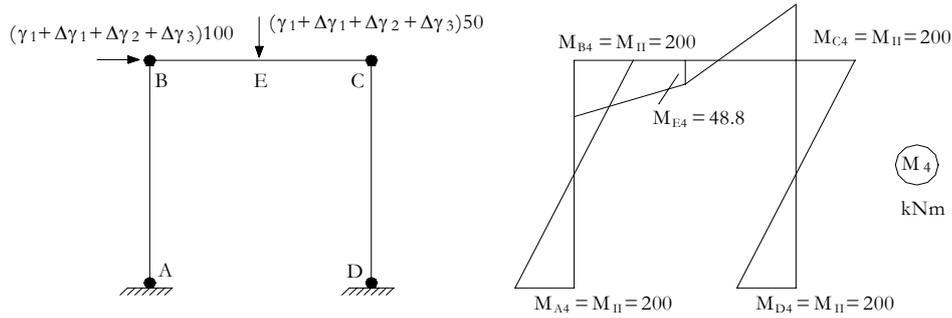


Figura 4.91:

A configuração acima é de ruína, portanto tem-se

$$\begin{aligned}\gamma_{II} &= \gamma_1 + \Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2 + \Delta\gamma_3 \\ \gamma_{II} &= 1,805 + 0,066 + 0,076 + 0,052 \\ \therefore \gamma_{II} &= 2,0\end{aligned}$$

Exemplo numérico 2 Determinar o multiplicador γ do carregamento aplicado à estrutura da Figura 4.92, que leve à ruína.

Dado: momento de plastificação constante para todas as barras.

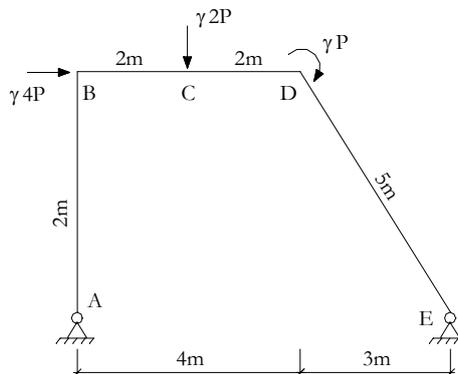


Figura 4.92:

• Método Passo a Passo

– Solução elástica para $\gamma = 1$

* Resolução da estrutura hiperestática

$$\begin{aligned}H_A &= 4P \\ V_E &= 2P + V_A \\ 7V_E &= P + 2P \times 2 + 4P \times 4\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}V_E &= 3P \\ V_A &= P\end{aligned}$$

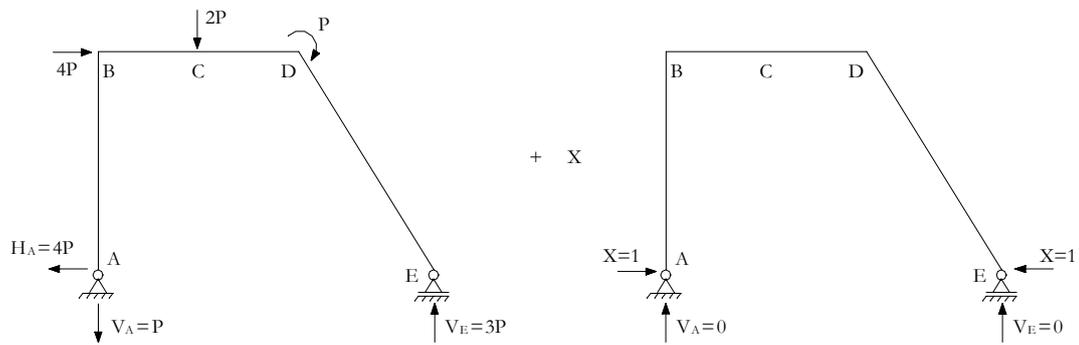


Figura 4.93:

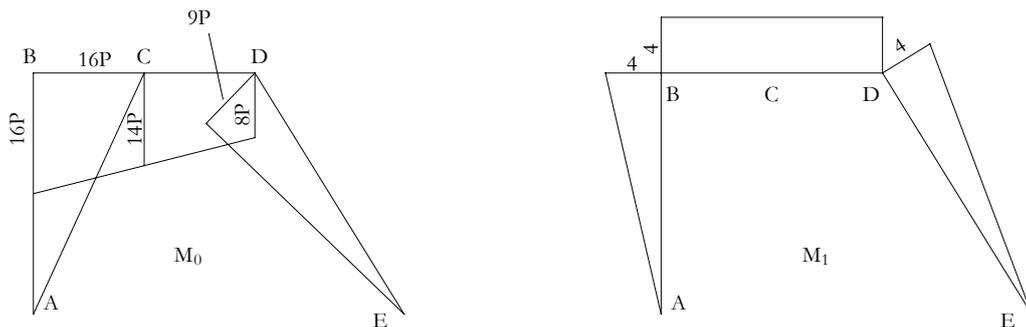


Figura 4.94:

$$\begin{aligned}
 \int_{estr} M_0 M_1 dx &= -\frac{4}{6} [16P \times 4 \times 2] - \frac{2}{6} [16P (2 \times 4 + 4)] + \\
 &\quad -\frac{2}{6} [14P (2 \times 4 + 4) + 14P (2 \times 4 + 4)] + \\
 &\quad -\frac{2}{6} [8P (2 \times 4 + 4)] - \frac{5}{6} [9P \times 4 \times 2] \\
 &= -353,33P \\
 \int_{estr} M_1 M_1 dx &= \frac{4}{6} [4 \times 2 \times 4] + 64 + \frac{5}{6} [4 \times 2 \times 4] \\
 &= 112 \\
 \therefore X &= 3,15476P
 \end{aligned}$$

* Diagrama³ final da solução elástica ($\gamma = 1$)

$$\begin{aligned}
 M_B &= 3,38095P \\
 M_C &= 1,38095P \\
 M_{DC} &= -4,61905P \\
 M_{DE} &= -3,61905P
 \end{aligned}$$

³+ tração interna
- tração externa

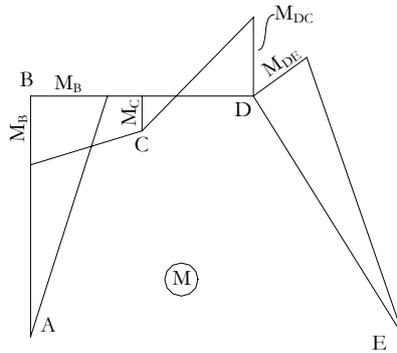


Figura 4.95:

– 1º passo

* Determinação de γ_1 (primeira rótula)

$$\begin{aligned} |M_{máx}| &= M_{DC} \\ 4,61905P\gamma_1 &= M_{II} \\ \therefore \gamma_1 &= 0,216495 \frac{M_{II}}{P} \end{aligned}$$

* Esquema e diagrama no final do 1º passo

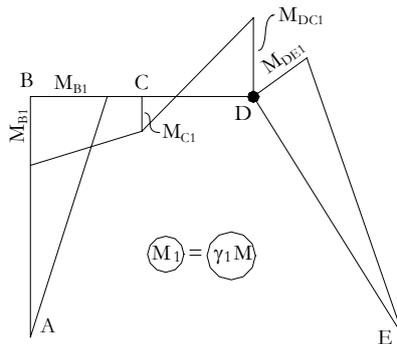


Figura 4.96:

$$\begin{aligned} M_{B1} &= 0,73196M_{II} \\ M_{C1} &= 0,29897M_{II} \\ M_{DC1} &= -M_{II} \\ M_{DE1} &= -0,78351M_{II} \end{aligned}$$

* Acréscimo de carga $\Delta\gamma$. Solução elástica.

$$\begin{aligned} V_A + 2\Delta\gamma P &= V_E \\ H_A + H_E &= 4\Delta\gamma P \\ 7V_E &= \Delta\gamma P + 4\Delta\gamma P + 16\Delta\gamma P \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} V_E &= 3\Delta\gamma P \\ V_A &= \Delta\gamma P \end{aligned}$$

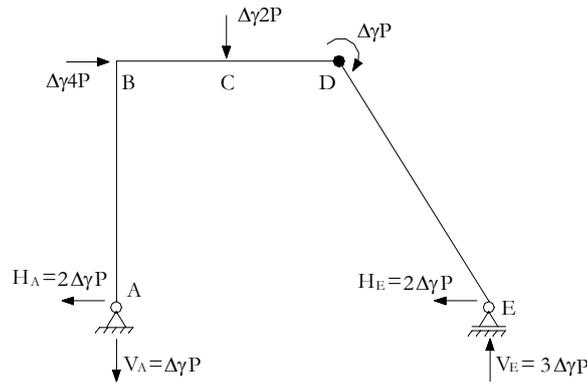


Figura 4.97:

$$3\Delta\gamma P \times 3 - 4H_E - \Delta\gamma P = 0$$

portanto,

$$H_E = 2\Delta\gamma P = H_A$$

· Solução ΔM_1 (para $\Delta\gamma = 1$)

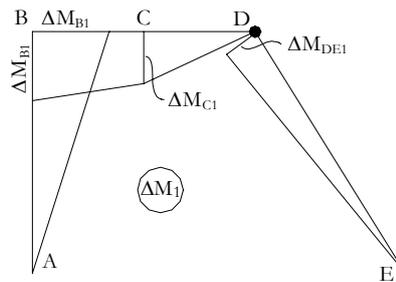


Figura 4.98:

$$\begin{aligned}\Delta M_{B1} &= 8P \\ \Delta M_{C1} &= 6P \\ \Delta M_{DE1} &= P\end{aligned}$$

