



Instituto de Física



---

# FAP 2292

## Notas de Aula 3

Equações de Maxwell na forma diferencial  
Condições de contorno

---

Notas revistas por:

Prof. Daniel Cornejo

Prof<sup>a</sup>. Márcia Fantini

Baseadas nas notas do

Prof. Aluísio Neves Fagundes

para o 1<sup>o</sup> semestre de 2005.

# Sumário

<b>3</b>	<b>As equações de Maxwell na forma diferencial</b>	<b>3</b>
3.1	O divergente e o teorema de Gauss . . . . .	4
3.1.1	Definição do divergente . . . . .	4
3.1.2	Teorema de Gauss . . . . .	5
3.1.3	O divergente em coordenadas cartesianas . . . . .	6
3.2	O rotacional e o teorema de Stokes . . . . .	8
3.2.1	Definição do rotacional . . . . .	8
3.2.2	Teorema de Stokes . . . . .	9
3.2.3	O rotacional em coordenadas cartesianas . . . . .	10
3.3	As equações de Maxwell na forma diferencial . . . . .	11
3.3.1	Lei de Gauss . . . . .	11
3.3.2	Lei de Gauss para o magnetismo . . . . .	12
3.3.3	A Lei de Faraday . . . . .	12
3.3.4	A Lei de Ampère-Maxwell . . . . .	13
3.3.5	As Equações de Maxwell: Resumo . . . . .	14
3.4	Exemplos de aplicação . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Condições de contorno</b>	<b>19</b>
4.1	Equações de Maxwell em meios materiais . . . . .	19
4.2	Condições de contorno. . . . .	20
4.2.1	Fluxo e circulação de um campo vetorial em torno da superfície . . . . .	21
4.2.2	O fluxo e as componentes normais dos campos . . . . .	22
4.2.3	A circulação e as componentes tangenciais dos campos . . . . .	23
<b>A</b>	<b>Gradiente, divergente e rotacional em três sistemas de coordenadas</b>	<b>25</b>



### 3

## As equações de Maxwell na forma diferencial

As Leis do Eletromagnetismo podem ser expressas em quatro equações, denominadas *Equações de Maxwell*, em homenagem a James C. Maxwell. Físico escocês nascido em 1831, Maxwell conseguiu unificar as leis do eletromagnetismo, pela introdução da “corrente de deslocamento,” que corrige a Lei de Ampère. Eis as quatro leis do eletromagnetismo na forma integral: A forma integral destas equações implica sempre considerar

$$\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_S \quad \text{Lei de Gauss} \quad (3.1)$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad \text{Lei de Gauss para o magnetismo} \quad (3.2)$$

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot ds = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(c)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{Lei de Faraday} \quad (3.3)$$

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot ds = \mu_0 I_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(c)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{Lei de Ampère-Maxwell} \quad (3.4)$$

Tabela 3.1: Equações de Maxwell na forma integral.

uma superfície, delimitando um volume; ou uma curva fechada (circuito), delimitando uma superfície. Na lei de Gauss o fluxo do campo elétrico *através de uma superfície fechada* é proporcional à carga elétrica contida dentro do *volume delimitado pela superfície fechada*. Na lei de Ampère a *circuitação* do vetor indução magnética  $\mathbf{B}$  ao longo de um circuito fechado é proporcional à corrente total que flui *através de uma superfície área delimitada pelo circuito*.

Esta forma de apresentar as leis do eletromagnetismo, embora de maior transparência em seu conteúdo, mostra-se restritiva, quando tentamos desenvolvê-las na solução de um problema prático. Melhor é dispor destas equações na *forma diferencial*, quando podem ser aplicadas a *um ponto* do espaço. A transformação é até bastante simples quando dispomos de duas ferramentas matemáticas poderosas, que são o *Teorema de Gauss* e o *Teorema de Stokes*. Seria muito simples enunciar e utilizar ambos os teoremas. Entretanto, a prática mostra que o entendimento fica muito difícil, desta maneira. Há melhor aceitação dos resultados quando não há dúvidas quanto ao caminho percorrido. Por esta razão vamos demonstrar os teoremas *sob o ponto de vista da Física*, de uma forma utilitária, portanto. Por outro lado, esta demonstração não deve ser uma novidade. Os teoremas de Gauss

e Stokes fazem parte do programa de cálculo e o que aqui será feito é apresentar uma *recordação*.

Embora seja nosso interesse utilizar o teorema de Gauss e o teorema de Stokes no eletromagnetismo, sob nenhuma circunstância isto deve ser induzir à idéia de que o uso de ambos os teoremas esteja limitado ao eletromagnetismo; de fato, encontramos uso mais freqüente em Mecânica dos Fluidos. Os teoremas envolvem duas operações que se aplicam a campos vetoriais: a *divergente* e a *rotacional*.

### 3.1 O divergente e o teorema de Gauss

Seja  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  um campo vetorial (função vetorial da posição) que varia contínua e suavemente em uma região do espaço. Sejam  $S$  uma superfície fechada qualquer envolvendo um volume  $V$ , e  $\Phi_S$  o fluxo de  $\mathbf{F}$  através de  $S$  (ver Figura 3.1):

$$\Phi_S = \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}.$$

Para definir uma função relacionada com o fluxo de  $\mathbf{F}$  num ponto no espaço,  $\mathbf{r}$  podemos tornar  $V$  cada vez menor, sempre envolvendo o ponto. No limite  $V \rightarrow 0$  teremos uma função do ponto. Vamos ver o que ocorre com o fluxo quando diminuimos o volume envolvido pela superfície.

#### 3.1.1 Definição do divergente

Primeiro dividimos o volume original  $V$  em  $N$  partes, como esboçado na Figura 3.1. Numeramos as partes com um índice  $k = 1, 2, \dots, N$ . Cada parte terá um volume  $v_k$  envolvido por uma superfície fechada  $s_k$ . Seja  $\Phi_k$  o fluxo de  $\mathbf{F}$  através da superfície  $s_k$ ,

$$\Phi_k = \oiint_{s_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}.$$

É fácil perceber que, qualquer que seja a subdivisão efetuada, vale a identidade

$$\Phi_S = \sum_{k=1}^N \Phi_k. \quad (3.5)$$

Lembre-se que o fluxo é computado tomando  $d\mathbf{A}$  sempre *apontando para fora do volume*. Qualquer face comum a dois volumes adjacentes contribui com duas parcelas na soma: uma com  $d\mathbf{A}$  num sentido e outra com  $d\mathbf{A}$  no sentido oposto. Assim  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}$  tem sinais opostos em cada uma destas parcelas e as contribuições provenientes de faces comuns de volumes adjacentes se anulam identicamente. As únicas contribuições que não se cancelam são as das faces que não são comuns a dois volumes vizinhos, ou seja das faces externas dos volumes periféricos. Mas estas faces compõem a superfície  $S$  que envolve o volume original.

