



Instituto de Física



---

# FAP 2292

**Notas de Aula 1**  
Dielétricos

---

1º semestre de 2009

**Autor:** Prof. Alúcio Neves Fagundes

**Revisão 2007:** Profa. Márcia C. A. Fantini, Prof. Valdir Bindilatti

# Sumário

<b>1</b>	<b>Campo elétrico da matéria polarizada</b>	<b>3</b>
1.1	Polarização num dielétrico . . . . .	3
1.1.1	Distribuição de carga num dielétrico polarizado . . . . .	4
1.2	Campos elétricos num capacitor com dielétrico . . . . .	6
1.3	Vetor deslocamento elétrico . . . . .	8
1.4	Resumo . . . . .	10
1.5	Exemplo . . . . .	11



# 1

## Campo elétrico da matéria polarizada

A introdução de uma lâmina de dielétrico no interior de um capacitor plano isolado, que apresenta uma diferença de potencial  $V_0$  entre seus terminais, provoca uma *redução* da diferença de potencial de um fator  $\kappa$ , denominado *constante dielétrica*, que é característico do dielétrico. Como

$$V = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = EL \quad (1.1)$$

onde  $L$  é a separação entre as armaduras do capacitor, temos que o campo elétrico no interior do capacitor fica também reduzido do mesmo fator, ou seja

$$V = \frac{V_0}{\kappa} \Leftrightarrow E = \frac{E_0}{\kappa}.$$

Com o capacitor isolado, a carga armazenada nas armaduras é a mesma ( $Q_0$ ), e a capacitância fica

$$C = \frac{Q_0}{V} = \frac{Q_0}{(V_0/\kappa)} = \kappa \frac{Q_0}{V_0} = \kappa C_0, \quad (1.2)$$

ou seja, aumenta pelo mesmo fator  $\kappa$ . Como isto acontece? Com que mecanismos a matéria responde à presença do campo elétrico para apresentar tais conseqüências?

### 1.1 Polarização num dielétrico

Vamos olhar a matéria a nível microscópico, procurando as respostas. Numa primeira visão, vamos olhar para moléculas *apolares*, isto é, moléculas que, na ausência de campos elétricos,

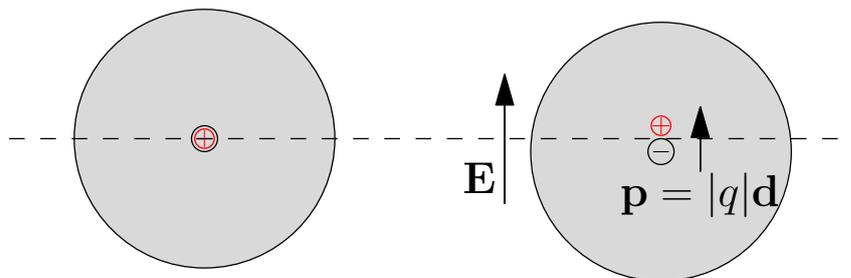


Figura 1.1: Numa molécula apolar, os centros das cargas positivas (+) e negativas (-) coincidem. Se um campo elétrico é aplicado sobre ela, há deslocamento das cargas positivas e negativas em direções opostas, com surgimento de um dipolo elétrico,  $\mathbf{p}$ .

têm os centros das cargas positivas e negativas coincidentes (Fig. 1.1). Quando um campo elétrico é aplicado, a molécula responde a este campo. A força sobre as cargas positivas é na direção do campo, enquanto que a força sobre as cargas negativas tem o sentido oposto. Sob a ação dessas forças opostas, a molécula se deforma ligeiramente adquirindo um *momento de dipolo elétrico*. Sejam  $+q$  e  $-q$  as cargas positivas e negativas totais da molécula e  $d$  a distância entre seus centros. O momento de dipolo elétrico,  $\mathbf{p}$ , é um vetor com módulo  $qd$ , direção da reta que une os centros das cargas e sentido da carga *negativa* para a carga *positiva*:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d}. \quad (1.3)$$

Observe que o campo elétrico de um próton a  $1 \text{ \AA} = 1 \times 10^{-10} \text{ m}$  de distância é de  $1,44 \times 10^{11} \text{ V/m}$ . Esta é a magnitude do campo elétrico que mantém os elétrons de um átomo ou molécula ligados ao núcleos. Campos elétricos envolvidos em circuitos elétricos, mesmo de alta tensão, são sempre muito menores que os campos elétricos moleculares. Por este motivo, as deformações produzidas por eles nas moléculas dos dielétricos são sempre muito menores que as próprias dimensões moleculares. Nestas condições o dielétrico se encontra num regime linear, em que o momento de dipolo induzido é proporcional ao campo elétrico sobre o material.