– 2º passo

* Determinação de $\Delta\gamma_1$ (segunda rótula)

$$M_2 = M_1 + \Delta\gamma_1 \Delta M_1 = M_{II}$$

logo,

$$M_{B2} = 0,73196M_{II} + 8\Delta\gamma_1 P = M_{II} \quad \therefore \Delta\gamma_1 = 0,033505 \frac{M_{II}}{P}$$

$$M_{C2} = 0,29897M_{II} + 6\Delta\gamma_1 P = M_{II} \quad \therefore \Delta\gamma_1 = 0,11684 \frac{M_{II}}{P}$$

$$M_{E2} = 0,78351M_{II} + \Delta\gamma_1 P = M_{II} \quad \therefore \Delta\gamma_1 = 1,78351 \frac{M_{II}}{P}$$

portanto, a segunda rótula ocorre em B, com $\Delta\gamma_1 = 0,033505 \frac{M_{II}}{P}$

* Esquema e diagrama no final do 2º passo

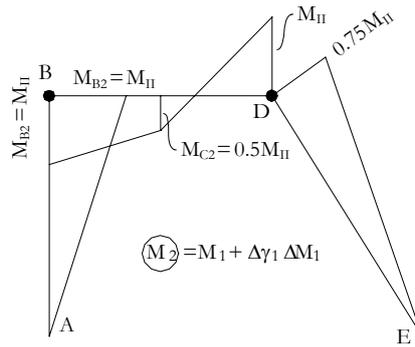


Figura 4.99:

$$\begin{aligned}
 M_{B2} &= M_{II} \\
 M_{C2} &= 0,5M_{II} < M_{II} \\
 M_{DC2} &= -M_{II} \\
 M_{DE2} &= -0,75M_{II} > -M_{II}.
 \end{aligned}$$

A configuração é de ruína, logo

$$\begin{aligned}
 \gamma_{II} &= \gamma_1 + \Delta\gamma_1 = 0,216495 \frac{M_{II}}{P} + 0,033505 \frac{M_{II}}{P} \\
 \therefore \gamma_{II} &= 0,25 \frac{M_{II}}{P}.
 \end{aligned}$$

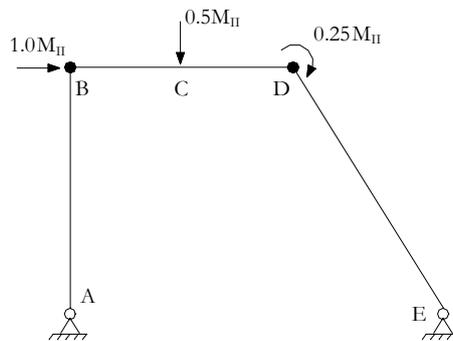


Figura 4.100:

4.5.2 Teorema Estático

Neste item se fará a conceituação do método de cálculo baseado no Teorema Estático para o estudo da análise limite de estruturas, através de um exemplo simples.

Seja a viga hiperestática simples submetida ao carregamento fixo indicado na Figura 4.101. Seja M_{II} o momento de plastificação da sua seção transversal.

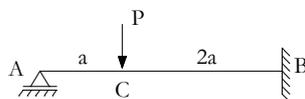


Figura 4.101:

- Questão 1: Determinar o multiplicador γ_e do carregamento indicado que provoque em C um momento tal que $M_C = M_{II}$. (Figura 4.102)

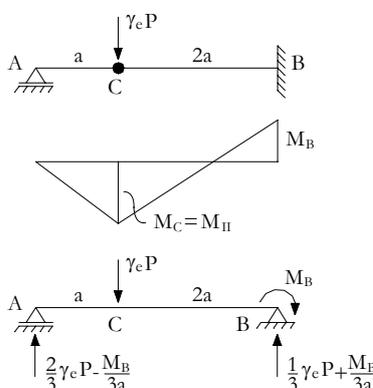


Figura 4.102:

A imposição das condições de equilíbrio estático à estrutura para a situação imposta ao problema permite escrever:

$$M_C = M_{II} = \frac{2}{3}\gamma_e P a - \frac{M_B}{3}$$

$$\therefore \gamma_e = \frac{3M_{II} + M_B}{2Pa} \quad (4.26)$$

Notar que a ocorrência de rótula em C por plastificação da seção transversal não é configuração de ruína para esta estrutura.

- Questão 2: Determinar o multiplicador γ_{II} do carregamento indicado que caracterize ruína da estrutura.

Para esta estrutura é fácil perceber que a configuração de ruína corresponderá ao aparecimento de rótulas plásticas nas seções C e B , que são seções de picos de momento.

Desta forma a imposição das condições de equilíbrio estático para a condição de $M_C = M_{II}$ e $M_B = M_{II}$ fica (Figura 4.103)

$$M_C = M_{II} = \frac{2}{3}\gamma_{II} P a - \frac{M_{II}}{3}$$

$$\therefore \gamma_{II} = \frac{2M_{II}}{Pa} \quad (4.27)$$

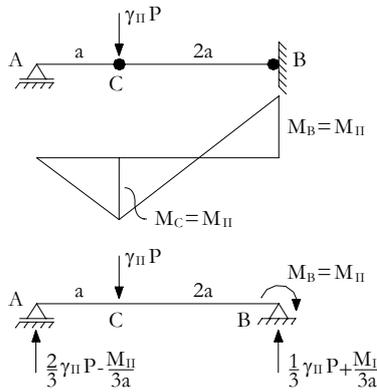


Figura 4.103:

- Questão 3: Determinar o multiplicador γ_e do carregamento indicado que provoque o aparecimento de rótulas nas seções B e D, ou seja, que caracterize uma configuração de ruína com rótulas em B e D. Nesta situação verificar o momento em C. (Figura 4.104)

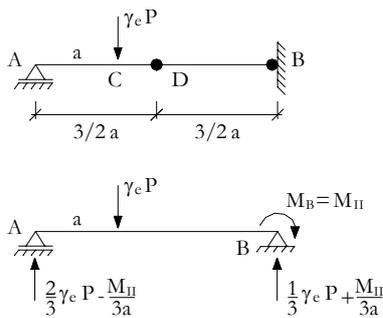


Figura 4.104:

A condição de equilíbrio estático permite escrever

$$\begin{aligned}
 M_D &= M_{II} = \frac{\gamma_e P}{3} \frac{3}{2} a + \frac{M_{II}}{3a} \frac{3}{2} a - M_{II} \\
 \therefore 2M_{II} &= \frac{\gamma_e P a}{2} + \frac{M_{II}}{2} \\
 \therefore \gamma_e &= \frac{3M_{II}}{Pa} \tag{4.28}
 \end{aligned}$$

O momento em C se escreve:

$$M_C = \frac{2}{3} \gamma_e P a - \frac{M_{II}}{3}$$

Portanto para $\gamma_e = \frac{3M_{II}}{Pa}$ tem-se:

$$M_C = \frac{5}{3} M_{II} > M_{II} \tag{4.29}$$

o que é impossível e caracteriza uma violação da condição de plastificação, pois não se pode ter em nenhuma seção momentos superiores ao momento de plastificação.

Desta forma a configuração com rótulas em B e D não é a configuração real de ruína, pois o critério de plastificação fica invalidado na seção C . Notar que neste caso

$$\gamma_e = \frac{3M_{II}}{Pa} > \gamma_{II} = \frac{2M_{II}}{Pa}$$

Analisando-se a questão 1 pode-se observar que:

- A configuração com rótula em C não é de ruína, enquanto M_B for menor que M_{II} ;
- Para $M_B = M_{II}$ (rótula em B) o multiplicador γ_e da expressão (4.26) fica:

$$\gamma_e = \frac{2M_{II}}{Pa}$$

que é igual ao multiplicador que caracteriza o Segundo Limite da viga, ou seja, γ_{II} ;

- Para valores de $M_B < M_{II}$ a configuração não é de ruína e decorre da equação (4.26) que:

$$\gamma_e < \gamma_{II}$$

Em resumo pode-se concluir da questão 1 que a imposição das condições de equilíbrio estático para uma dada configuração que não caracterize uma configuração de ruína, conduz a um multiplicador γ_e do carregamento tal que:

$$\gamma_e > \gamma_{II}$$

onde γ_{II} é o multiplicador que define o Segundo Limite da estrutura ou a configuração real de ruína.

Da questão 3 pode-se concluir que para configurações de ruína que não corresponda à configuração real, a imposição das condições de equilíbrio estático conduz a um multiplicador γ_e do carregamento tal que:

$$\gamma_e > \gamma_{II}$$

e em alguma seção da estrutura o critério de plastificação fica invalidado ($M > M_{II}$).

A partir das conclusões acima observadas, pode-se enunciar o Teorema Estático:

“Seja uma estrutura submetida a um dado carregamento fixo. Se γ_e é um multiplicador deste carregamento tal que corresponde a uma distribuição de esforços que satisfaça as condições de equilíbrio estático e não viole as condições de plastificação, então tem-se:

$$\gamma_e \leq \gamma_{II}$$

onde γ_{II} é o multiplicador que caracteriza o Segundo Limite da estrutura, ou o que é o mesmo, que define a configuração real de ruína.”

Pode-se, portanto, ainda concluir do Teorema Estático que qualquer configuração de ruína possível que não corresponda à configuração real de Segundo Limite da estrutura leva a um multiplicador $\gamma_e > \gamma_{II}$ e a uma distribuição de esforços que viola a condição de plastificação.

O Teorema Estático pode ser aplicado no sentido de verificação se uma dada configuração de ruína é real ou não. Ela será real se existir um multiplicador γ_e que satisfaça às condições de equilíbrio estático e não invalide a condição de plastificação. Na hipótese desta configuração de ruína não ser a real, pode-se concluir pelo Teorema Estático que o multiplicador γ_e desta configuração é maior que o multiplicador γ_{II} da configuração de ruína real e que a distribuição de esforços viola a condição de plastificação em alguma seção da estrutura ($M > M_{II}$).