Consideremos então uma subdivisão mais ou menos uniforme do volume  $V$ . Como  $\Phi_S$  é uma soma de  $N$  parcelas devemos ter para cada uma delas

$$\Phi_k \sim \frac{1}{N} \Phi_S.$$

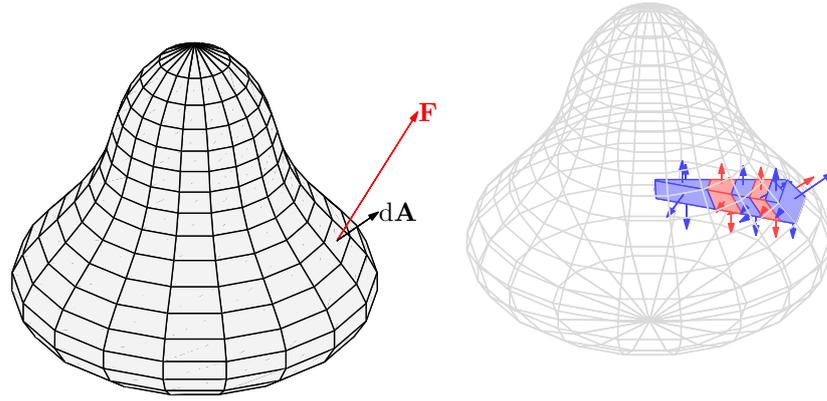


Figura 3.1: Esquerda: Um volume  $V$  envolvido pela superfície  $S$  é subdividido em volumes menores. Direita: Alguns dos sub-volumes  $v_k$ , cada um envolvido por uma superfície  $s_k$ .

Assim, no limite  $N \rightarrow \infty$ , em que cada volume  $v_k$  se fecha em torno de um ponto  $\mathbf{r}_k$ , os fluxos  $\Phi_k$  se anulam. Entretanto, como  $N \approx V/v_k$ , temos

$$\Phi_k \sim \frac{v_k}{V} \Phi_S \quad \text{ou} \quad \frac{\Phi_k}{v_k} \sim \frac{\Phi_S}{V}.$$

Ou seja, a *densidade de fluxo*,  $\Phi_k/v_k$  pode ter um limite não nulo quando  $v_k \rightarrow 0$ . Esta densidade de fluxo é a função que estamos procurando. Ela é denominada *divergente* (do campo vetorial) e é definida como:

$$\boxed{\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \lim_{v \rightarrow 0, \mathbf{r}} \frac{1}{v} \oiint_{s(v)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}.} \quad (3.6)$$

Em palavras:

o **divergente** de um campo vetorial  $\mathbf{F}$  num ponto  $\mathbf{r}$  é o fluxo de  $\mathbf{F}$  através de superfícies fechadas, por unidade de volume envolvido pelas superfícies, no limite de volume tendendo a zero em torno do ponto  $\mathbf{r}$ .

Pode-se demonstrar que tal limite existe e que é independente da forma do volume utilizado para computá-lo. Mais adiante vamos ver como esta função se expressa em termos das componentes do campo vetorial. Observe que o divergente de um campo vetorial é um *campo escalar*<sup>1</sup> (uma função escalar da posição), uma vez que ele representa a densidade de fluxo e o fluxo é um escalar.

### 3.1.2 Teorema de Gauss

O *Teorema de Gauss*, ou *teorema da divergência*, nada mais é do que a expressão da igualdade (3.5) em termos da divergência. Para ver isso vamos reescrevê-la na forma

$$\Phi_S = \sum_{k=1}^N \Phi_k = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\Phi_k}{v_k} \right) v_k.$$

<sup>1</sup>Uma grandeza *escalar* se expressa por um único valor independente do sistema de coordenadas. Uma grandeza *vetorial* se expressa por três componentes que dependem do sistema de coordenadas.

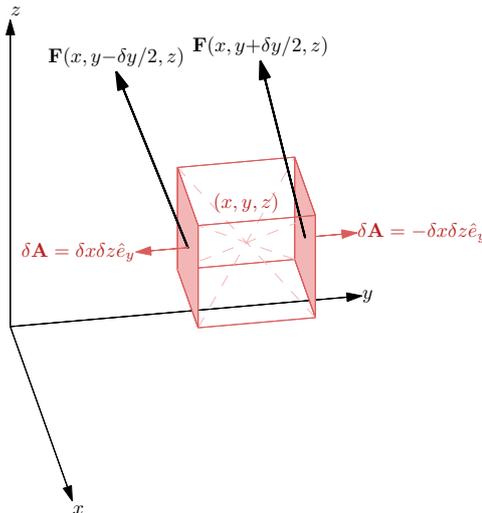


Figura 3.2: Esquema para computar o divergente em coordenadas cartesianas. O paralelepípedo de arestas  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$  é centrado no ponto  $(x, y, z)$ . São indicados os vetores de área  $\delta \mathbf{A}$  e o campo vetorial  $\mathbf{F}$  em duas faces paralelas do paralelepípedo.

Agora tomamos o limite  $N \rightarrow \infty$  ou  $v_k \rightarrow 0$ : o termo entre parênteses de cada parcela se torna o divergente do campo vetorial no ponto  $\mathbf{r}_k$ ,  $\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{r}_k)$ , e a soma sobre os volumes infinitesimais  $v_k$  se torna uma integral por todo o volume  $V$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left( \frac{\Phi_k}{v_k} \right) v_k = \iiint_V (\text{div } \mathbf{F}) dv.$$

Ou seja

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{V(S)} (\text{div } \mathbf{F}) dv. \quad (3.7)$$

Em palavras:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{O fluxo de um campo vetorial} \\ \text{através de uma} \\ \text{superfície fechada } S \end{array} \right\}$  é igual à  $\left\{ \begin{array}{l} \text{integral do divergente} \\ \text{do campo vetorial sobre o} \\ \text{volume } V \text{ limitado por } S. \end{array} \right\}$

### 3.1.3 O divergente em coordenadas cartesianas

A expressão do divergente depende do sistema de coordenadas utilizado para escrever as componentes do campo vetorial. Dado o sistema de coordenadas escolhemos a forma mais conveniente para o volume infinitesimal através de cuja superfície vamos computar o fluxo. Suponha conhecidas as componentes cartesianas do campo vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z) \hat{x} + F_y(x, y, z) \hat{y} + F_z(x, y, z) \hat{z}.$$

Como elemento de volume escolhemos um paralelepípedo de arestas  $\delta x$ ,  $\delta y$  e  $\delta z$ , paralelas, respectivamente, aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , centrado num ponto  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . O sistema está esquematizado na Figura 3.2.

