

---

# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito



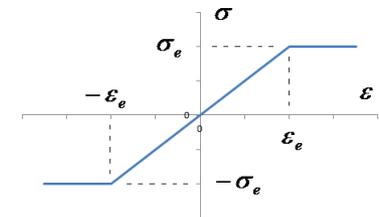
- 1 Introdução: Hipóteses de Análise
- 2 Análise Incremental e Análise Limite
- 3 Estruturas com solicitação axial (barras e treliças planas)
- 4 Estruturas fletidas (vigas e pórticos planos)
- 5 Métodos de Solução em Análise Limite

# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito



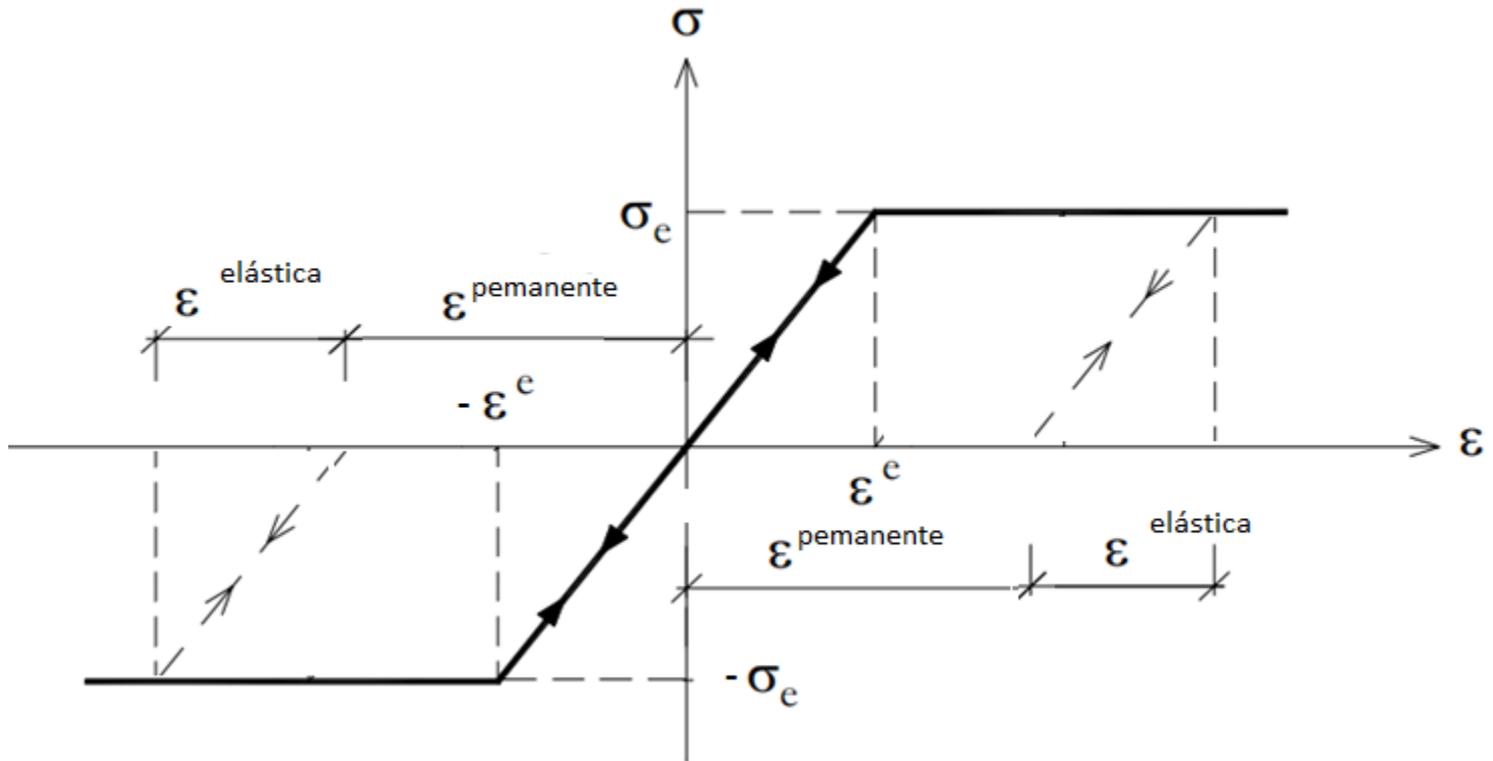
## Introdução: Hipóteses de Análise

- As seções planas originalmente perpendiculares ao eixo da barra permanecem planas e perpendiculares ao eixo da barra após a deformação (hipótese de Bernoulli-Euler-Navier);
- Não ocorre deformação no plano da seção transversal;
- Consideram-se pequenas deformações e pequenos deslocamentos;
- A seção transversal da barra tem um plano de simetria;
- O carregamento externo atua no plano de simetria;
- **Material: elastoplástico perfeito igualmente resistente à tração e compressão;**
- **Critério de Resistência: máxima tensão de cisalhamento ou critério de Tresca.**



# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

## Material Elastoplástico Perfeito



---

# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

## Análise Incremental



No início do carregamento a estrutura se comporta como elástica linear (sua análise pode ser feita pelos métodos clássicos dos esforços ou dos deslocamentos) até que uma seção da estrutura se plastifique. No caso de estrutura isostática ela se transforma em um mecanismo e a estrutura sofre o que se chama colapso plástico. No caso de estrutura hiperestática, com grau de hiperestaticidade  $n$ , ela modifica o seu comportamento e passa a se comportar como uma estrutura hiperestática de grau  $n-1$  e considera-se novo acréscimo com o