A seguir se apresentarão alguns exemplos de verificação de configurações de ruína aplicando as condições de equilíbrio estático.

Exemplo 1 Determinar aplicando o Teorema Estático, o multiplicador γ_{II} que define o Segundo Limite da viga da Figura 4.105. É dado M_{II} o momento de plastificação da sua seção transversal.

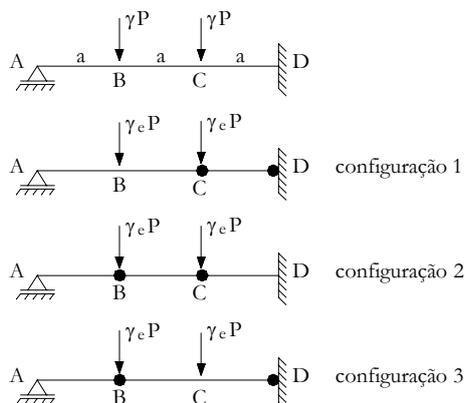


Figura 4.105:

Solução:

A Figura 4.105 indica as possíveis configurações de ruína para a viga.

- Configuração 1

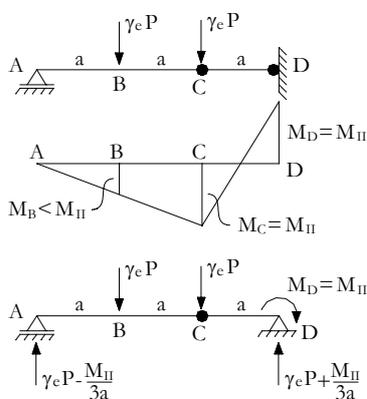


Figura 4.106:

Da Figura 4.106 tem-se:

$$\begin{aligned}
 M_C &= M_{II} = \gamma_e P a + \frac{M_{II}}{3} - M_{II} \\
 \therefore 2M_{II} - \frac{M_{II}}{3} &= \gamma_e P a \\
 \therefore \gamma_e &= \frac{5M_{II}}{3Pa}
 \end{aligned}$$

Verificação do momento em M_B .

$$M_B = \gamma_e P a - \frac{M_{II}}{3}$$

para $\gamma_e = \frac{5M_{II}}{3Pa}$ vem

$$M_B = \frac{5M_{II}}{3} - \frac{M_{II}}{3} = \frac{4M_{II}}{3} > M_{II}$$

ou seja esta configuração não é real pois invalida a condição de plastificação na seção B ($M_B > M_{II}$).

- Configuração 2

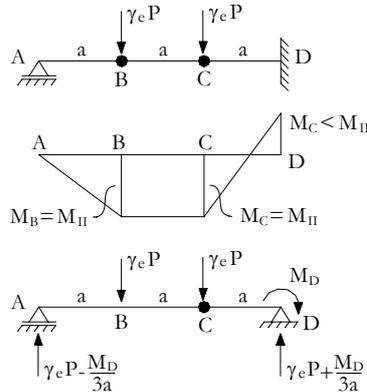


Figura 4.107:

Da Figura 4.107 tem-se:

$$M_B = M_{II} = \gamma_e Pa - \frac{M_D}{3} \quad (4.30)$$

$$M_C = M_{II} = \gamma_e Pa + \frac{M_D}{3} - M_D$$

$$\text{ou } M_C = M_{II} = \gamma_e Pa - \frac{2M_D}{3} \quad (4.31)$$

De (4.30) e (4.31) vem

$$\begin{aligned} M_{II} &= \gamma_e Pa \quad \therefore \gamma_e = \frac{M_{II}}{Pa} \\ M_D &= 0 \end{aligned}$$

Com a condição encontrada de $M_D = 0$, caracteriza uma solução equilibrada, porém não compatível com a condição de vinculação externa da estrutura. Essa configuração não é real.

- Configuração 3

Da Figura 4.108 tem-se:

$$M_B = M_{II} = \gamma_e Pa - \frac{M_{II}}{3}$$

$$\therefore \frac{4M_{II}}{3} = \gamma_e Pa$$

$$\therefore \gamma_e = \frac{4M_{II}}{3Pa}$$

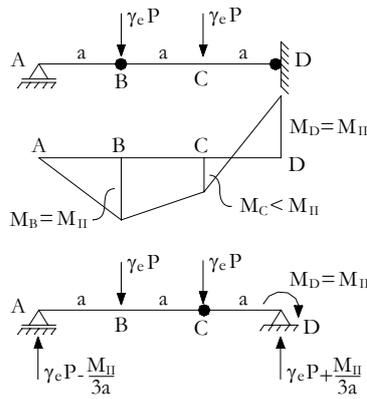


Figura 4.108:

Verificação do momento em M_C .

$$M_C = \gamma_e P a + \frac{M_{II}}{3} - M_{II}$$

$$M_C = \gamma_e P a - \frac{2M_{II}}{3} \quad \left(\gamma_e = \frac{4M_{II}}{3Pa} \right)$$

$$M_C = \frac{4M_{II}}{3Pa} - \frac{2M_{II}}{3} = \frac{2M_{II}}{3} < M_{II}$$

ou seja esta configuração é real pois não invalida a condição de plastificação.
Portanto

$$\gamma_{II} = \frac{4M_{II}}{3Pa}$$

Observe-se que γ_{II} é menor que o multiplicador da configuração 1 onde o critério de plastificação foi invalidado.

O multiplicador da configuração 2, embora seja menor que γ_{II} , não leva a uma distribuição equilibrada de esforços que representa a estrutura proposta ($M_D = 0$).

Exemplo 2 Mostrar pelo Teorema Estático que a configuração de ruína do pórtico da Figura 4.109 é real e determinar o valor de γ_{II} . Dado: $M_{II} = 200 \text{ kNm}$.

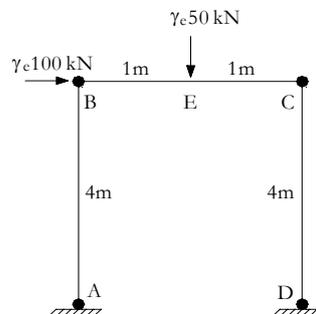


Figura 4.109:

Solução:

Para a configuração indicada na Figura 4.110, isolando-se as barras e nós tem-se:

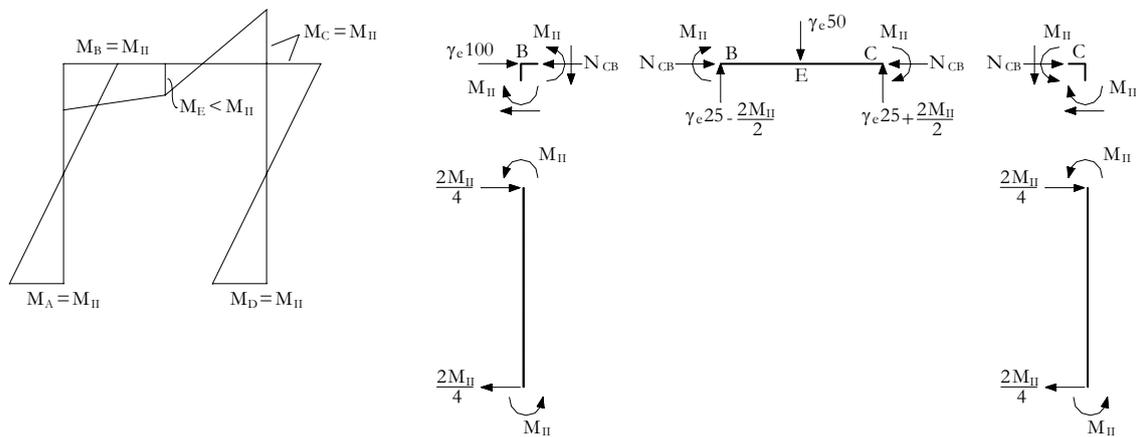


Figura 4.110:

Equilíbrio do nó C.

$$N_{CB} = \frac{2M_{II}}{4} = \frac{M_{II}}{2}$$

Equilíbrio do nó D.

$$\begin{aligned} \gamma_e 100 &= N_{CB} + \frac{2M_{II}}{4} = \frac{M_{II}}{2} + \frac{M_{II}}{2} = M_{II} \\ \therefore \gamma_e &= \frac{M_{II}}{100} = \frac{200}{100} = 2,0 \end{aligned}$$

Verificação do momento E.

$$M_E = \gamma_e 25 - M_{II} + M_{II} = 2 \times 25 = 100 < M_{II} = 200$$

ou seja, não invalida o critério de plastificação.

Assim $\gamma_{II} = \gamma_e = 2,0$, observar que este problema foi resolvido pelo Método Passo a Passo obtendo evidentemente $\gamma_{II} = 2,0$.

Exemplo 3 Mostrar pelo Teorema Estático que a configuração de ruína para o pórtico da Figura 4.111 não é real. Dado: $M_{II} = 200 \text{ kNm}$.