As arestas são infinitesimais, de forma que podemos desconsiderar as variações na extensão de cada face e atribuir a  $\mathbf{F}$  o valor que assume no centro de cada uma. O fluxo de  $\mathbf{F}$  através da superfície do paralelepípedo pode, então, ser escrito como:

$$\begin{aligned} \delta\Phi \approx & [F_x(x + \delta x/2, y, z) - F_x(x - \delta x/2, y, z)] \delta y \delta z \\ & + [F_y(x, y + \delta y/2, z) - F_y(x, y - \delta y/2, z)] \delta x \delta z \\ & + [F_z(x, y, z + \delta z/2) - F_z(x, y, z - \delta z/2)] \delta x \delta y. \end{aligned}$$

Cada linha desta expressão representa a contribuição de duas faces opostas e paralelas. O sinal de menos vem das orientações opostas do vetor de área  $d\mathbf{A}$  para fora do volume. Isto faz com que a contribuição para o fluxo de cada par de faces paralelas dependa da diferença da componente perpendicular de  $\mathbf{F}$  nas duas faces.

Tomemos a primeira linha, dependente de  $F_x$ . Dividindo e multiplicando por  $\delta x$  ela pode ser reescrita como

$$\left[ \frac{F_x(x + \delta x/2, y, z) - F_x(x - \delta x/2, y, z)}{\delta x} \right] \delta x \delta y \delta z = \frac{\partial F_x}{\partial x} \delta v,$$

porque, no limite  $\delta x \rightarrow 0$ , o termo entre colchetes é a própria definição da derivada parcial de  $F_x$  em relação a  $x$ ,  $\frac{\partial F_x}{\partial x}$ . O produto das arestas é o próprio volume do paralelepípedo,  $\delta x \delta y \delta z = \delta v$ . Fazendo o mesmo com as duas outras linhas, obtemos

$$\delta\Phi = \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \delta v. \quad (3.8)$$

Note que, como prevíamos, o fluxo resulta proporcional ao volume  $\delta v$ . Aplicando a definição do divergente (3.6), obtemos, finalmente:

$$\text{div } \mathbf{F} = \lim_{\delta v \rightarrow 0} \frac{\delta\Phi}{\delta v} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \quad (3.9)$$

Esta é a expressão para o divergente de um campo vetorial em termos de coordenadas e componentes cartesianas. Este resultado é a origem de uma outra notação utilizada para o divergente em termos do *operador vetorial*  $\nabla$  (lê-se *nabla*) definido como:

$$\nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Com esta definição a expressão (3.8) pode ser vista como o *produto escalar* dos vetores  $\nabla$  e  $\mathbf{F}$ , e utilizamos a notação

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \text{div } \mathbf{F}.$$

As expressões para o divergente em coordenadas cilíndricas e esféricas são dadas no Apêndice A. Lá você pode observar que as expressões não cartesianas são mais complicadas e não podem ser traduzidas como o produto escalar de um operador pelo campo vetorial. Apesar disso a notação é mantida pela sua simplicidade. Outro fato aparente na notação é o caráter *escalar* do divergente, já que ele é representado por um *produto escalar* de dois vetores.

## 3.2 O rotacional e o teorema de Stokes

O rotacional é uma função associada com a circulação de um campo vetorial em torno de um ponto. Considere um campo vetorial  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ . Seja  $\Lambda_C$  circulação do  $\mathbf{F}$  ao longo do circuito  $C$  num determinado sentido, como indicado na figura 3.3:

$$\Lambda_C = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Se diminuirmos o circuito  $C$ , fazendo-o se fechar em torno de um ponto  $\mathbf{r}$ , a circulação  $\Lambda_C$  se anula. Entretanto, veremos que a circulação por unidade de área envolvida pelo circuito pode ter um limite não nulo.

### 3.2.1 Definição do rotacional

Para ver como isso ocorre, fechamos o circuito  $C$  com uma superfície  $S$ . A superfície deve ser limitada pelo circuito  $C$  (apoiada sobre  $C$ ), mas sua forma e extensão são completamente arbitrárias (veja a figura 3.3). Agora podemos dividir a superfície  $S$  em um número  $N$  arbitrário de pedaços menores que numeramos pelo índice  $k = 1, 2, \dots, N$ . Consideramos agora  $\Lambda_k$ , a circulação de  $\mathbf{F}$  ao longo do circuito  $c_k$ , envolvendo cada pedaço de área  $A_k$ , no mesmo sentido da circulação original:

$$\Lambda_k = \oint_{c_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

É claro que, para qualquer subdivisão da superfície  $S$ , vale a identidade

$$\Lambda_C = \sum_{k=1}^N \Lambda_k. \quad (3.10)$$

Isto resulta do fato de que qualquer aresta comum a duas superfícies adjacentes é percorrida em sentidos opostos nas circulações em torno de cada superfície, como indicado na figura 3.3. Estas duas contribuições se cancelam identicamente e o resultado líquido da soma é, assim, apenas a contribuição das arestas externas, que coincide com a circulação ao longo do circuito externo  $C$ .

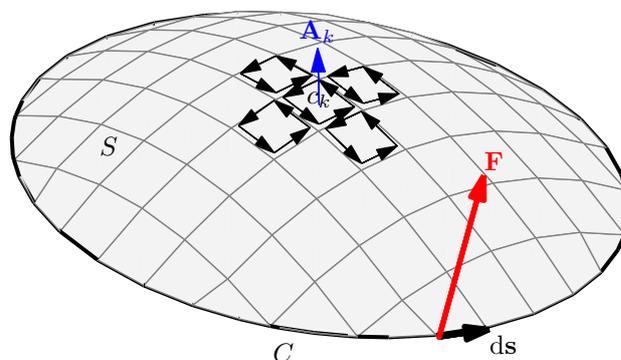


Figura 3.3: A superfície  $S$  apoiada no circuito  $C$  é subdividida em pedaços menores, cada um com área  $A_k$  envolvido pelo circuito  $c_k$ .

Tomando uma divisão mais ou menos uniforme da superfície  $S$  de área  $A_S$ , teremos  $A_k \sim A_S/N$ . Assim para cada parcela  $\Lambda_k$  temos

$$\Lambda_k \sim \frac{\Lambda_C}{N} \sim A_k \frac{\Lambda_C}{A_S} \quad \text{ou} \quad \frac{\Lambda_k}{A_k} \sim \frac{\Lambda_C}{A_S}.$$

Ou seja, no limite  $N \rightarrow \infty$ , ou  $A_k \rightarrow 0$ , as circunvoluções  $\Lambda_k$  se anulam proporcionalmente à área  $A_k$ . A densidade, circunvolução por unidade de área, entretanto, pode ter um limite não nulo quando fazemos o circuito  $c_k$  se fechar em torno do ponto  $\mathbf{r}_k$ .