novo comportamento linear e, assim por diante, até que ocorra o colapso plástico. Pode ocorrer que  $r$  seções se plastifiquem simultaneamente e, nesse caso, pode ocorrer que a estrutura seja levada ao colapso plástico ou que ela passe a se comportar como com uma estrutura hiperestática com grau de hiperestaticidade  $n-r$  ou, mesmo isostática. A que se considerar também a possibilidade de formação de um mecanismo parcial da estrutura, que também é chamado de colapso plástico.

# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

## Algoritmo para Análise Incremental



1. Partir de uma determinada configuração de referência ( $i$ ), caracterizada por um coeficiente de carregamento  $\gamma_i$  que define os esforços externos  $P_i = \gamma_i P$  e permite obter os esforços solicitantes e os deslocamentos resultantes;
2. Analisar a resposta linear da estrutura para uma variação de carga com  $\Delta\gamma=1$  a partir de  $P_i$
3. Determinar o incremento  $\Delta\gamma_i$  que leva à mudança do comportamento da estrutura pela plastificação de uma seção seja por solicitação axial, seja por flexão.
  - a. Pode ocorrer que  $\Delta\gamma_i$  seja definido por outra condição relacionada ao histórico de carregamento ou a uma condição de utilização sem que se uma nova seção seja plastificada
4. Analisar a resposta da estrutura para  $P_{i+1} = P_i + \Delta\gamma_i P$
5. Retornar ao item 2 ou interromper o processo no caso de colapso plástico ou no caso indicado em 3.a.

# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

## Exemplo Conceitual 3

Considere-se a treliça solicitada, conforme se indica na figura. As barras são constituídas de mesmo material elastoplástico perfeito com módulo de elasticidade  $E$  e tensão de escoamento  $\sigma_e$ .