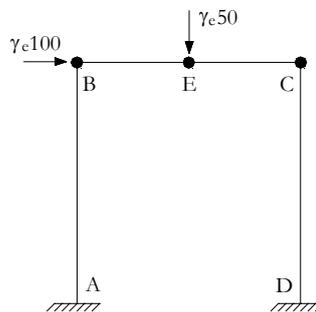


Figura 4.111:

$$\begin{aligned} M_E &= M_{II} = \gamma_e 25 \times 1 - M_{II} \\ \therefore \gamma_e &= \frac{2M_{II}}{25} = \frac{400}{25} = 16 \end{aligned}$$

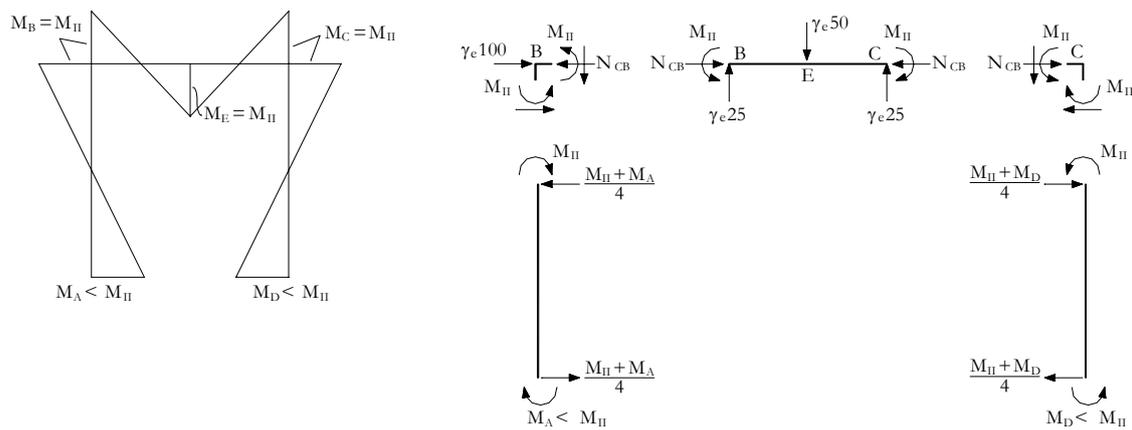


Figura 4.112:

Equilíbrio do nó C.

$$N_{CB} = \frac{M_{II} + M_D}{4}$$

Equilíbrio do nó B.

$$N_{CB} = \gamma_e 100 + \frac{M_{II} + M_A}{4}$$

$$\gamma_e 100 = \frac{M_{II} + M_D}{4} - \frac{M_{II} + M_A}{4}$$

$$\gamma_e 100 = \frac{M_D - M_A}{4}$$

$$16 \times 100 \times 4 = M_D - M_A$$

$$M_D - M_A = 6400$$

relação esta que invalida a condição de plastificação ($M_D < 200$, $M_A < 200$). Portanto esta configuração não é real, notar que $\gamma_e = 16 \gg \gamma_{II} = 16$.

4.5.3 Teorema Cinemático

Neste item se fará a conceituação do método de cálculo com base no Teorema Cinemático para a Análise Limite das estruturas, a partir do mesmo exemplo empregado no item 4.5.2.

- Questão 1: Para a viga da Figura 4.113a, determinar o multiplicador γ_c , do carregamento indicado, que leva à configuração de ruína nela indicada. Impor a condição de equilíbrio decorrente deste mecanismo a partir da igualdade dos trabalhos interno e externo realizados durante o colapso.

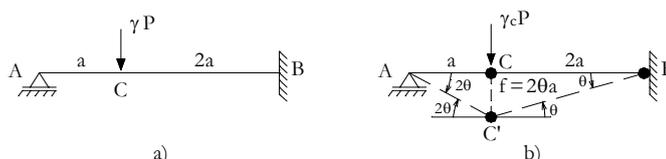


Figura 4.113:

A Figura 4.113b mostra a configuração deformada compatível com o mecanismo proposto para esta estrutura.

Para se escrever os trabalhos interno e externo realizados até se atingir a configuração deformada indicada na Figura 4.113b, serão feitas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- desprezam-se os deslocamentos ocorridos durante a fase de comportamento elástico da estrutura;
- como consequência da hipótese acima, despreza-se a energia de deformação elástica, em face da energia dissipada pelas rótulas plásticas;
- considera-se que os deslocamentos gerados pela configuração deformada associada ao mecanismo, sejam suficientemente pequenos; desta forma a determinação dos deslocamentos que decorrem das rotações das rótulas plásticas é feita de tal forma a considerar estas últimas muito pequenas ($\theta \cong tg\theta$).

Posto isto, pode-se escrever (Figura 4.113b)

$$\tau_{ext} = \gamma_c P f$$

ou

$$\tau_{ext} = \gamma_c P 2\theta a \quad (f = 2\theta a)$$

$$\tau_{int} = \tau_{intB} + \tau_{intC}$$

onde

τ_{intB} é o trabalho interno dissipado pela rótula B

τ_{intC} é o trabalho interno dissipado pela rótula C

Seja M_{II} o momento de plastificação das rótulas B e C. Assim, tem-se:

$$\tau_{intB} = M_{II}\theta \quad \tau_{intC} = M_{II}(\theta + 2\theta)$$

e ainda

$$\tau_{int} = M_{II}(\theta + \theta + 2\theta) = M_{II}4\theta$$

O equilíbrio é garantido por

$$\begin{aligned} \tau_{ext} &= \tau_{int} \\ \gamma_c P 2\theta a &= M_{II} 4\theta \quad \therefore \quad \gamma_c = \frac{2M_{II}}{Pa} \end{aligned}$$

Porém, como a configuração indicada na Figura 4.113b é de ruína, tem-se

$$\gamma_c = \gamma_{II} = \frac{2M_{II}}{Pa}$$

valor este que já foi obtido nos exemplos utilizando-se o Método Passo a Passo e o Teorema Estático.

- Questão 2: Para a mesma viga da questão 1, determinar o multiplicador γ_c do carregamento que leva à configuração de ruína indicada na Figura 4.114.

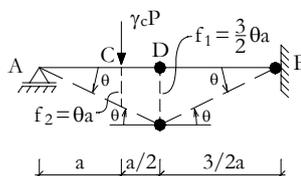


Figura 4.114:

Os trabalhos interno e externo realizados durante o colapso para a configuração indicada na Figura 4.114 podem ser escritos:

$$\begin{aligned} \tau_{ext} &= \gamma_c P f_1 = \gamma_c P \theta a \\ \tau_{int} &= M_{II} (\theta + 2\theta) = M_{II} 3\theta \\ \therefore \quad \gamma_c P \theta a &= M_{II} 3\theta \\ \therefore \quad \gamma_c &= \frac{3M_{II}}{Pa} \end{aligned}$$

É importante, analisando-se as duas questões, notar que:

- a configuração de ruína adotada para a questão 2 não é real;
- o multiplicador γ_c do carregamento obtido para esta configuração de ruína ($\gamma_c = \frac{3M_{II}}{Pa}$) é maior que $\gamma_{II} = \frac{2M_{II}}{Pa}$.

Posto isto, pode-se enunciar o Teorema Cinemático:

“Seja uma estrutura submetida a um dado carregamento fixo. Se γ_c é o multiplicador deste carregamento tal que corresponda a uma configuração de ruína e que respeite as condições de equilíbrio, então tem-se

$$\gamma_c \geq \gamma_{II}$$

onde γ_{II} é o multiplicador que caracteriza o Segundo Limite da estrutura, ou o que é o mesmo, define a configuração real de ruína.”

Deste teorema pode-se extrair uma metodologia extremamente eficiente para se calcular o multiplicador γ_{II} de Segundo Limite ou ruína da estrutura.

Esta metodologia consiste em se conceber, para uma dada estrutura submetida a um dado carregamento fixo, todas as prováveis configurações de ruína e determinar se para cada uma delas o multiplicador γ_c do carregamento que garante o seu equilíbrio, impondo-se a igualdade dos trabalhos interno e externo realizados durante o colapso. A configuração real de ruína será aquela que corresponder ao menor multiplicador γ_c ($\gamma_{II} = \min \gamma_c$).

Na Análise Limite das estruturas o procedimento mais eficiente para determinação de γ_{II} é a aplicação do Teorema Cinemático e posterior verificação da configuração que conduziu ao menor valor de γ_c , aplicando-se o Teorema Estático. Se esta verificação pelo Teorema Estático conduziu a uma configuração que não invalida em nenhuma seção o critério de plastificação, então ela será a configuração real. Caso contrário se deverá continuar pesquisando outras configurações possíveis utilizando-se o Teorema Cinemático, até se encontrar a configuração real e, portanto, o multiplicador γ_{II} de Segundo Limite da estrutura.

Segue abaixo alguns exemplos de aplicação do Teorema Cinemático na determinação da configuração real de ruína e de γ_{II} .

Exemplo 1 Determinar γ_{II} para a estrutura da Figura 4.115. Dado M_{II} momento de plastificação da seção transversal.

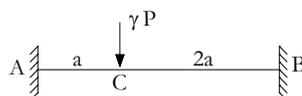


Figura 4.115:

Neste caso não há dúvida que a configuração real de ruína é a indicada na Figura 4.116. Desta forma, tem-se:

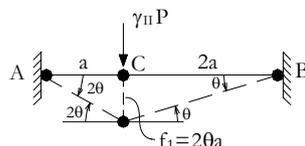


Figura 4.116:

$$\begin{aligned} \tau_{ext} &= \gamma_{II} P f_1 = \gamma_{II} P 2\theta a \\ \tau_{int} &= M_{II} (\theta + 2\theta + \theta + 2\theta) = M_{II} 6\theta \\ \therefore \gamma_{II} P 2\theta a &= M_{II} 6\theta \\ \therefore \gamma_{II} &= \frac{3M_{II}}{Pa} \end{aligned}$$

Qualquer outra configuração de ruína que não seja a real (Figura 4.116) conduz a um multiplicador $\gamma_c > \gamma_{II}$. Assim, admitindo-se a configuração indicada na Figura 4.117, tem-

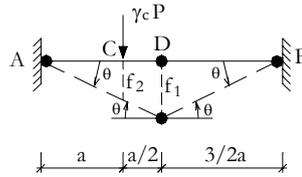


Figura 4.117:

se:

$$\begin{aligned} \tau_{ext} &= \gamma_c P f_2 = \gamma_c P \theta a \\ \tau_{int} &= M_{II} (\theta + 2\theta + \theta) = M_{II} 4\theta \\ \therefore \gamma_c P \theta a &= M_{II} 4\theta \\ \therefore \gamma_c &= \frac{4M_{II}}{Pa} > \gamma_{II} \end{aligned}$$

Exemplo 2 Determinar γ_{II} para a estrutura da Figura 4.118.