O limite da circunvolução por unidade de área, entretanto, não depende apenas do ponto em torno do qual fechamos o circuito. Ele depende também da orientação espacial do circuito e do sentido em que é percorrido. Para especificar a orientação, fechamos o circuito com uma superfície com a mínima área possível e tomamos a direção perpendicular. Para especificar o sentido da circunvolução escolhemos o sentido associado à normal à superfície através da *regra da mão direita*: envolvendo o circuito com a mão direita, com os dedos apontando no sentido da circunvolução, o polegar indica o sentido da normal. O resultado está indicado na figura 3.3, onde é indicado o vetor de área  $\mathbf{A}_k$  associado à superfície  $s_k$  apoiada no circuito  $c_k$ . O vetor de área é  $\mathbf{A}_k = A_k \hat{n}_k$ , sendo  $\hat{n}_k$  o versor normal à superfície  $s_k$ .

Pode-se demonstrar que este limite da circunvolução por unidade de área em torno de um ponto se comporta como um vetor. Este vetor é denominado o *rotacional do campo vetorial*,  $\text{rot } \mathbf{F}$ . Isto significa que podemos prever o limite para qualquer orientação do circuito conhecendo o resultado de apenas três orientações independentes. Assim, quando escolhemos uma orientação do circuito, caracterizada pela normal  $\hat{n}$ , e computamos o limite da circunvolução por unidade de área obtemos a componente do vetor rotacional na direção de  $\hat{n}$ , ou seja  $(\text{rot } \mathbf{F})_{\hat{n}} = \text{rot } \mathbf{F} \cdot \hat{n}$ . Assim, definimos

$$\text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \hat{n} = \lim_{A \rightarrow 0, \mathbf{r}} \frac{1}{A} \oint_{c(A)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \quad (3.11)$$

Em palavras:

a componente ao longo de  $\hat{n}$  do **rotacional** de um campo vetorial  $\mathbf{F}$  num ponto  $\mathbf{r}$  é a circunvolução de  $\mathbf{F}$  ao longo de circuitos fechados orientados perpendicularmente a  $\hat{n}$  e percorridos no sentido prescrito pela regra da mão direita, por unidade de área envolvida pelos circuitos, no limite de área tendendo a zero em torno do ponto  $\mathbf{r}$ .

### 3.2.2 Teorema de Stokes

Para obter o teorema de Stokes, vamos expressar a identidade (3.10) utilizando a definição de rotacional. Primeiro reescrevemos a identidade como

$$\Lambda_C = \sum_{k=1}^N \Lambda_k = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\Lambda_k}{A_k} \right) A_k.$$

Agora tomamos o limite  $N \rightarrow \infty$ , ou  $A_k \rightarrow 0$ : o termo entre parênteses se torna a componente do rotacional de  $\mathbf{F}$  na direção da normal à superfície orientada em torno do ponto  $\mathbf{r}_k$ ,  $\hat{n}_k$ , e a soma se transforma na integral de área sobre a superfície  $S$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \left( \frac{\Lambda_k}{A_k} \right) A_k = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \hat{n}) dA = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}.$$

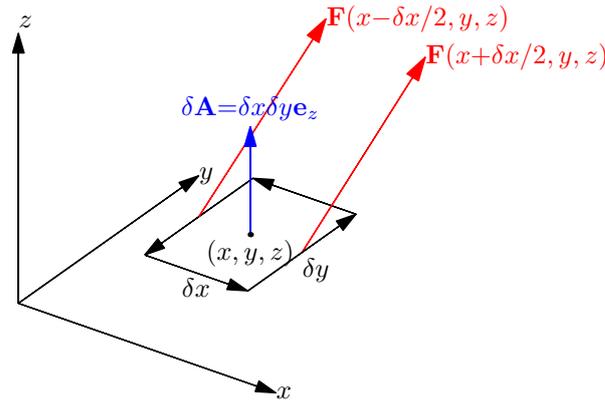


Figura 3.4: Esquema para computar a componente  $z$  do rotacional em coordenadas cartesianas. O retângulo infinitesimal de lados  $\delta x$  e  $\delta y$  é centrado no ponto  $(x, y, z)$ . O campo vetorial  $\mathbf{F}$  está indicado em dois lados opostos do retângulo.

Ou seja

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S(C)} \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}. \tag{3.12}$$

onde utilizamos  $\hat{n}dA = d\mathbf{A}$ . Este é o teorema de Stokes, que em palavras fica:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{A circulação} \\ \text{de um campo vetorial} \\ \text{ao longo de um} \\ \text{circuito fechado } C \end{array} \right\}$	é igual ao	$\left\{ \begin{array}{l} \text{fluxo do rotacional} \\ \text{do campo vetorial} \\ \text{através de uma} \\ \text{superfície qualquer } S \\ \text{apoiada no circuito } C. \end{array} \right\}$
---	------------	--

O sentido da circulação determina o sentido dos vetores de área para o cálculo do fluxo através da regra da mão direita.

### 3.2.3 O rotacional em coordenadas cartesianas

A expressão do rotacional de um campo vetorial depende do sistema de coordenadas adotado. Na figura 3.4 está esboçado um circuito infinitesimal apropriado para computar a componente  $z$  do rotacional de um campo vetorial  $\mathbf{F}$  em termos de suas componentes cartesianas. O circuito é um retângulo de arestas paralelas aos eixos  $x$  e  $y$ , de comprimentos  $\delta x$  e  $\delta y$ . Quando percorrido no sentido indicado o vetor de área aponta na direção positiva do eixo  $z$ ,  $\delta \mathbf{A} = \delta x \delta y \hat{z}$ . Como os lados são infinitesimais, tomamos para  $\mathbf{F}$  o seu valor no ponto médio de cada lado. A circulação de  $\mathbf{F}$  ao longo do retângulo se escreve

$$\begin{aligned} \delta \Lambda \approx & [F_y(x + \delta x/2, y, z) - F_y(x - \delta x/2, y, z)] \delta y \\ & + [F_x(x, y - \delta y/2, z) - F_x(x, y + \delta y/2, z)] \delta x, \end{aligned}$$

onde cada linha representa a contribuição de dois lados opostos do retângulo. Dividindo pela área do circuito,  $\delta A = \delta x \delta y$ , e invertendo a ordem dos termos na segunda linha,

obtemos

$$\frac{\delta\Lambda}{\delta A} \approx \frac{F_y(x + \delta x/2, y, z) - F_y(x - \delta x/2, y, z)}{\delta x} - \frac{F_x(x, y + \delta y/2, z) - F_x(x, y - \delta y/2, z)}{\delta y},$$

ou seja

$$(\text{rot } \mathbf{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}.$$

As outras componentes podem ser obtidas desta através das permutações cíclicas dos índices  $x, y$  e  $z$   $\{x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x\}$ . Você deve verificar que as três componentes do rotacional em coordenadas cartesianas podem ser obtidas da operação indicada pelo determinante

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

que é equivalente ao produto vetorial do operador vetorial  $\nabla$  pelo campo vetorial  $\mathbf{F}$ . Por isso utilizamos a notação

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \text{rot } \mathbf{F}$$

para o rotacional de um campo vetorial. O Apêndice A dá as expressões para o rotacional nos três sistemas de coordenadas mais utilizados. Observe que o produto vetorial só se traduz na expressão para o rotacional em coordenadas cartesianas. Esta notação utilizada para indicar o rotacional lembra o fato de que o rotacional é um *campo vetorial*.