Um mecanismo diferente de polarização da matéria ocorre em materiais compostos de moléculas *polares*, que são moléculas que, como a água, têm um momento de dipolo mesmo sem a aplicação de um campo externo. Este momento de dipolo espontâneo resulta do fato de que nessas moléculas os centros das cargas positivas e negativas não são coincidentes. Tais momentos de dipolo são muito maiores do que os que são produzidos com campos ordinários sobre moléculas apolares. Entretanto, sem a aplicação de um campo elétrico, um dielétrico polar não se apresenta polarizado do ponto de vista macroscópico. O motivo é que, devido à agitação térmica, a orientação dos momentos de dipolo das moléculas individuais flutua rapidamente, apontando erráticamente em todas as direções. O resultado é que a média temporal do vetor momento de dipolo de qualquer molécula é nula. A aplicação de um campo elétrico cria uma direção mais favorável para a orientação dos dipolos espontâneos, que se contrapõe à agitação térmica e resulta numa média temporal dos dipolos moleculares diferente de zero. Para temperaturas ordinárias, o momento de dipolo molecular resultante é também proporcional ao campo elétrico.

Certos materiais com momentos moleculares permanentes, em determinadas condições, podem desenvolver um momento de dipolo macroscópico espontâneo, pelo alinhamento dos dipolos elementares, mesmo na ausência de campo elétrico aplicado. Tais materiais são chamados de *ferro-elétricos*, e não serão considerados aqui.

### 1.1.1 Distribuição de carga num dielétrico polarizado

Um dielétrico polarizado é uma coleção de dipolos elétricos moleculares separados por distâncias microscópicas. Assim como descrevemos uma distribuição de carga usando uma densidade de carga contínua, podemos definir uma densidade de momento dipolo elétrico. Como o dipolo elétrico é um vetor, esta densidade também é um vetor,  $\mathbf{P}$ , e se denomina *polarização elétrica*. Tomemos um volume  $dV$  que seja infinitesimal do ponto de vista macroscópico, mas que contenha um grande número de dipolos moleculares. A polarização em qualquer ponto  $\mathbf{r}$  dentro do volume  $dV$  é definida de tal forma que o produto  $\mathbf{P}dV$  resulte no momento de dipolo elétrico total  $d\mathbf{p}$  contido dentro do volume  $dV$ , ou seja:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r})dV = \sum_{i(dV)} \mathbf{p}_i = d\mathbf{p}. \quad (1.4)$$

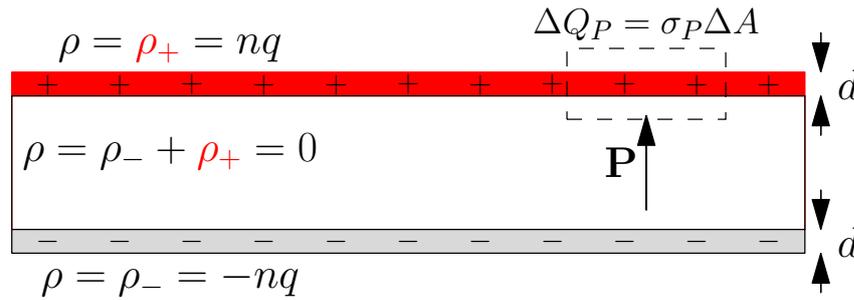


Figura 1.2: Distribuição de carga numa placa dielétrica uniformemente polarizada. A distância  $d$  foi exagerada para maior clareza.

A soma vetorial indicada é sobre todos os momentos moleculares  $\mathbf{p}_i$  dentro do volume infinitesimal, resultando no momento de dipolo elétrico total dentro dele.