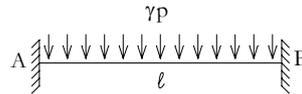


Figura 4.118:

A configuração real de ruína está indicada na Figura 4.119. Desta forma, tem-se:

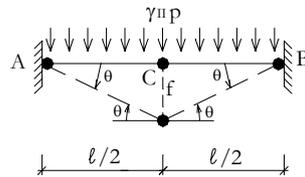


Figura 4.119:

$$\begin{aligned} \tau_{ext} &= \gamma_{II} p \frac{f\ell}{2} \\ \tau_{int} &= M_{II} (\theta + \theta + 2\theta) = M_{II} 4\theta \\ \therefore \gamma_{II} p \frac{f\ell}{2} &= M_{II} 4\theta \quad \left(f = \theta \frac{\ell}{2} \right) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \gamma_{II} p \theta \frac{\ell^2}{4} &= M_{II} 4\theta \\ \gamma_{II} &= \frac{16M_{II}}{P\ell^2} \end{aligned}$$

Exemplo 3 Determinar γ_{II} para a estrutura da Figura 4.120. Dado M_{II} momento de plastificação da seção transversal.

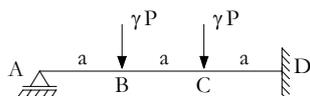


Figura 4.120:

A Figura 4.121 mostra as possíveis configurações de ruína para a estrutura.

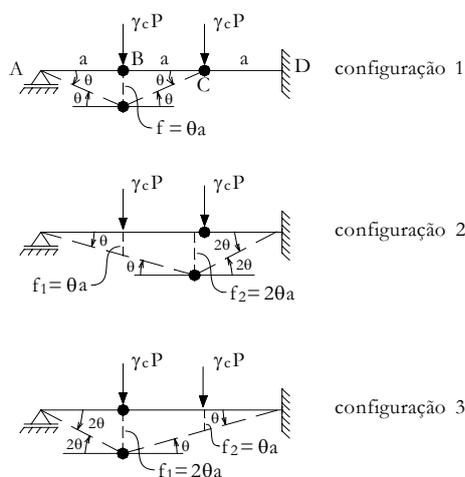


Figura 4.121:

- Configuração 1

$$\begin{aligned}\tau_{ext} &= \gamma_c P f \quad (f = \theta a) \\ \tau_{ext} &= \gamma_c P \theta a \\ \tau_{int} &= M_{II} 3\theta\end{aligned}$$

assim

$$\gamma_c P \theta a = M_{II} 3\theta \quad \therefore \quad \gamma_c = \frac{3M_{II}}{Pa}$$

- Configuração 2

$$\begin{aligned}\tau_{ext} &= \gamma_c P f_1 + \gamma_c P f_2 \\ \tau_{ext} &= \gamma_c P (\theta a + 2\theta a) = \gamma_c P 3\theta a \\ \tau_{int} &= M_{II} (2\theta + \theta + 2\theta) = M_{II} 5\theta\end{aligned}$$

assim

$$\gamma_c P 3\theta a = M_{II} 5\theta \quad \therefore \quad \gamma_c = \frac{5M_{II}}{3Pa}$$

- Configuração 3

$$\begin{aligned}\tau_{ext} &= \gamma_c P f_1 + \gamma_c P f_2 \\ \tau_{ext} &= \gamma_c P (2\theta a + \theta a) = \gamma_c P 3\theta a \\ \tau_{int} &= M_{II} (2\theta + \theta + \theta) = M_{II} 4\theta\end{aligned}$$

assim

$$\gamma_c P 3\theta a = M_{II} 4\theta \quad \therefore \quad \gamma_c = \frac{4M_{II}}{3Pa}$$

Analisando-se os valores de γ_c , vê-se que o menor multiplicador corresponde à configuração 3; como para esta estrutura não há possibilidade de nenhuma outra configuração de ruína além das três analisadas, então pode-se concluir que

$$\gamma_c = \frac{4M_{II}}{3Pa}$$

que é o multiplicador da configuração de ruína (configuração 3).

Caso houvesse dúvidas quanto à existência de outras configurações possíveis, deveria se proceder à verificação da configuração, pela aplicação do Teorema Estático. Esta verificação está feita no exemplo 1 do item 5.2.

Exemplo 4 Aplicar o Teorema Cinemático para a determinação da configuração de ruína do pórtico da Figura 4.122 e do correspondente multiplicador γ_{II} . Dado $M_{II} = 200 \text{ kNm}$, constante para toda a estrutura.

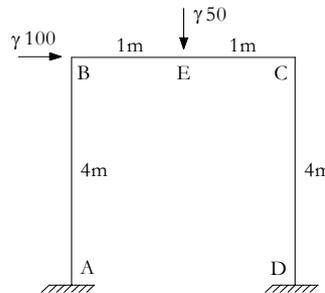


Figura 4.122:

Tendo em conta que as rótulas plásticas podem ocorrer em seções de picos de momento, as quais, neste caso, podem estar localizadas em A , B , E , C ou D , indica-se na Figura 4.123 as prováveis configurações de ruína deste pórtico e suas configurações deformadas.

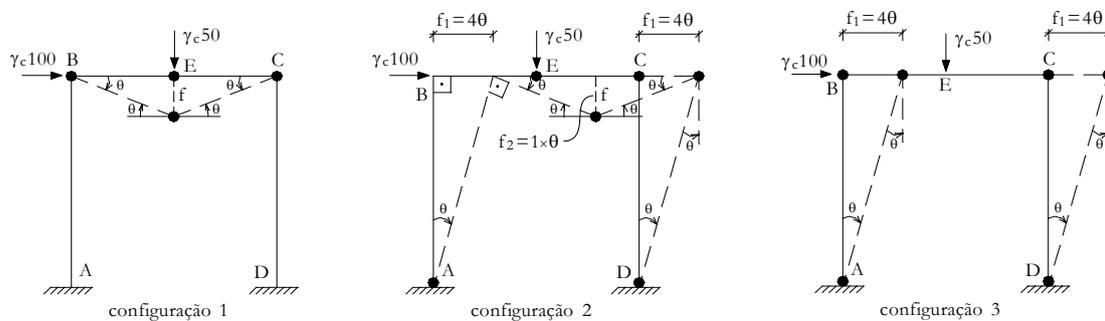


Figura 4.123:

- Configuração 1

$$\begin{aligned}\tau_{ext} &= \gamma_c 50f = \gamma_c 50\theta \quad (f = 1\theta) \\ \tau_{int} &= M_{II} (\theta + \theta + 2\theta) = 4 \times 200 \times \theta = 800\theta \\ \therefore \gamma_c 50\theta &= 800\theta\end{aligned}$$

e portanto

$$\gamma_c = 16$$

- Configuração 2

$$\begin{aligned}\tau_{ext} &= \gamma_c 100f_1 + \gamma_c 50f_2 \quad (f_1 = 4\theta, f_2 = 1\theta) \\ \tau_{ext} &= \gamma_c 400\theta + \gamma_c 50\theta = \gamma_c 450\theta \\ \tau_{int} &= M_{II} (\theta + \theta + 2\theta + 2\theta) = 6 \times 200 \times \theta = 1200\theta \\ \therefore \gamma_c 450\theta &= 1200\theta\end{aligned}$$

e portanto

$$\gamma_c = \frac{8}{3} = 2,67$$

- Configuração 3

$$\begin{aligned}\tau_{ext} &= \gamma_c 100f_1 = \gamma_c 400\theta \quad (f_1 = 4\theta) \\ \tau_{int} &= M_{II} (\theta + \theta + \theta + \theta) = 4 \times 200 \times \theta = 800\theta \\ \therefore \gamma_c 400\theta &= 800\theta\end{aligned}$$

e portanto

$$\gamma_c = 2$$

Analisando-se os valores de γ_c , vê-se que o menor multiplicador corresponde à configuração 3; a confirmação de que esta é a configuração real de ruína pode ser feita a partir da sua verificação pelo Teorema Estático, o que já foi feito no item 5.2. Desta forma, tem-se que $\gamma_{II} = 2$ é o multiplicador do carregamento que caracteriza a ruína do pórtico (configuração 3).

4.5.4 Análise limite. Exemplos

Neste item serão apresentados alguns exemplos de determinação das configurações de ruína e dos multiplicadores dos carregamentos de algumas estruturas, a partir da aplicação do Teorema Cinemático e com verificação pelo Teorema Estático.

Exemplo 1: Viga contínua.

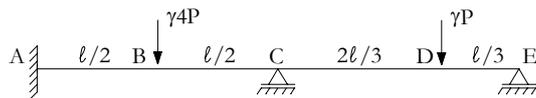


Figura 4.124: Viga contínua.