### 3.3 As equações de Maxwell na forma diferencial

Nesta seção, vamos aplicar as noções de divergente e rotacional, juntamente com os teoremas de Gauss e Stokes para reescrever as equações de Maxwell.

#### 3.3.1 Lei de Gauss

Na forma integral a Lei de Gauss para o campo elétrico se escreve, (3.1):

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_S.$$

Substituindo o campo elétrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  pelo campo vetorial  $\mathbf{F}$  no teorema de Gauss (3.7), o membro esquerdo desta equação pode ser escrito como

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \text{div } \mathbf{E} \, dv.$$

O membro direito envolve  $Q_S$ , a carga contida dentro do volume  $V$  limitado pela superfície  $S$ . Podemos expressar  $Q_S$  como uma integral no volume através da densidade de carga  $\rho(\mathbf{r})$ :

$$Q_S = \iiint_{V(S)} \rho \, dv.$$

Assim, a Lei de Gauss implica que

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} \, dv = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{V(S)} \rho \, dv.$$

Para que as duas integrais sejam idênticas sobre qualquer volume arbitrário, é necessário que os integrandos sejam idênticos em cada ponto. Portanto em qualquer ponto do espaço  $\mathbf{r}$ :

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho.} \quad (3.13)$$

Esta é a forma puntual da Lei de Gauss. Quando o divergente é expresso num determinado sistema de coordenadas esta expressão resulta numa equação diferencial.

### 3.3.2 Lei de Gauss para o magnetismo

De forma análoga, o teorema de Gauss aplicado à equação (3.2) conduz a

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,} \quad (3.14)$$

uma vez que o fluxo de  $\mathbf{B}$  através de qualquer superfície fechada é sempre nulo.

### 3.3.3 A Lei de Faraday

A Lei de Faraday, (3.3)

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(c)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$$

envolve a circuitação do campo elétrico. Do teorema de Stokes, (3.12), escrevemos esta circuitação como o fluxo do rotacional de  $\mathbf{E}$ :

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{S(c)} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}.$$

No membro direito, podemos levar a derivada no tempo para dentro da integral, obtendo

$$\int_{S(c)} \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{S(c)} -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{A}.$$

Novamente, como esta equação se aplica a qualquer superfície apoiada num circuito fechado arbitrário, a igualdade dos fluxos implica na igualdade ponto a ponto dos dois integrandos. Assim, a Lei de Faraday implica para qualquer ponto do espaço  $\mathbf{r}$

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.} \quad (3.15)$$

### 3.3.4 A Lei de Ampère-Maxwell

A lei de Ampère-Maxwell associa a circuitação de  $\mathbf{B}$  à corrente e à derivada temporal do fluxo de  $\mathbf{E}$

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(c)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

A corrente através do circuito  $c$ ,  $I_c$ , pode ser expressa como o fluxo do vetor densidade de corrente  $\mathbf{J}$ , através da superfície apoiada no circuito  $c$ ,  $S(c)$  com o sentido da normal determinado pelo sentido da circuitação pela regra da mão direita.

$$I_c = \iint_{S(c)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}.$$

Com esta definição e o teorema de Stokes aplicado ao primeiro membro, obtemos

$$\iint_{S(c)} \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{S(c)} \left( \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{A}$$

Mais uma vez, como são arbitrários tanto o circuito quanto a superfície nele apoiada, a Lei de Ampère-Maxwell implica que em cada ponto do espaço:

$$\boxed{\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}} \quad (3.16)$$

$$\begin{array}{ll}
 \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_S & \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \\
 \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0 & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\
 \oint_c \mathbf{E} \cdot ds = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(c)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} & \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
 \oint_c \mathbf{B} \cdot ds = \mu_0 I_c + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(c)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} & \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
 \end{array}$$


---

Tabela 3.2: As leis de Maxwell do Eletromagnetismo nas suas formas integral (à esquerda) e diferencial (à direita).

### 3.3.5 As Equações de Maxwell: Resumo

No Tabela 3.2, resumimos as leis do eletromagnetismo nas suas forma integral e diferencial. Nestas equações,

$$Q_S = \iiint_{V(S)} \rho \, dv$$

é a carga total contida dentro do volume  $V$  dentro da superfície fechada  $S$  e  $\rho(\mathbf{r})$  a densidade de carga associada a cada ponto do espaço.

$$I_c = \iint_{S(c)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}$$

é a corrente total que atravessa a superfície  $S$  apoiada no circuito fechado  $c$  na direção determinada pela regra da mão direita, e  $\mathbf{J}(\mathbf{r})$  a densidade de corrente associada a cada ponto do espaço.

Na presença da matéria a carga  $Q_S$  é a carga total, ou seja, a carga livre mais a carga de polarização. Uma variação temporal da carga de polarização implica a existência de uma corrente. Esta corrente de polarização também deve ser incluída na corrente total  $I_c$ , adicionada às correntes de condução e às correntes de magnetização.

A única lei que deve ser adicionada a estas é a expressão da força de Lorentz, que define o significado dos campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  através da força sobre uma carga puntiforme  $q$  que se encontra num ponto  $\mathbf{r}$  se movendo com velocidade  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

A equação da continuidade,

$$\iint_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \frac{\partial Q_V}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

que expressa a lei da conservação da carga, está contida nas quatro Equações de Maxwell.

### 3.4 Exemplos de aplicação

1. Mostre que a integral do vetor de área sobre uma superfície fechada  $S$  é nulo, ou seja

$$\oiint_S d\mathbf{A} = 0.$$

**Solução:** Seja  $\mathbf{b}$  um campo vetorial uniforme, o que implica  $\text{div } \mathbf{b} = 0$ . Aplicando o teorema de Gauss à expressão do fluxo do campo  $\mathbf{b}$  através da superfície  $S$ , teremos

$$\oiint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_{V(S)} \text{div } \mathbf{b} \, dv = 0,$$

Mas o fluxo do vetor  $\mathbf{b}$  através da superfície  $S$  pode ser escrito como

$$\oiint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{b} \cdot \left[ \oiint_S d\mathbf{A} \right],$$

porque sendo  $\mathbf{b}$  constante, pode ser tirado da integral. Assim, como

$$\mathbf{b} \cdot \left[ \oiint_S d\mathbf{A} \right] = 0 \Rightarrow \oiint_S d\mathbf{A} = 0.$$

2. Demonstrar a igualdade vetorial

$$\text{rot } (\text{grad } \phi) = 0,$$

ou seja, que é nulo o rotacional do gradiente de qualquer campo escalar.

**Solução:** Como, por definição,

$$\nabla\phi \cdot d\mathbf{s} = d\phi,$$

a integral de linha de  $\nabla\phi$  entre dois pontos  $\mathbf{r}_1$  e  $\mathbf{r}_2$  através de um caminho qualquer é

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1).$$

Assim, a circuitação (integral de linha ao longo de um circuito fechado) do gradiente é sempre nula. Como o rotacional é a circuitação por unidade de área, ele será identicamente nulo para o gradiente de qualquer função.