Observe que a dimensão da polarização elétrica é de [carga]/[área], que é idêntica à dimensão da densidade superficial de carga. A sua unidade no SI é, portanto, a mesma ou seja  $C/m^2$ .

Para ilustrar, suponha um material dielétrico formado por  $n$  moléculas por unidade de volume, uniformemente polarizado. Todas as moléculas têm o mesmo momento de dipolo, ou seja  $\mathbf{p}_i = q\mathbf{d}$ . Assim, o momento total dentro de um volume qualquer  $dV$ , dentro do dielétrico, é o número de moléculas no seu interior multiplicado pelo momento de cada uma, ou seja  $d\mathbf{p} = ndVq\mathbf{d}$ . Neste caso vemos que o vetor polarização é

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = nq\mathbf{d} \quad (1.5)$$

para qualquer ponto  $\mathbf{r}$  no interior do dielétrico.

Para entender melhor a situação, vamos descrever a distribuição de carga correspondente a esta polarização uniforme de uma maneira alternativa. Podemos modelar a distribuição de carga pela superposição de duas distribuições de carga uniformes: a das cargas positivas  $\rho_+ = +nq$  e a das cargas negativas  $\rho_- = -nq$ . Quando as moléculas estão relaxadas (nenhum campo elétrico atuando sobre elas) a superposição das duas distribuições de carga se anula idênticamente, e a densidade total de carga é nula (tanto dentro quanto fora do dielétrico) como era de se esperar. Quando o dielétrico está polarizado as distribuições de carga se encontram deslocadas relativamente, da distância  $d$ . A distribuição de carga resultante está esquematizada na Figura 1.2 para um dielétrico em forma de placa, com a polarização uniforme  $\mathbf{P}$  perpendicular às suas faces. Notamos que a densidade de carga total é nula no interior do dielétrico, mas não nas duas lâminas de espessura  $d$  nas duas faces perpendiculares a  $\mathbf{P}$ . As cargas não nulas decorrentes da polarização de dielétricos são denominadas *cargas de polarização*. No caso de polarização uniforme, cargas de polarização só aparecem na superfície dos dielétricos.

Vamos obter a carga de polarização  $\Delta Q_P$  dentro do volume delimitado pela superfície tracejada indicada na figura. A superfície intercepta um volume  $d \times \Delta A$  da região da face superior do dielétrico onde a densidade de carga é  $\rho = nq$ . Assim, a carga de polarização dentro da superfície fechada é

$$\Delta Q_P = \rho d \Delta A = nq \Delta A = P \Delta A.$$

Você pode verificar que este resultado é completamente equivalente a:

$$\Delta Q_P = - \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}, \quad (1.6)$$

ou seja, a carga de polarização num volume limitado por uma superfície fechada é o *negativo* do fluxo do vetor polarização através da superfície. Esta última expressão é geral e vale em qualquer situação, não apenas para o caso de polarização uniforme. Quando a polarização não é uniforme (varia ao longo do volume do dielétrico) esta expressão indica que, além de cargas superficiais, pode haver também cargas de polarização no interior do dielétrico.

Como a distância  $d$  é sub-microscópica, é conveniente tratar as cargas de polarização superficiais utilizando uma densidade superficial de carga,  $\sigma_P$  definida de forma que  $dQ_P = \sigma_P dA$ . No exemplo da placa teremos:

$$\sigma_P = \rho d = \pm n q d = \pm n p_0 = \pm P,$$

com os sinais positivo e negativo correspondendo às placas superior e inferior, respectivamente.

A expressão acima é um caso particular da expressão geral para  $\sigma_P$  que vale para uma orientação qualquer da polarização em relação à superfície do dielétrico, que pode ser obtida da aplicando-se a Eq.(1.6):

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{n}. \quad (1.7)$$

Aqui  $\hat{n}$  é o versor perpendicular à superfície *do dielétrico* apontando para fora. Verifique como, no exemplo da placa, isto resulta em  $\sigma_P = +P$  na face superior,  $\sigma_P = -P$  na face inferior, e  $\sigma_P = 0$  nas quatro faces laterais do dielétrico.