• Configurações de ruína possíveis

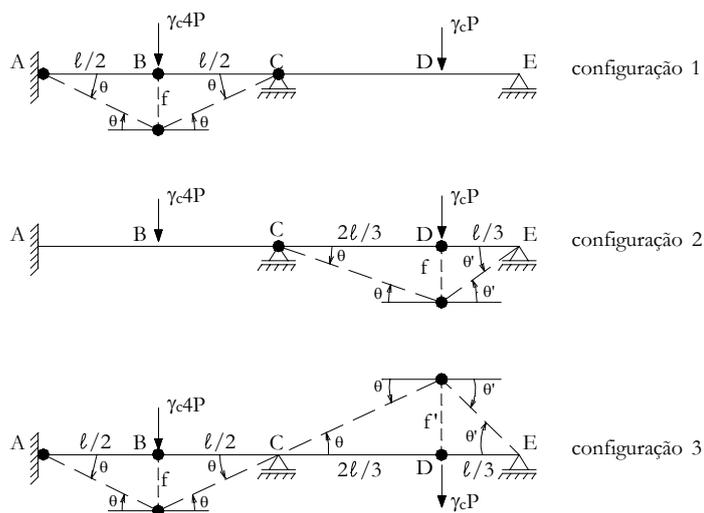


Figura 4.125: Configurações de ruína possíveis para a viga contínua.

– Configuração 1

$$\tau_e = \gamma_c 4P f \quad \left(f = \theta \frac{\ell}{2} \right)$$

$$\therefore \tau_e = \gamma_c 4P \theta \frac{\ell}{2} = \gamma_c 2P \theta \ell$$

$$\tau_i = M_{II} (\theta + \theta + 2\theta) = M_{II} 4\theta$$

ou seja $\gamma_c 2P \theta \ell = M_{II} 4\theta$

$$\text{ou } \gamma_c = \frac{2M_{II}}{P\ell}$$

– Configuração 2

$$\tau_e = \gamma_c P f \quad \left(f = \theta \frac{2\ell}{3} \right)$$

$$\therefore \tau_e = \gamma_c P \theta \frac{2\ell}{3}$$

$$\tau_i = M_{II} (\theta + \theta + \theta') \quad \left(\theta' = \frac{F}{\frac{\ell}{3}} = 2\theta \right)$$

$$\therefore \tau_i = M_{II} 4\theta$$

ou seja $\gamma_c P \theta \frac{2\ell}{3} = M_{II} 4\theta \quad \therefore \quad \gamma_c = \frac{6M_{II}}{P\ell}$

– Configuração 3

$$\begin{aligned}\tau_e &= \gamma_c 4Pf - \gamma_c 4Pf' \\ \text{mas } f &= \theta \frac{\ell}{2} \quad \text{e} \quad f' = \theta \frac{2\ell}{3} \\ \therefore \tau_e &= \gamma_c 4P\theta \frac{\ell}{2} - \gamma_c P\theta \frac{2\ell}{3} \\ \text{ou } \tau_e &= \gamma_c \frac{4}{3} P\theta \ell \\ \tau_i &= M_{II} (\theta + 2\theta + \theta + \theta') \\ \text{mas } \theta' &= \frac{f'}{\frac{\ell}{3}} = 2\theta \\ \therefore \tau_i &= M_{II} 6\theta \\ \text{assim } \gamma_c \frac{4}{3} P\theta \ell &= M_{II} 6\theta \quad \therefore \quad \gamma_c = \frac{9 M_{II}}{2 P\ell}.\end{aligned}$$

A configuração real de ruína é a configuração 1; a seguir se fará a verificação desta configuração pelo Teorema Estático.

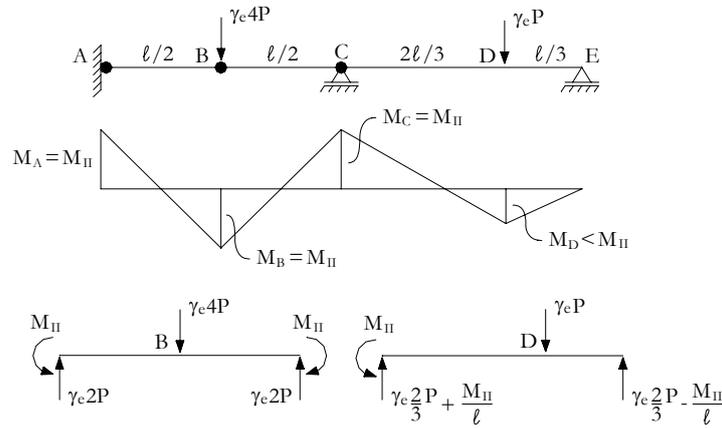


Figura 4.126: Verificação pelo Teorema Estático.

$$\begin{aligned}1^{\text{a}} \text{ equação} \quad M_B &= M_{II} \\ \therefore M_{II} &= \gamma_e 2P \frac{\ell}{2} - M_{II} \\ \text{ou } \gamma_e P\ell &= 2M_{II} \quad \therefore \quad \gamma_e = \frac{2M_{II}}{P\ell}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2^{\text{a}} \text{ equação} \quad &: \text{ Verificação de } M_D < M_{II} \\ M_D &= \gamma_e \frac{2}{3} P \frac{\ell}{3} - \frac{M_{II} \ell}{\ell \cdot 3} \\ M_D &= \gamma_e \frac{2P\ell}{9} - \frac{M_{II}}{3} \\ \text{mas } \gamma_e &= \frac{2M_{II}}{\ell} \\ \therefore M_D &= \frac{4}{9} M_{II} - \frac{M_{II}}{3} = \frac{M_{II}}{9} < M_{II}.\end{aligned}$$

Desta forma a configuração 1 está verificada pelo Teorema Estático, pois a condição de plastificação está satisfeita e, portanto,

$$\gamma_{II} = \gamma_c = \gamma_e = \frac{2M_{II}}{P\ell}$$

Exemplo 2: Pórtico 1

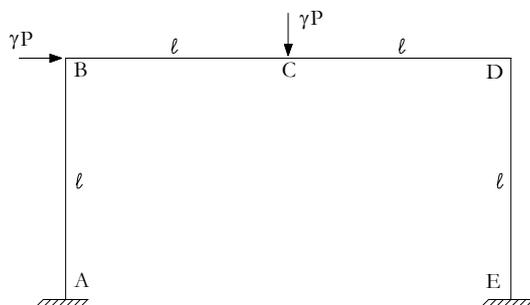


Figura 4.127: Pórtico 1.

- Configurações de ruína possíveis:
 - Para a configuração 1 tem-se:

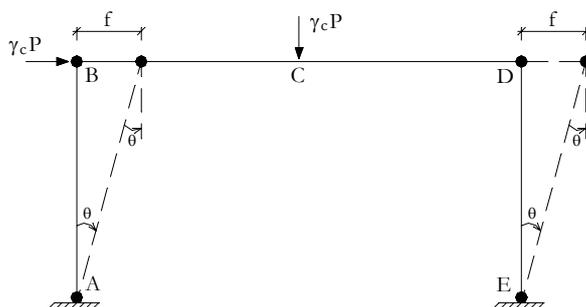


Figura 4.128: Configuração 1.

$$\tau_e = \gamma_c P f = \gamma_c P \theta \ell \quad (f = \theta \ell)$$

$$\tau_i = M_{II} (\theta + \theta + \theta + \theta) = M_{II} 4\theta$$

$$\therefore \gamma_c P \theta \ell = M_{II} 4\theta$$

$$\text{ou seja} \quad \gamma_c = \frac{4M_{II}}{P\ell}.$$

– Para a configuração 2 tem-se:

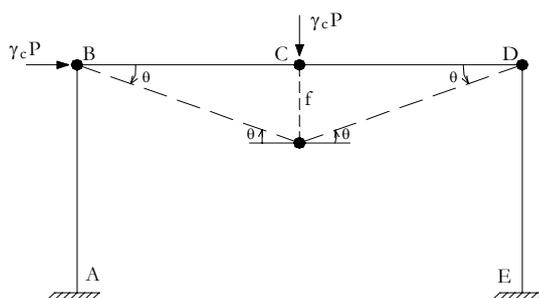


Figura 4.129: Configuração 2.

$$\tau_e = \gamma_c P f = \gamma_c P \theta \ell \quad (f = \theta \ell)$$

$$\tau_i = M_{II} (\theta + \theta + 2\theta) = M_{II} 4\theta$$

$$\therefore \gamma_c P \theta \ell = M_{II} 4\theta$$

$$\text{ou seja} \quad \gamma_c = \frac{4M_{II}}{P\ell}.$$

– Para a configuração 3 tem-se:

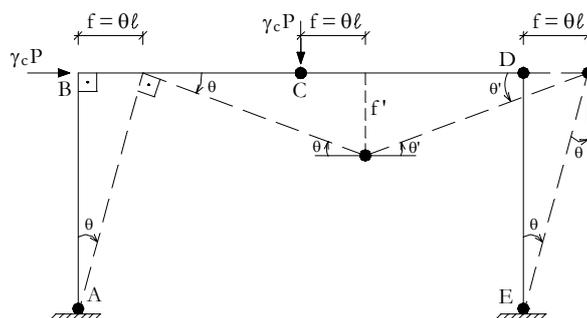


Figura 4.130: Configuração 3.

$$\tau_e = \gamma_c P f + \gamma_c P f'$$

$$\text{mas } f = \theta \ell \quad \text{e} \quad f' = \theta \ell$$

$$\therefore \tau_e = 2\gamma_c P \theta \ell$$

$$\tau_i = M_{II} (\theta + \theta + \theta + \theta' + \theta + \theta')$$

$$\text{mas } \theta' = \frac{f'}{\ell} = \theta$$

$$\therefore \tau_i = M_{II} 6\theta.$$

$$\text{Assim, } 2\gamma_c P \theta \ell = M_{II} 6\theta$$

$$\text{ou seja } \gamma_c = \frac{3M_{II}}{P\ell}.$$

– Para a configuração 4 tem-se:

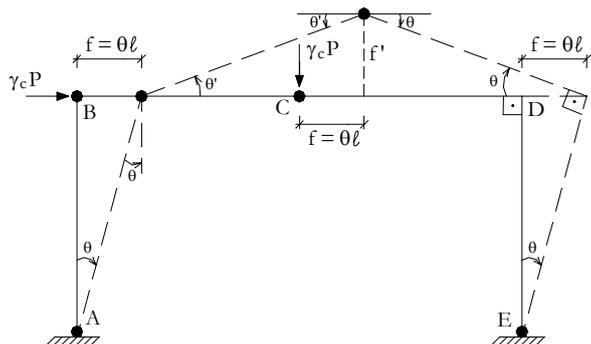


Figura 4.131: Configuração 4.

$$\begin{aligned} \tau_e &= \gamma_c P f - \gamma_c P f' \\ \text{mas } f &= \theta \ell \quad \text{e} \quad f' = \theta \ell \\ \therefore \tau_e &= 0 \end{aligned}$$

o que é impossível por implicar que $\gamma_c \rightarrow \infty$.