Mais formalmente, imaginamos uma superfície  $S$  circunscrita pelo circuito  $c$ , sobre a qual aplicamos o teorema de Stokes:

$$\iint_S [\nabla \times (\nabla\phi)] \cdot d\mathbf{A} = \oint_c (\nabla\phi) \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Como a superfície  $S$  é arbitrária, o fluxo só pode ser nulo se

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0.$$

3. Mostrar que

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0,$$

ou seja que é nulo o divergente do rotacional de qualquer campo vetorial.

**Solução:** Considere um volume arbitrário  $V$  limitado pela superfície  $S$ . Segundo o teorema de Gauss,

$$\iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \, dv = \oiint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A}.$$

Mas, segundo o teorema de Stokes,

$$\oiint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_c \mathbf{F} \cdot ds = 0.$$

O resultado segue do fato que  $c$  é um circuito em que se apóia a superfície  $S$ . Como a superfície  $S$  é fechada,  $c$  é um circuito nulo em torno de qualquer ponto da superfície e a circuitação é identicamente nula. Uma outra maneira de obter o resultado é envolver a superfície por uma curva fechada  $c$  que a divide em duas partes  $S_1$  e  $S_2$  que se apóiam na curva  $c$ . O fluxo através de  $S$  pode ser tomado como a soma dos fluxos através de  $S_1$  e de  $S_2$ :

$$\oiint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}_1 + \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A}_2.$$

Os vetores de área devem ser orientados para fora do volume  $V$  em ambos os casos. O teorema de Stokes pode ser aplicado a cada uma das parcelas, resultando

$$\oiint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} = \oint_{c_1} \mathbf{F} \cdot ds + \oint_{c_2} \mathbf{F} \cdot ds = 0.$$

As integrais de linha são através da mesma curva  $c$ , mas a circuitação se efetua num sentido para  $S_1$  e no sentido oposto para  $S_2$ . Como as circuitações têm sinais opostos, elas se anulam identicamente.

Como o fluxo de um rotacional através de qualquer superfície fechada é sempre nulo, o seu divergente tem que necessariamente ser nulo em virtude do teorema de Gauss.

4. Mostre que as equações de Maxwell conduzem à equação da continuidade.

**Solução:** Tomemos o divergente dos dois membros da Lei de Ampère-Maxwell:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = \mu_0 \operatorname{div} \left( \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = 0.$$

O membro esquerdo é nulo devido ao resultado do exercício anterior. Assim, devemos ter

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{E}}{\partial t} = 0.$$

Mas pela Lei de Gauss,  $\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$ , ou seja

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Esta é a equação da continuidade, que como vemos segue das Equações de Maxwell. Para melhor entender o seu significado vamos integrar esta equação sobre um volume  $V$ , limitado por uma superfície fechada  $S$ .

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{J} \, dv + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \, dv = 0.$$

Aplicamos o teorema da divergência sobre o termo em  $\operatorname{div} \mathbf{J}$ , obtendo

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{J} \, dv = \oint_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}.$$

Este é o fluxo da densidade de corrente através da superfície  $S$ , ou seja a corrente que atravessa a superfície  $S$  para fora do volume  $V$ . Reconhecemos a integral em  $\rho$  como a carga contida dentro do volume  $V$ , e podemos então escrever

$$\frac{\partial Q_V}{\partial t} = - \oint_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}.$$

Esta equação representa a lei da conservação da carga de forma dinâmica. A derivada temporal da carga dentro de um volume é igual ao negativo da corrente que sai do volume através de sua superfície. Ou seja, se a carga dentro de um volume varia no tempo é porque cargas elétricas estão se movendo através de sua superfície.



# 4

## Condições de contorno

### 4.1 Equações de Maxwell em meios materiais

Nas Notas de Aula 1 e 2 vimos como descrever os campos elétrico e magnético no interior da matéria incorporando os efeitos da polarização elétrica  $\mathbf{P}$  e da magnetização  $\mathbf{M}$ . Isto é feito através de *cargas de polarização* e *correntes de magnetização*. As cargas de polarização podem ser descritas por uma densidade volumétrica de carga dada por

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P},$$

e as correntes de magnetização por uma densidade de corrente dada por

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}.$$

Estávamos então num contexto estático. Para completar o quadro mais geral, em que campos, cargas e correntes podem variar no tempo, só falta reconhecer que uma variação temporal da polarização é equivalente a um movimento de cargas (de polarização) e, portanto, uma corrente elétrica. Derivando no tempo a primeira equação acima, obtemos  $\frac{\partial \rho_P}{\partial t} = -\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ . Comparando com a equação da continuidade ( $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ), concluímos que a densidade de corrente de polarização é dada simplesmente por<sup>1</sup>

$$\mathbf{J}_P = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}.$$

Esta corrente de polarização precisa ser levada em conta na Lei de Ampère-Maxwell. Denotando densidade de correntes livres como  $\mathbf{J}_\ell$  escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} &= (\mathbf{J}_\ell + \mathbf{J}_M + \mathbf{J}_P) + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \mathbf{J}_\ell + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Com as definições dos vetores deslocamento elétrico,  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ , e do campo  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ , reagrupamos os termos e obtemos para a Lei de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_\ell + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

---

<sup>1</sup>Na seção 1.1.1 das Notas de Aula 1, vimos que uma região com polarização  $\mathbf{P}$  pode ser descrita como uma superposição de duas densidades opostas de carga  $+\rho$  e  $-\rho$  com centros separados por  $\mathbf{d}$ :  $\mathbf{P} = \rho \mathbf{d}$ . Considere a carga negativa fixa no espaço. A variação temporal da polarização, neste caso, é associada ao movimento da carga positiva, ou seja  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \rho \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} = \rho \mathbf{v} = \mathbf{J}_P$ . O mesmo resultado é obtido qualquer que seja o movimento atribuído às duas densidades de carga.

Abaixo, reescrevemos as quatro equações de Maxwell na presença da matéria

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.1) \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_\ell \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.2) \qquad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}_\ell \quad (4.4)$$

e as *relações constitutivas*

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.5) \qquad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (4.6)$$

que definem os campos  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{H}$ .

Para materiais lineares (elétrica e/ou magneticamente), as relações constitutivas se expressam como

$$\mathbf{D} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.7) \qquad \mathbf{B} = \kappa_m \mu_0 \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (4.8)$$

e os materiais são caracterizados pelos parâmetros  $\kappa$ , a constante dielétrica (ou a permissividade elétrica do meio  $\epsilon = \kappa \epsilon_0$ ) e a permeabilidade magnética relativa  $\kappa_m$  (ou a permeabilidade magnética do meio  $\mu = \kappa_m \mu_0$ ).