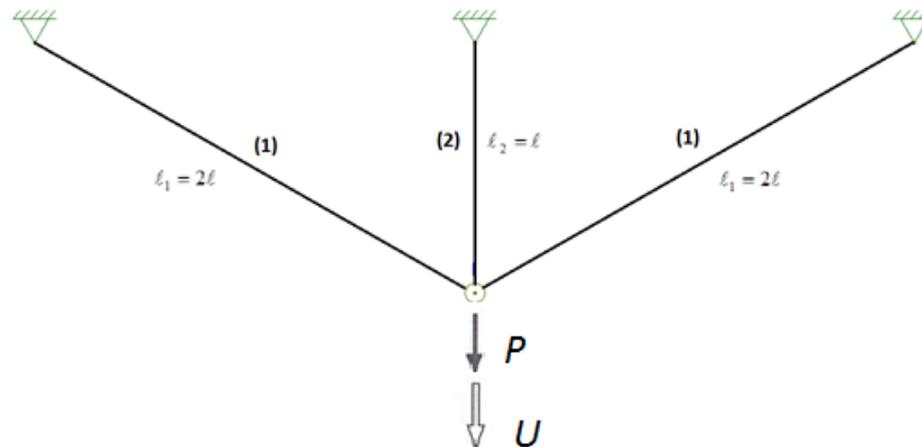


Dados:

$$A_1 = 4A \quad \ell_1 = 2\ell$$
$$A_2 = A \quad \ell_2 = \ell$$

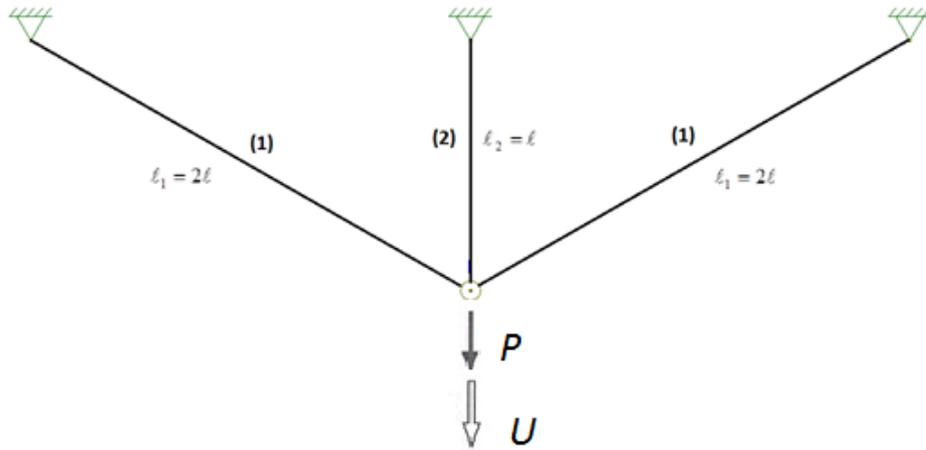
**Problema 1** Calcular carga de colapso para carregamento monotonicamente crescente (Análise Limite)

**Problema 2** Analisar a estrutura para um ciclo de carga até próximo do colapso e descarga (Análise Incremental)



# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

## Problema Auxiliar 1



$$\sigma_1 = \frac{N_1}{4A} = \frac{P}{8A}$$

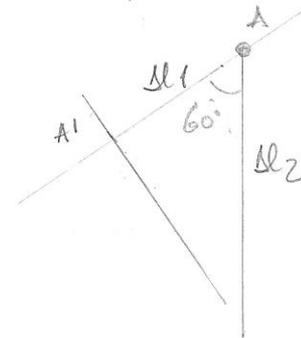
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{P}{2A}$$

$$U = \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA} = \frac{Pl}{2EA}$$