Desta forma a configuração real de ruína é a configuração 3, com $\gamma_c = \frac{3M_{II}}{P\ell}$; para se ter certeza desta conclusão basta proceder-se à verificação da configuração 3 pelo Teorema Estático, o que se apresenta a seguir.

- Verificação pelo Teorema Estático

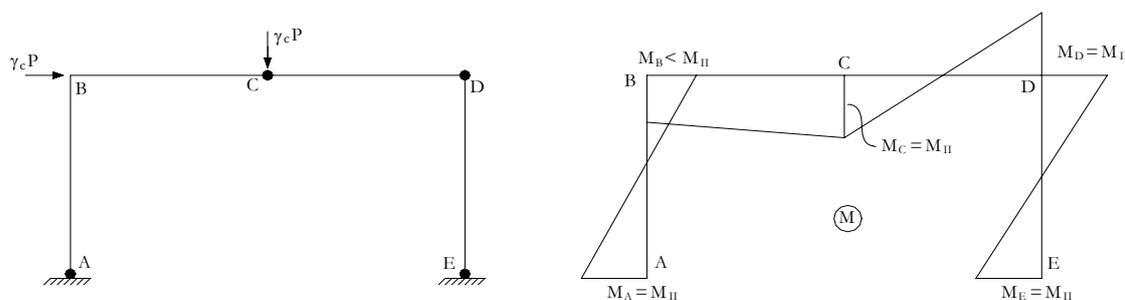


Figura 4.132: Verificação pelo Teorema Estático.

Isolando-se as barras e os nós para estabelecerem-se as equações de equilíbrio estático tem-se, conforme se mostra na Figura 4.133:

– Equilíbrio do nó B

$$\begin{aligned} \gamma_e P &= \frac{M_{II} + M_B}{\ell} + \frac{2M_{II}}{\ell} \\ \therefore \gamma_e P \ell &= 3M_{II} + M_B. \end{aligned} \tag{4.32}$$

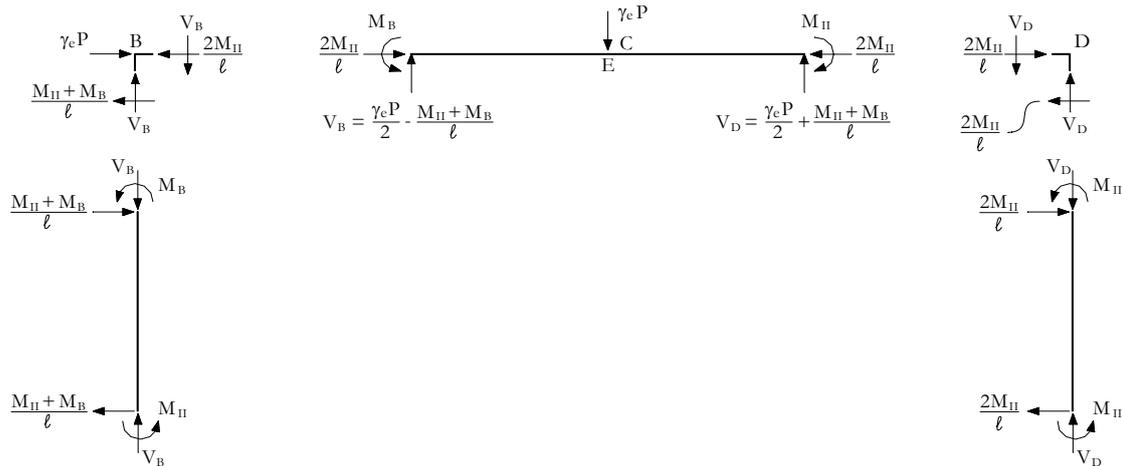


Figura 4.133:

– Momento em C ($M_C = M_{II}$)

$$\frac{\gamma_e P \ell}{2} - \frac{M_{II} + M_B}{2} + M_B = M_{II}$$

$$\therefore \gamma_e P \ell = 3M_{II} - M_B. \quad (4.33)$$

De (4.32) e (4.33) decorre

$$2\gamma_e P \ell = 6M_{II} \quad \therefore \quad \gamma_e = \frac{3M_{II}}{P \ell}$$

e ainda $M_B = 0$.

Desta forma a configuração 3 está verificada pelo Teorema Estático, pois a condição de plastificação está satisfeita. Decorrendo, portanto, que $\gamma_{II} = \gamma_c = \gamma_e = \frac{3M_{II}}{P \ell}$.

Exemplo 3: Pórtico 2

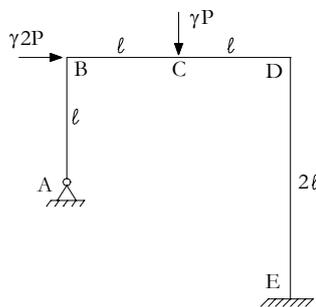


Figura 4.134: Pórtico 2.

- Configurações de ruína possíveis:

– Para a configuração 1 tem-se:

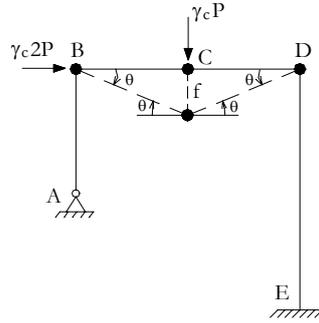


Figura 4.135: Configuração 1.

$$\tau_e = \gamma_c P f = \gamma_c P \theta \ell \quad (f = \theta \ell)$$

$$\tau_i = M_{II} (\theta + \theta + \theta + \theta) = M_{II} 4\theta$$

$$\therefore \gamma_c P \theta \ell = M_{II} 4\theta$$

$$\text{ou seja} \quad \gamma_c = \frac{4M_{II}}{P\ell}.$$

– Para a configuração 2 tem-se:

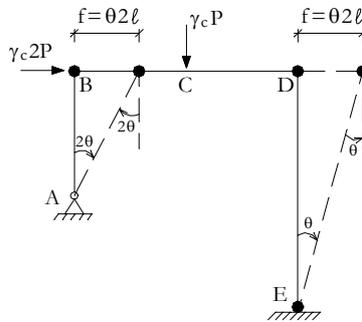


Figura 4.136: Configuração 2.

$$\tau_e = \gamma_c 2P f = \gamma_c 2P \theta 2\ell \quad (f = \theta 2\ell)$$

$$\tau_i = M_{II} (\theta + \theta + 2\theta) = M_{II} 4\theta$$

$$\therefore \gamma_c 4P \theta \ell = M_{II} 4\theta$$

$$\text{ou seja} \quad \gamma_c = \frac{M_{II}}{P\ell}.$$

– Para a configuração 3 tem-se:

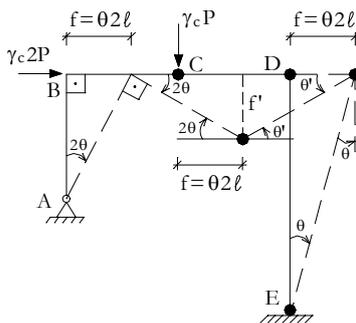


Figura 4.137: Configuração 3.

$$\begin{aligned}\tau_e &= \gamma_c 2P f + \gamma_c P f' \\ \text{mas } f &= \theta 2\ell \quad \text{e} \quad f' = 2\theta\ell \\ \therefore \tau_e &= 6\gamma_c P \theta \ell\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_i &= M_{II} (\theta + \theta + \theta' + 2\theta + \theta') \\ \text{mas } \theta' &= \frac{f'}{\ell} = 2\theta \\ \therefore \tau_i &= M_{II} 8\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Assim, } 6\gamma_c P \theta \ell &= M_{II} 8\theta \\ \text{ou seja } \gamma_c &= \frac{4M_{II}}{3P\ell}.\end{aligned}$$

– Para a configuração 4 tem-se:

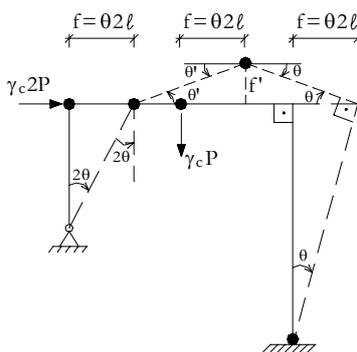


Figura 4.138: Configuração 4.

$$\begin{aligned}\tau_e &= \gamma_c 2P f - \gamma_c P f' \\ \text{mas } f &= \theta 2\ell \quad \text{e} \quad f' = \theta\ell \\ \therefore \tau_e &= 3\gamma_c P \theta \ell\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_i &= M_{II}(\theta + \theta' + \theta + 2\theta + \theta') \\ \text{mas } \theta' &= \frac{f'}{\ell} = \theta \\ \therefore \tau_i &= M_{II}6\theta.\end{aligned}$$

$$\text{Assim, } 3\gamma_c P \theta \ell = M_{II}6\theta$$

$$\text{ou seja } \gamma_c = \frac{2M_{II}}{P\ell}.$$

A configuração real de ruína é, portanto, a configuração 2, com $\gamma_{II} = \gamma_c = \frac{M_{II}}{P\ell}$.