## 4.2 Condições de contorno.

Nosso objetivo é estudar o que acontece com os campos elétrico e magnético na superfície de separação entre dois meios com propriedades diferentes, onde os parâmetros característicos do material mudam abruptamente. As relações entre os campos elétricos e magnéticos imediatamente antes e imediatamente após uma superfície de separação entre dois meios são conhecidas globalmente como *Condições de Contorno*. Estas relações são determinadas pelas Equações de Maxwell.

A forma diferencial das Equações de Maxwell estabelecem relações entre as derivadas espaciais e temporais dos campos elétrico e magnético e as densidades de carga e corrente. Se abordarmos o problema do ponto de vista microscópico, as densidades de carga e corrente na matéria são sempre finitas. Se a derivada espacial de uma função é finita a função é contínua, ou seja, o seu valor não muda abruptamente quando se passa de um ponto para outro imediatamente vizinho. Assim, os campos elétricos e magnéticos na matéria são sempre contínuos. Não pode haver nenhuma descontinuidade nos campos, mesmo quando se passa de um meio a outro.

Entretanto, a descrição da matéria que foi empregada na seção anterior não é uma descrição microscópica. Lembre-se que os vetores polarização e magnetização são definidos como médias numa região pequena do ponto de vista macroscópico, mas que deve ser grande o suficiente para envolver um número muito grande de átomos ou moléculas. Nesta abordagem aparecem na superfície dos materiais as cargas de polarização e as correntes de magnetização. Elas representam densidades infinitas, de carga ou corrente, e

podem, portanto dar origem a descontinuidades nos campos elétrico e magnético, que neste contexto são na verdade, também, médias.

Note, entretanto, que a densidade de carga só aparece na Lei de Gauss para o campo elétrico, e a densidade de corrente só aparece na Lei de Ampère-Maxwell para o campo magnético. Assim, apenas estas duas leis podem resultar em descontinuidade em determinadas componentes dos campos na passagem de um meio para outro. As outras duas leis, a Lei de Faraday e a Lei de Gauss para o campo magnético, não contêm as densidades e vão conduzir a condições de continuidade.

Vamos obter as relações entre os campos de cada lado da superfície de separação entre dois meios. Os resultados que vamos obter são completamente gerais e se aplicam a qualquer tipo de interface.

### 4.2.1 Fluxo e circulação de um campo vetorial em torno da superfície

Para empregar as equações de Maxwell, vamos primeiro estabelecer como se expressam o fluxo e a circulação de um campo vetorial em torno de uma superfície. O esquema é mostrado na Figura 4.1: abaixo do plano esquematizado está o meio 1, e acima dele o meio 2.

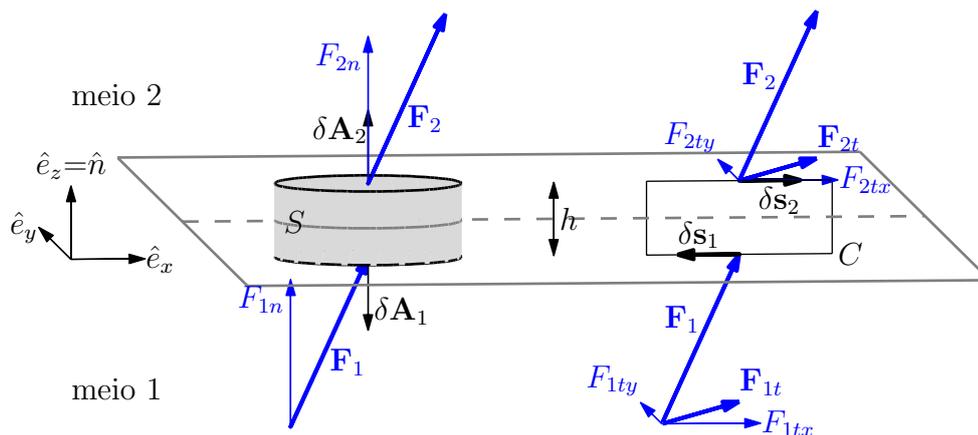


Figura 4.1: Esquema para obter o fluxo e a circulação de um campo vetorial em torno da superfície de separação de dois meios.

Qualquer vetor  $\mathbf{F}$  pode ser decomposto em três componentes. Uma é a componente na direção perpendicular à superfície de separação, a *componente normal*  $F_n = F_z$ . Esta componente é tomada como positiva no sentido do meio 1 para o meio 2. As duas outras são, necessariamente, paralelas à superfície, que denominamos *componentes tangenciais*  $\mathbf{F}_t = F_{tx} \hat{x} + F_{ty} \hat{y}$ . Utilizamos os índices 1 e 2 para denotar o vetor nos meios 1 e 2, respectivamente.

Do lado esquerdo da Figura 4.1 está indicada uma pequena superfície cilíndrica,  $S$ , cujo eixo é perpendicular à superfície e que tem cada uma de suas bases circulares de área infinitesimal  $\delta A$  em um dos meios. Quando fazemos a altura do cilindro  $h$  tender a 0, as bases tocam a superfície de separação e  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  representam o campo  $\mathbf{F}$  em cada um dos lados respectivos. Neste limite a área da superfície lateral do cilindro se anula, e o fluxo do vetor  $\mathbf{F}$  através da superfície  $S$  do cilindro se reduz a contribuição das bases:

$$\Phi_F = \mathbf{F}_1 \cdot \delta \mathbf{A}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta \mathbf{A}_2 = \delta A (F_{2n} - F_{1n}). \quad (4.9)$$

A inversão de sinal vem da inversão da direção dos vetores de área  $\delta\mathbf{A}$ , que apontam sempre para fora da superfície  $S$ . O fluxo é determinado, portanto, pela diferença das componentes normais de  $\mathbf{F}$  nos dois meios.

Do lado direito da Figura 4.1 está indicado um percurso retangular  $C$ , perpendicular à superfície, e que tem os dois lados de comprimento infinitesimal  $\delta s$  paralelos à superfície em cada um dos meios. Quando fazemos a altura do retângulo  $h$  tender a 0, estes lados tocam a superfície de separação e  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  representam o campo  $\mathbf{F}$  em cada um dos lados respectivos. Neste limite, a circuitação do vetor  $\mathbf{F}$  ao longo do circuito  $C$  do sentido indicado se reduz a contribuição dos lados paralelos:

$$\mathcal{C}_F = \mathbf{F}_1 \cdot \delta\mathbf{s}_1 + \mathbf{F}_2 \cdot \delta\mathbf{s}_2 = \delta s (F_{2tx} - F_{1tx}). \quad (4.10)$$

A circuitação é determinada, portanto, pela diferença das componentes tangenciais de  $\mathbf{F}$ , nos dois meios paralelas aos lados do circuito  $C$ .

## 4.2.2 O fluxo e as componentes normais dos campos

Vamos agora aplicar o resultado (4.9) nas equações de Maxwell que envolvem o fluxo, as leis de Gauss (4.1) para o campo magnético e (4.3) para o deslocamento elétrico.