## 1.2 Campos elétricos num capacitor com dielétrico

Até aqui vimos como conhecendo  $\mathbf{P}$ , a polarização de um dielétrico, podemos obter a distribuição das cargas de polarização. O que falta é, assim, poder prever qual será a polarização de um dielétrico. O que caracteriza um material dielétrico é o fato de que os momentos de dipolo moleculares induzidos e, portanto, a própria polarização  $\mathbf{P}$  são proporcionais ao campo elétrico sobre as moléculas. Isto pode ser expresso em termos da relação

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (1.8)$$

onde  $\chi_e$ , a *susceptibilidade elétrica*, é um parâmetro adimensional que é característico do material. Em eletrostática  $\chi_e$  é uma constante para cada material. (Sob campos variáveis no tempo ele é uma função da frequência.) Se o campo elétrico se torna muito intenso a resposta do dielétrico deixa de ser linear e, eventualmente, ocorre o *rompimento dielétrico*, a cargas se soltam dos átomos e o material passa a ser condutor. A magnitude do campo elétrico que provoca este rompimento é denominada *rigidez dielétrica* do material.

O campo elétrico que aparece na Eq. (1.8)  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico no ponto  $\mathbf{r}$  resultante de todas as cargas no sistema, inclusive das próprias cargas de polarização. Como  $\mathbf{P}$  depende do campo total, teríamos que conhecer o campo para determinar as cargas de polarização. Mas teríamos que conhecer as cargas de polarização para determinar  $\mathbf{E}$ . O problema não parece simples, e realmente não o é numa situação genérica. Mas em situações onde há simetria que permite utilizar a Lei de Gauss para prever os campos elétricos ele se torna quase trivial. Vamos estudar uma destas situações.

Consideremos um capacitor de placas paralelas de área  $A$  espaçadas de uma distância  $d$  muito pequena preenchido por um dielétrico, como esquematizado na Figura 1.3. Seja  $Q_0 = \sigma_0 A$  a carga dos seus eletrodos. Esta é a carga transferida pela bateria de uma placa para outra. Estas cargas que se acumulam na superfície de condutores, que podem ser medidas ou controladas externamente, são chamadas *cargas livres*. Elas originam o campo elétrico

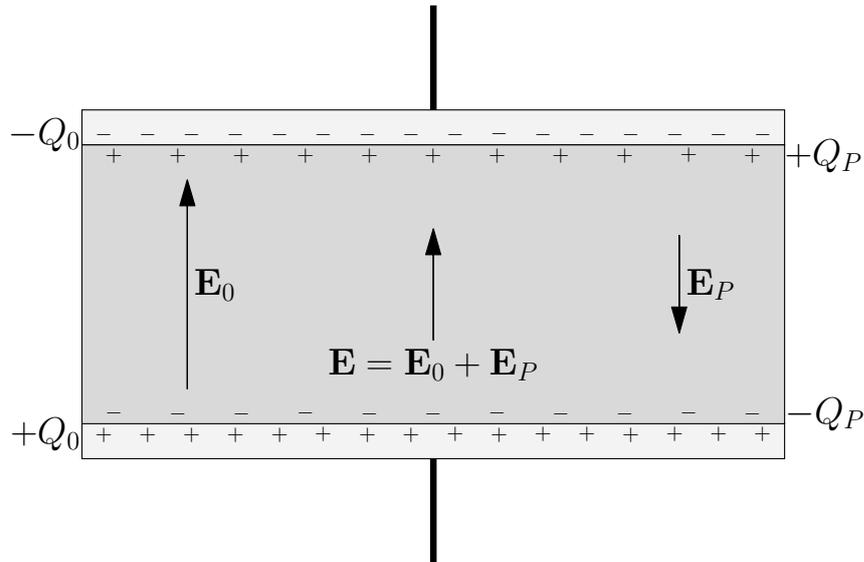


Figura 1.3: Cargas e campos num capacitor com dielétrico. As *cargas livres*  $\pm Q_0$  nos eletrodos são a fonte do campo  $\mathbf{E}_0$ . As *cargas de polarização*  $\pm Q_P$  na superfície do dielétrico são a fonte do campo  $\mathbf{E}_P$ .  $\mathbf{E}$  é o campo resultante no interior do capacitor que determina a polarização  $\mathbf{P}$  do dielétrico.