\* equações de equilíbrio

$$2 N_1 \cos 60^\circ + N_2 = P$$

\*\* equações de compatibilidade



$$\Delta l_2 \cos 60^\circ = \Delta l_1$$

$$\frac{N_2 l_2 \cos 60^\circ}{EA_2} = \frac{N_1 l_1}{EA_1}$$

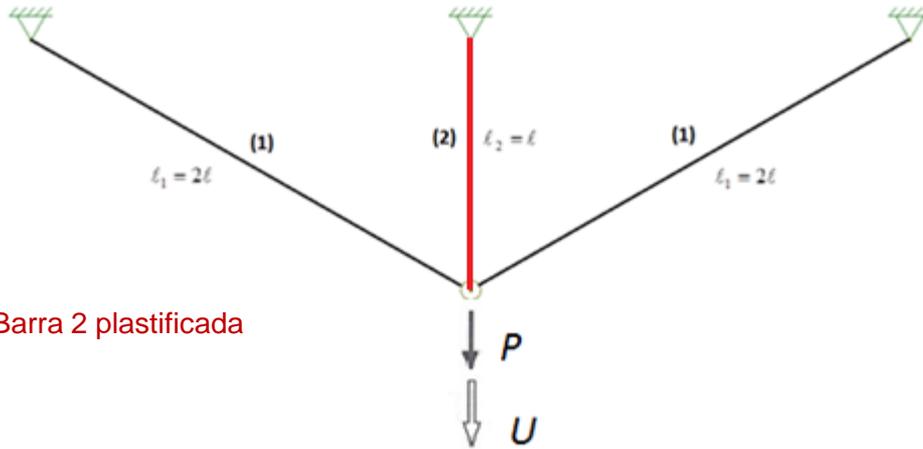
$$\frac{N_2 l}{EA} = \frac{N_1 2A}{EA}$$

$$N_1 = N_2$$

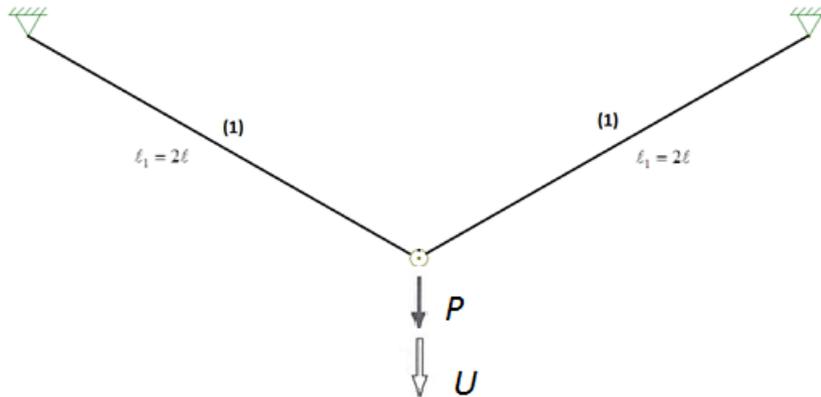
$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2}$$

# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

## Problema Auxiliar 2



Barra 2 plastificada



$$2N_1 \cos 60 = P \rightarrow N_1 = P$$

$$U \cos \alpha = \Delta l_1 \rightarrow U = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$U = \frac{P l_1}{E_1 A_1} \frac{2}{1} = \frac{P l}{EA}$$

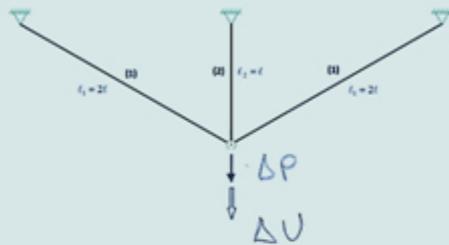
$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{P}{4A}$$

# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

**Análise Limite:** A partir da configuração indeformada de equilíbrio  
Plastificação por tração da 1ª. Barra



a. análise linear da estrutura p/ variação  $\Delta P$  a partir de  $P=0$ .



$$PAI \Rightarrow \Delta N_1 = \Delta N_2 = \frac{\Delta P}{2}$$

$$\Delta \sigma_1 = \frac{\Delta P}{8A}$$

$$\Delta \sigma_2 = \frac{\Delta P}{2A}$$

$$\Delta U = \frac{\Delta P l}{2EA}$$

b. resposta da estrutura para  $P = 0 + \Delta P$

$$N_1 = N_2 = 0 + \frac{\Delta P}{2}$$

$$U = 0 + \frac{\Delta P l}{2EA}$$

$$\sigma_1 = 0 + \frac{\Delta P}{8A}$$

$$\sigma_2 = 0 + \frac{\Delta P}{2A}$$

# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

**Análise Limite:** A partir da configuração indeformada de equilíbrio  
Plastificação por tração da 1ª. Barra



c.  $\Delta P_1$  por CR

$$N_1 = H p_1 \implies \frac{\Delta P_1'}{2} = 4 \sigma_e A \implies \Delta P_1' = 8 \sigma_e A$$