A forma integral da lei de Gauss para o campo magnético (4.1) é

$$\Phi_B = \oiint_S \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{A} = 0,$$

que, com o resultado (4.9) resulta

$$\boxed{B_{2n} - B_{1n} = 0}, \quad (4.11)$$

que significa que **a componente normal do campo magnético é sempre contínua.**

A forma integral da lei de Gauss para o vetor deslocamento elétrico (4.3) é

$$\Phi_D = \oiint_S \mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{A} = Q_\ell,$$

onde  $Q_\ell$  é a carga livre contida no interior da superfície  $S$ . Como para o resultado (4.9) a superfície  $S$  tem volume nulo esta possível carga livre se encontra na forma de uma densidade superficial de carga

$$\sigma_\ell = \frac{\delta Q_\ell}{\delta A}.$$

Cargas livres só podem aparecer quando pelo menos um dos dois meios é um condutor. Assim, usando a expressão (4.9), obtemos

$$\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma_\ell}. \quad (4.12)$$

Ou seja, **a componente normal do vetor deslocamento elétrico é descontínua na superfície entre dois meios se houver cargas superficiais livres.** Com o mesmo procedimento aplicado ao campo elétrico, obtemos um resultado completamente análogo

$$\boxed{E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}. \quad (4.13)$$

A diferença é que, para o campo elétrico, a densidade superficial  $\sigma$  inclui as cargas livres e as cargas de polarização. Esta descontinuidade nada mais é do que a expressão do fato de que o campo elétrico de uma porção plana de carga tem direções opostas em cada um dos lados.

### 4.2.3 A circuitação e as componentes tangenciais dos campos

Vamos agora aplicar o resultado (4.10) nas duas equações de Maxwell que envolvem a circuitação, a lei de Faraday (4.2) e a lei de Ampère-Maxwell (4.4).

A forma integral da lei de Faraday (4.2) é

$$\mathcal{C}_E = \oint_C \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{s} = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S(C)} \mathbf{B} \cdot \delta\mathbf{A}.$$

Aplicada ao circuito  $C$  envolvido com o resultado (4.10),  $\Phi_B$  é o fluxo do campo magnético através da superfície do retângulo. Como a área desta superfície é nula,  $\Phi_B$  também é nulo. Assim, utilizando (4.10) para  $\mathcal{C}_E$  obtemos

$$E_{2tx} - E_{1tx} = 0.$$

Podemos fazer o mesmo considerando um circuito retangular no plano  $yz$  com  $\delta\mathbf{s}_2$  orientado na direção  $y$ , obtendo

$$E_{2ty} - E_{1ty} = 0.$$

Os dois resultados podem ser escritos de forma vetorial:

$$\boxed{\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = 0}, \quad (4.14)$$

que significa que **as componentes tangenciais do campo elétrico são sempre contínuas.**

A forma integral da lei de Ampère-Maxwell para o campo  $\mathbf{H}$  (4.4) é

$$\mathcal{C}_H = \oint_C \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{s} = -\frac{\partial\Phi_D}{\partial t} + I_\ell.$$

onde  $I_\ell$  é a corrente livre que atravessa o circuito  $C$  no sentido dado pela regra da mão direita em relação ao sentido da circuitação. No caso do circuito da Figura 4.1  $I_\ell$  é a corrente na direção  $\hat{y}$ . Como a área do circuito envolvido em (4.10) é nula, o termo envolvendo o fluxo de  $\mathbf{D}$  se anula, como no caso anterior. Além disso, uma possível corrente livre através do retângulo tem que estar na forma de uma corrente superficial descrita por uma densidade de corrente por unidade de largura

$$\mathcal{I}_\ell = \frac{\delta I_\ell}{\delta s}.$$

Esta densidade de corrente é um vetor tangente à superfície de separação entre os meios que podemos escrever como  $\vec{\mathcal{I}}_\ell = \mathcal{I}_{\ell x} \hat{x} + \mathcal{I}_{\ell y} \hat{y}$ . Usando (4.10) para o circuito da Figura 4.1, obtemos

$$H_{2tx} - H_{1tx} = \mathcal{I}_{\ell y}.$$

Se tomarmos um circuito no plano  $yz$  com  $\delta\mathbf{s}_2$  na direção  $\hat{y}$ , a corrente envolvida é a corrente na direção  $-\hat{x}$  e obtemos

$$H_{2ty} - H_{1ty} = -\mathcal{I}_{\ell x}.$$

Os dois resultados podem ser resumidos na forma

$$\boxed{\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \vec{\mathcal{I}}_\ell \times \hat{n}}. \quad (4.15)$$

Assim, **as componentes tangenciais do campo  $\mathbf{H}$  podem ser descontínuas na superfície entre dois meios quando há correntes superficiais livres.** Lembramos que correntes

livres são correntes em condutores. Com o mesmo procedimento aplicado ao campo magnético, obtemos um resultado completamente análogo

$$\boxed{\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mu_0 \vec{\mathcal{I}} \times \hat{n}.} \quad (4.16)$$

A diferença é que agora a densidade de corrente superficial  $\vec{\mathcal{I}}$  inclui tanto as correntes livres quanto as correntes de magnetização. Esta descontinuidade nada mais é do que a expressão do fato de que o campo magnético de uma lâmina de corrente tem direções opostas em cada um dos lados.

O Tabela 4.1 a seguir resume os resultados encontrados.

Condições de Contorno

$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}$	$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$	$B_{1n} = B_{2n}$	$\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t} = \mu_0 \vec{\mathcal{I}} \times \hat{n}$
	$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_\ell$		$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \vec{\mathcal{I}}_\ell \times \hat{n}$

Tabela 4.1: Resumo das condições de contorno para campos elétricos e magnéticos dos dois lados da superfície de separação entre os meios 1 e 2. O sentido do versor normal  $\hat{n}$  é do meio 1 para o meio 2.

# Apêndice A

## Gradiente, divergente e rotacional em três sistemas de coordenadas

A forma como se expressam os operadores gradiente, divergente e rotacional *dependem do sistema de coordenadas*. A tabela mostra como se apresentam em coordenadas retangulares e também em coordenadas cilíndricas e esféricas. Utilizamos as notações:  $\nabla f = \text{grad } f$  para o gradiente do campo escalar  $f(\mathbf{r})$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{A}$  e  $\nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}$  para, respectivamente, o divergente e o rotacional do campo vetorial  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

---

- **Coordenadas retangulares**  $(x, y, z)$

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}\end{aligned}$$

- **Coordenadas cilíndricas**  $(\rho, \varphi, z)$

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\varphi} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{z}\end{aligned}$$

- **Coordenadas esféricas**  $(r, \theta, \varphi)$

$$\begin{aligned}\nabla f &= \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\varphi} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \\ \nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{r} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\varphi}\end{aligned}$$

---