$\mathbf{E}_0$ , indicado na figura, que seria o campo elétrico resultante se o dielétrico não estivesse presente. Este campo é praticamente uniforme em todo o interior do capacitor, e só varia significativamente perto das bordas. Denotando por  $\hat{z}$  a perpendicular às placas no sentido de  $\mathbf{E}_0$ , ele se escreve:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{z}.$$

Não conhecemos o tamanho da polarização do dielétrico, mas pela simetria do problema ela deve ser paralela ao campo  $\mathbf{E}_0$ , como indicado na figura, e também uniforme. Esta polarização uniforme  $\mathbf{P} = P \hat{z}$  resulta nas cargas de polarização  $Q_P = \pm \sigma_P A$ , onde, da Eq. (1.7),  $\sigma_P = P$ , distribuídas uniformemente nas faces do dielétrico. Estas cargas, por sua vez, dão origem ao campo elétrico  $\mathbf{E}_P$  como indicado, também aproximadamente uniforme em todo o interior do capacitor:

$$\mathbf{E}_P = -\frac{\sigma_P}{\epsilon_0} \hat{z} = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}.$$

Note que o campo devido às cargas de polarização é no sentido contrário do vetor polarização e se opõe ao campo  $\mathbf{E}_0$  das cargas livres. O campo elétrico resultante entre as placas do capacitor é a soma vetorial destas duas contribuições, e portanto também uniforme:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_P = \frac{\sigma_0 - \sigma_P}{\epsilon_0} \hat{z} = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}.$$

Podemos agora utilizar a Eq. (1.8),  $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$  para eliminar  $\mathbf{P}$  desta equação, obtendo

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \chi_e \mathbf{E}$$

Isolando o campo elétrico resultante  $\mathbf{E}$ , obtemos finalmente,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + \chi_e} = \frac{\mathbf{E}_0}{\kappa} = \frac{1}{\kappa} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \hat{z}.$$

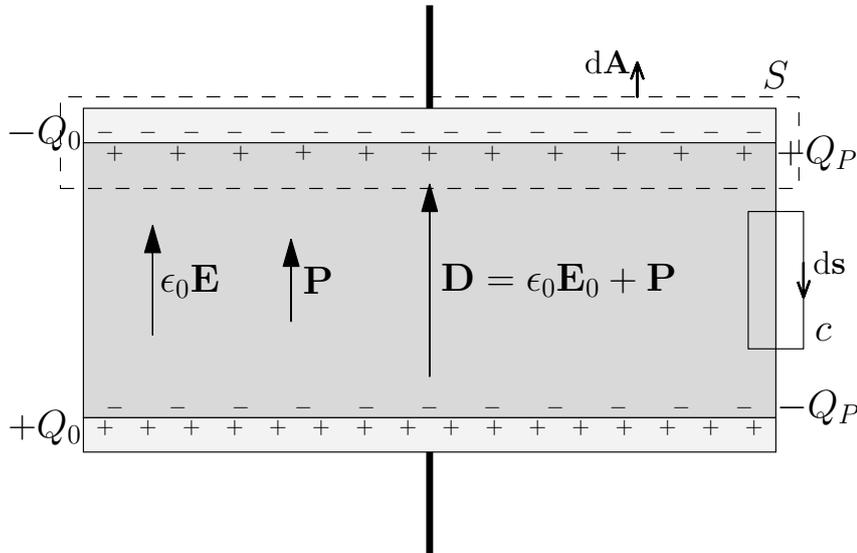


Figura 1.4: Lei de Gauss na presença de dielétrico polarizado.

### A constante dielétrica

O problema está resolvido e o resultado mostra que, para uma dada carga livre  $Q_0$  nas placas, o campo elétrico no interior do capacitor com dielétrico é reduzido em relação ao campo do capacitor em vácuo devido à polarização do dielétrico. O fator de redução

$$\kappa = 1 + \chi_e$$

é a *constante dielétrica* do material.