ou

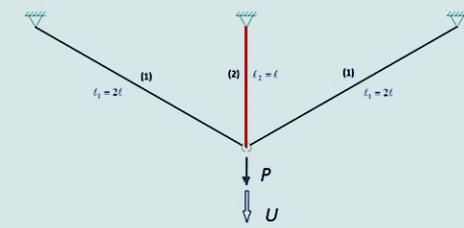
$$N_2 = N p_2 \implies \frac{\Delta P_1''}{2} = \sigma_e A \implies \Delta P_1'' = 2 \sigma_e A$$

$\Delta P_1 = 2 \sigma_e A$

d. imposta para  $P_1 = 0 + \Delta P_1 = 2 \sigma_e A$

$$N_1 = \sigma_e A \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_e}{4} \quad U_1 = \frac{\sigma_e l}{EA}$$

$$N_2 = \sigma_e A \quad \sigma_2 = \sigma_e$$

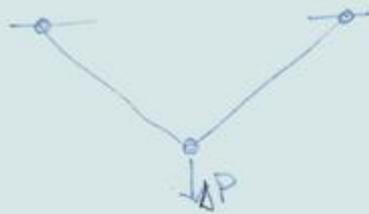


# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

## Análise Limite: Plastificação por tração da 2ª. barra



a) análise linear para variações  $\Delta P$  a partir de  $P_1$



$$\Delta N_1 = \Delta P$$

$$\Delta \sigma_1 = \frac{\Delta P}{4A}$$

$$\Delta U = \frac{\Delta P l}{EA}$$

b) imposta de estrutura para  $P = P_1 + \Delta P$

$$N_1 = \sigma_e A + \Delta P$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_e}{4} + \frac{\Delta P}{4A}$$

$$U = \frac{\sigma_e l}{EA} + \frac{\Delta P l}{EA}$$

$$N_2 = \sigma_e A$$

$$\sigma_2 = \sigma_e$$

c)  $\Delta P_1$  por CR

$$N_1 = N_{p1} \leadsto$$

$$\sigma_e A + \Delta P_1 = 4\sigma_e A \leadsto$$

$$\Delta P_1 = 3\sigma_e A$$

d)