É interessante fazer a verificação pelo Teorema Estático, a qual é semelhante ao exemplo anterior.

Exemplo 4: Pórtico 3

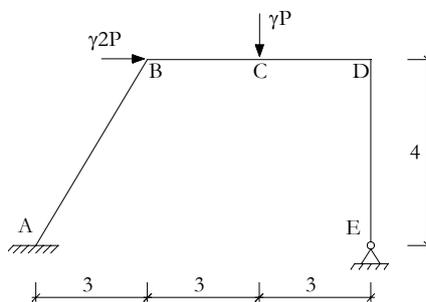


Figura 4.139: Pórtico 3

- Configurações de ruína possíveis:

– Para a configuração 1 tem-se:

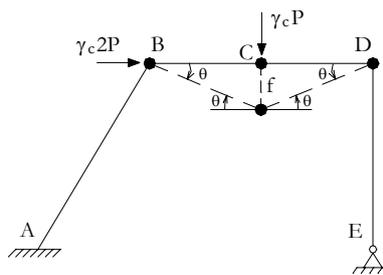


Figura 4.140: Configuração 1

$$\tau_e = \gamma_c P f = \gamma_c P 3\theta \quad (f = 3\theta)$$

$$\tau_i = M_{II}(\theta + \theta + 2\theta) = M_{II}4\theta$$

$$\therefore \gamma_c 3P\theta = M_{II}4\theta$$

$$\text{ou seja } \gamma_c = \frac{4M_{II}}{3P}.$$

– Para a configuração 2 tem-se:

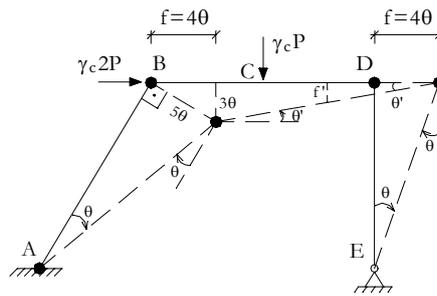


Figura 4.141: Configuração 2

$$\tau_e = \gamma_c 2P f + \gamma_c P f'$$

mas $f = 4\theta$ e $f' = \frac{3\theta}{2}$

$$\therefore \tau_e = \gamma_c 2P 4\theta + \gamma_c P \frac{3\theta}{2} = \frac{19\gamma_c P \theta}{2}$$

$$\tau_i = M_{II} (\theta + \theta + \theta' + \theta + \theta')$$

mas $\theta' = \frac{3\theta}{6} = \frac{\theta}{2}$

$$\therefore \tau_i = M_{II} 4\theta$$

Assim $\frac{19\gamma_c P \theta}{2} = M_{II} 4\theta$

$$\therefore \gamma_c = \frac{8M_{II}}{19P}$$

– Para a configuração 3 tem-se:

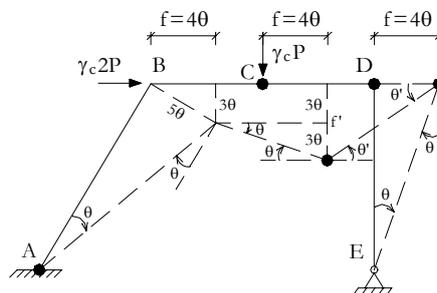


Figura 4.142: Configuração 3

$$\tau_e = \gamma_c 2P f + \gamma_c P f'$$

mas $f = 4\theta$ e $f' = 6\theta$

$$\therefore \tau_e = 14\gamma_c P \theta$$

$$\tau_i = M_{II}(\theta + \theta + \theta' + \theta' + \theta)$$

mas $\theta' = \frac{f'}{3} = 2\theta$

$$\therefore \tau_i = M_{II}7\theta.$$

Assim, $14\gamma_c P\theta = M_{II}7\theta$

ou seja $\gamma_c = \frac{M_{II}}{2P}$.

– Para a configuração 4 tem-se:

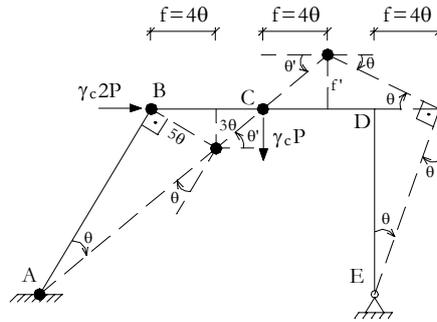


Figura 4.143: Configuração 4

$$\tau_e = \gamma_c 2P f - \gamma_c P f'$$

mas $f = 4\theta$ e $f' = 3\theta$

$$\therefore \tau_e = \gamma_c 5P\theta$$

$$\tau_i = M_{II}(\theta + \theta + \theta' + \theta + \theta')$$

mas $\theta' = \frac{f' + 3\theta}{3} = 2\theta$

$$\therefore \tau_i = M_{II}7\theta.$$

Assim, $5\gamma_c P\theta = M_{II}7\theta$

ou seja $\gamma_c = \frac{7M_{II}}{5P}$.

A configuração real de ruína é, portanto, a configuração 2, com $\gamma_{II} = \gamma_c = \frac{8M_{II}}{19P}$. Segue abaixo a sua verificação pelo Teorema Estático.

- Verificação pelo Teorema Estático

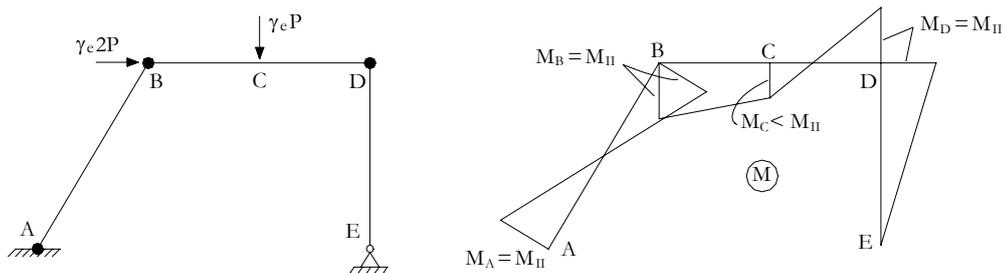


Figura 4.144:

Isolando-se as barras e os nós para estabelecerem-se as equações de equilíbrio estático tem-se:

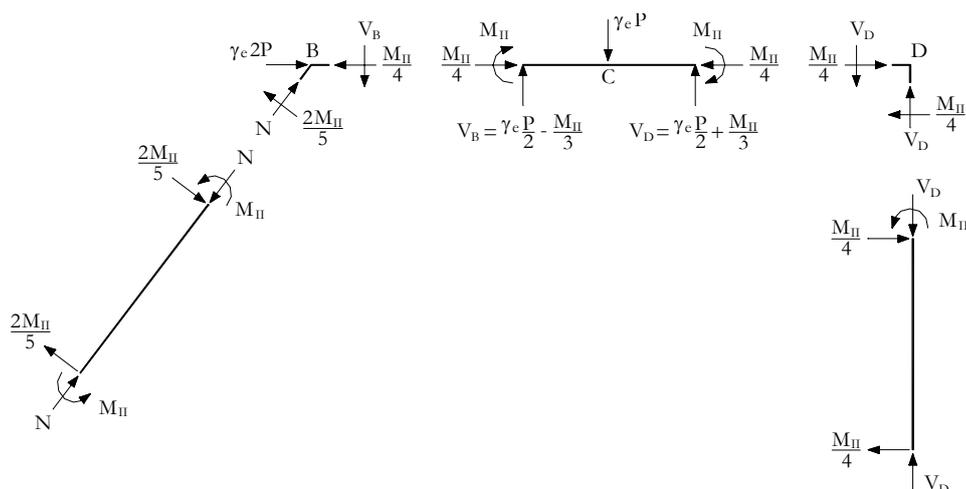


Figura 4.145:

– Equilíbrio do nó B : projetando na direção normal à barra AB tem-se

$$\begin{aligned} \frac{2M_{II}}{5} - \gamma_e 2P \frac{4}{5} - V_B \frac{3}{5} + \frac{M_{II}}{4} \frac{4}{5} &= 0 \\ 2M_{II} - 8\gamma_e P - 3 \left(\gamma_e \frac{P}{2} - \frac{M_{II}}{3} \right) + M_{II} &= 0 \\ -8\gamma_e P - \frac{3}{2} \gamma_e P + M_{II} + 3M_{II} &= 0 \\ \frac{19\gamma_e P}{2} = 4M_{II} \quad \therefore \quad \gamma_e &= \frac{8M_{II}}{19P} = \gamma_c = \gamma_{II} \end{aligned}$$

– Verificação de M_C

$$\begin{aligned} M_C &= \gamma_e \frac{P}{2} 3 - M_{II} + M_{II} \\ \therefore M_C &= \frac{8M_{II}}{19} \frac{3}{2} = \frac{12M_{II}}{19} < M_{II} . \end{aligned}$$

Desta forma a configuração 2 está verificada pelo Teorema Estático e, portanto, $\gamma_{II} = \gamma_c = \gamma_e = \frac{8M_{II}}{19P}$.