Tendo obtido o campo resultante, a polarização segue da Eq. (1.8)

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = \frac{\chi_e}{\kappa} \sigma_0 \hat{z},$$

que resulta para as cargas de polarização (com  $\chi_e = \kappa - 1$ )

$$\sigma_P = P = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0, \quad \text{ou} \quad Q_P = \frac{\kappa - 1}{\kappa} Q_0.$$

## 1.3 Vetor deslocamento elétrico

Os resultados anteriores foram obtidos no caso particular do capacitor de placas paralelas. Em capacitores com outra geometria, as relações entre os campos elétricos e as cargas livres ou de polarização serão diferentes. A não ser em determinadas geometrias (o capacitor plano sendo uma delas), os campos elétricos e as polarizações, não serão uniformes, mas terão uma dependência espacial ditada pela configuração das placas do capacitor. Entretanto, se o espaço entre as placas de um capacitor qualquer estiver *completamente* preenchido com um único dielétrico de constante  $\kappa$ , o resultado será o mesmo, ou seja: para uma dada carga livre nas placas do capacitor, o campo elétrico resultante entre elas será  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\kappa} \mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ . Vamos ver porque isto acontece.

Vamos aplicar a lei de Gauss a uma superfície que contenha em seu interior tanto cargas livres quanto cargas de polarização, como a superfície  $S$  indicada pela linha tracejada da Figura 1.3:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_S = \frac{1}{\epsilon_0} (Q_{\text{livre}} + Q_{\text{pol}}).$$

O campo elétrico  $\mathbf{E}$  é o campo resultante em cada ponto da superfície  $S$  e a carga  $Q_S$  é a carga total dentro da superfície que envolve tanto as cargas livres quanto as cargas de polarização. No caso da superfície na placa superior do capacitor da Figura 1.3:  $Q_S = -Q_0 + Q_P$ . Para qualquer caso em que haja um dielétrico polarizado, a carga de polarização dentro de uma superfície qualquer é determinada pela polarização do dielétrico  $\mathbf{P}$ , através pela Eq. (1.6)

$$Q_{\text{pol}} = - \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}.$$

Podemos, então, reescrever a Lei da Gauss na forma

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{livre}} - \oint \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A},$$

ou

$$\oint (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{livre}}.$$

Isto mostra que o fluxo da combinação vetorial  $\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$  sobre uma superfície qualquer é determinado apenas pelas *cargas livres* internas à superfície. A este vetor obtido da combinação de campo elétrico com polarização elétrica se dá o nome de *deslocamento elétrico*:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (1.9)$$

Note que esta definição não passa de um artifício matemático: os dois vetores somados,  $\epsilon_0 \mathbf{E}$  e  $\mathbf{P}$ , têm a mesma dimensão, mas representam grandezas de natureza completamente diferentes. O vetor  $\mathbf{D}$ , portanto, não representa nenhuma grandeza física diretamente mensurável. Mesmo assim ele é utilizado porque simplifica os cálculos em alguns casos. O equivalente da Lei de Gauss para  $\mathbf{D}$  fica,

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{livre}}, \quad (1.10)$$

e envolve apenas as cargas livres dentro da superfície.

Utilizando a Eq. (1.8),  $\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}$ , obtemos que dentro de um dielétrico vale

$$\mathbf{D} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \kappa \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (1.11)$$

O parâmetro  $\epsilon = \kappa \epsilon_0$  é uma outra maneira de expressar a constante dielétrica. Este parâmetro, por analogia com  $\epsilon_0$ , é denominado *permissividade elétrica* do material.

Observe que a Lei de Gauss para  $\mathbf{D}$ , a menos do fator  $\epsilon_0$ , é equivalente à do campo elétrico  $\mathbf{E}_0$  devido *apenas* às cargas livres. No caso de um capacitor com o espaço entre as placas preenchido completamente com um único dielétrico, determinar  $\mathbf{D}$  utilizando a Eq. (1.10) é completamente similar a determinar o campo elétrico das cargas livres  $\mathbf{E}_0$ .<sup>1</sup>