imposta para

$$P_2 = P_1 + \Delta P_1 = 5\sigma_e A$$

$$N_1 = 4\sigma_e A$$

$$\sigma_1 = \sigma_e$$

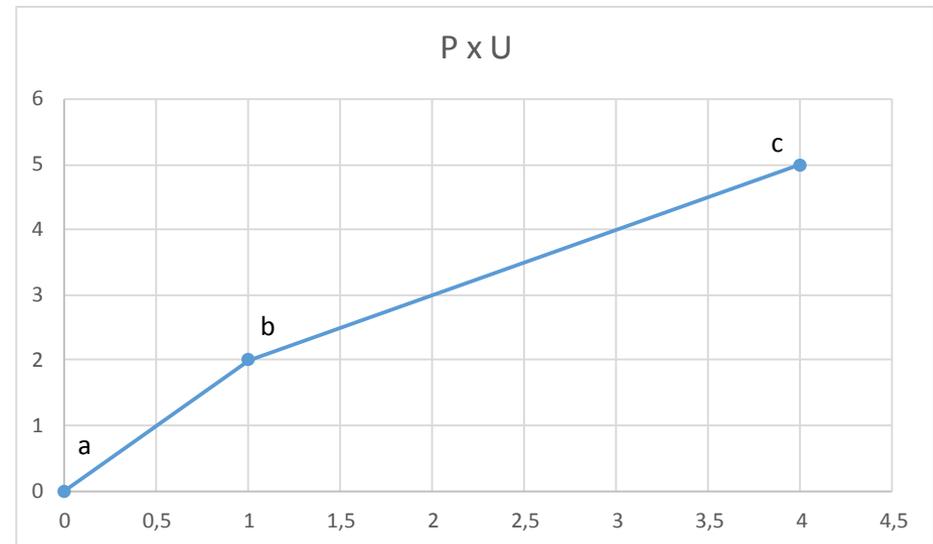
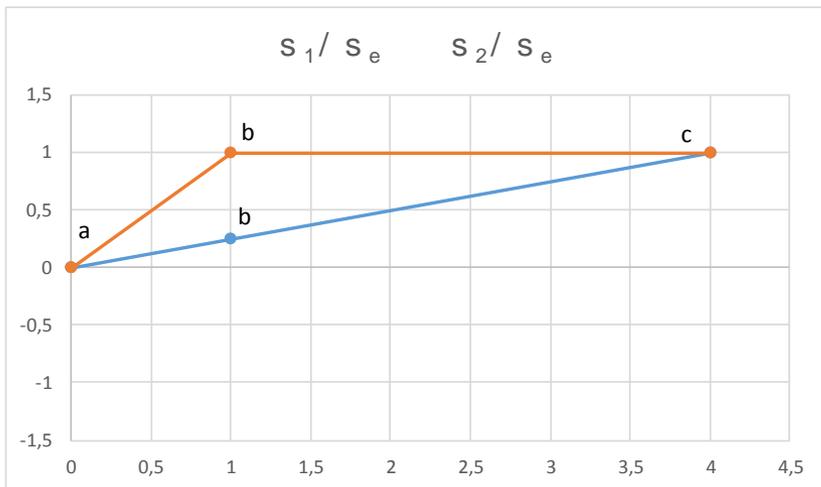
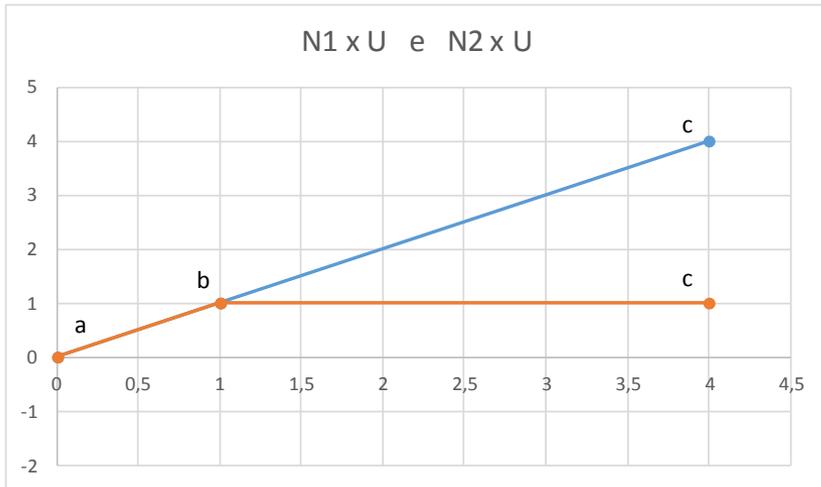
$$U_2 = 4 \frac{\sigma_e l}{EA}$$

$$N_2 = \sigma_e A$$

$$\sigma_2 = \sigma_e$$

# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

**Análise Limite:** A partir da configuração indeformada de equilíbrio

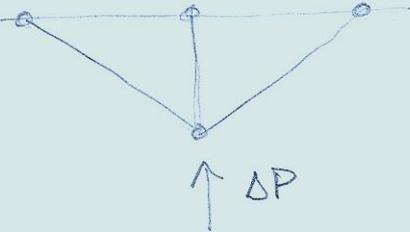


# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

## Análise Limite: Decréscimo de carga a partir de $P_2$



a) análise linear para decréscimo  $\Delta P$  a partir de  $P_2$


$$\Delta N_1 = \Delta N_2 = -\frac{\Delta P}{2}$$
$$\Delta \sigma_1 = -\frac{\Delta P}{8A} \quad \Delta \sigma_2 = -\frac{\Delta P}{2a}$$
$$\Delta U = -\frac{\Delta P l}{2EA}$$

b) resposta da estrutura para  $P = P_2 + \Delta P$

$$N_1 = 4 \sigma_e A - \frac{\Delta P}{2} \quad \sigma_1 = \sigma_e - \frac{\Delta P}{8A} \quad U = 4 \frac{\sigma_e l}{EA} - \frac{\Delta P l}{2EA}$$
$$N_2 = \sigma_e A - \frac{\Delta P}{2} \quad \sigma_2 = \sigma_e - \frac{\Delta P}{2a}$$

# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

## Análise Limite: Decréscimo de carga a partir de $P_2$



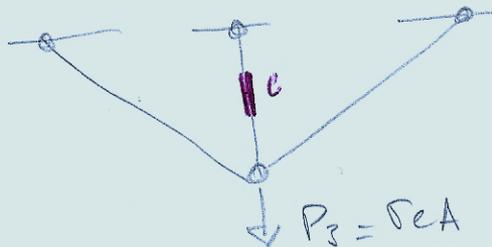
c)  $\Delta P_2$  para CR

$$N_1 = -N_{p1} \rightarrow 4\sigma_e A - \frac{\Delta P_2'}{2} = -4\sigma_e A \rightarrow \Delta P_2' = -16\sigma_e A$$
$$N_2 = -N_{p2} \rightarrow \sigma_e A - \frac{\Delta P_2''}{2} = -\sigma_e A \rightarrow \Delta P_2'' = -4\sigma_e A$$

$\Rightarrow \Delta P_2 = -4\sigma_e A$

d) impoite para  $P_3 = P_2 + \Delta P_2 \rightarrow P_3 = \sigma_e A$

$$N_1 = 2\sigma_e A \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_e}{2} \quad U_2 = 2 \frac{\sigma_e l}{EA}$$
$$N_2 = -\sigma_e A \quad \sigma_2 = -\sigma_e$$

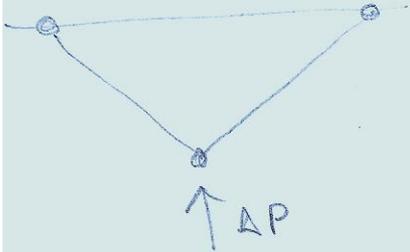


# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

## Análise Limite: Decréscimo de carga a partir de $P_3$



a) análise linear para decréscimo  $\Delta P$  a partir de  $P_3$ .


$$\Delta N_1 = -\Delta P$$
$$\Delta \sigma_1 = \frac{-\Delta P}{4A}$$
$$\Delta U = -\frac{\Delta P l}{EA}$$

b) imposta-se estrutura para  $P = P_3 + \Delta P$

$$N_1 = 2\sigma_e A + \Delta P$$
$$N_2 = -\sigma_e A$$
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_e}{2} - \frac{\Delta P}{4A}$$
$$\sigma_2 = -\sigma_e$$
$$U = 2\frac{\sigma_e l}{EA} - \frac{\Delta P l}{EA}$$

# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

## Análise Limite: Decréscimo de carga a partir de P3



c)  $\Delta P_3 = 1 - P_3$  para  $P_4 = 0$  e/ou superfície de CR  
 importante para  $P_4 = 0$

x)  $\Delta P_3 = -\sigma_e A \rightarrow N_1 = \sigma_e A \quad \sigma_1 = \sigma_e / 4$   
 $N_2 = -\sigma_e A \quad \sigma_2 = -\sigma_e$

$U_3 = \frac{\sigma_e l}{EA}$

$N_1 = \sigma_e A < N_{pl}$  superfície CR

# Análise de Estruturas Reticuladas Planas em Regime Elastoplástico Perfeito

**Análise Limite:** A partir da configuração indeformada de equilíbrio