<sup>1</sup>É importante salientar que este resultado simples não é geral. Ele só vale em situações de alta simetria onde existem as chamadas superfícies gaussianas. O motivo é que a similaridade entre as equações para  $\mathbf{D}$  e o campo elétrico das cargas livres  $\epsilon_0 \mathbf{E}_0$  não é completa. Os seus fluxos sobre uma superfície fechada são idênticos, mas o campo elétrico é sempre conservativo o que não é o caso do vetor deslocamento elétrico. A integral de linha de  $\mathbf{D}$  num circuito fechado qualquer, como o circuito  $c$  indicado na Figura 1.4, é:

$$\oint_c \mathbf{D} \cdot ds = \oint_c (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot ds = \oint_c \epsilon \mathbf{E}_0 \cdot ds + \oint_c \mathbf{P} \cdot ds.$$

Como o primeiro termo da soma é sempre nulo para o campo eletrostático, segue que

$$\oint_c \mathbf{D} \cdot ds = \oint_c \mathbf{P} \cdot ds.$$

Assim, para o capacitor da Figura 1.4 podemos aplicar a Lei de Gauss para  $\mathbf{D}$  na superfície  $S$ , por exemplo, e obter

$$\mathbf{D} = \sigma_0 \hat{z}.$$

Com isso,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} = \frac{\sigma_0}{\epsilon} \hat{z} = \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0} \hat{z}.$$

Este resultado é idêntico ao obtido na seção anterior onde consideramos as cargas de polarização explicitamente.

## 1.4 Resumo

$$(1.6) \quad Q_{\text{pol}} = - \oint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} \quad (1.7) \quad \sigma_{\text{pol}} = \mathbf{P} \cdot \hat{n}$$

$$\epsilon_0 \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{livre}} + Q_{\text{pol}}$$

$$(1.9) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.10) \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{livre}}$$

$$(1.8) \quad \mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (1.11) \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\epsilon = (1 + \chi_e) \epsilon_0 = \kappa \epsilon_0$$

---

Assim, a integral de linha do vetor  $\mathbf{D}$  num circuito fechado *pode não ser nula*. Este é o caso no circuito *c* exemplificado, já que  $\mathbf{P}$  só é não nulo no interior do dielétrico. Isto faz com que, em geral, o vetor  $\mathbf{D}$  não se comporte como um campo eletrostático.

Lembre-se que a solução que estamos assumindo para o capacitor plano (um campo uniforme no interior e nulo do lado de fora) é uma aproximação que só vale longe das bordas. Na região em torno das bordas o campo elétrico se modifica e só se anula gradualmente do lado de fora do capacitor. A circulação do campo elétrico real, mesmo num circuito como *c*, é *sempre nula*. Isto não acontece com a circulação de  $\mathbf{D}$  porque na parte do circuito dentro do dielétrico, onde  $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , mas do lado de fora  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ .

## 1.5 Exemplo

Um capacitor de placas paralelas de área  $A$  é preenchido com dois dielétricos de constantes  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  com espessuras  $d_1$  e  $d_2$ , respectivamente, como mostra a figura ao lado, de forma que a separação entre as placas é  $d = d_1 + d_2$ . Qual é a capacitância do sistema?

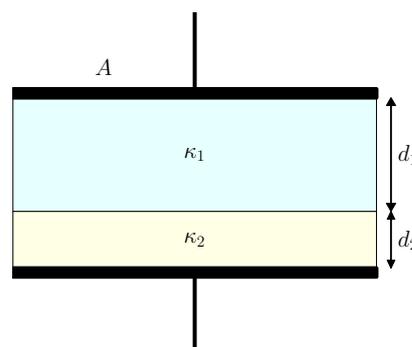


Figura 1.5: Capacitor plano com dois dielétricos.

Para determinar a capacitância, supomos cargas livres  $\pm Q_0$  nos eletrodos, como esquematizado na Fig. 1.6. Por simetria, estas cargas se distribuem uniformemente nas superfícies internas dos eletrodos. Assim, o vetor deslocamento elétrico é uniforme no interior do capacitor apontando na direção da placa com  $+Q_0$  para a placa com  $-Q_0$ . Nesta geometria, a lei de Gauss para o vetor  $D$  aplicada às superfícies  $S_1$  ou  $S_2$  indicadas na figura, resulta que o vetor deslocamento elétrico é o mesmo nos dois dielétricos. Explicitamente:

$$D_1 = D_2 = D = \frac{Q_0}{A} = \sigma_0.$$

Na Fig. 1.6 o vetor  $D$  está representado por linhas de força.

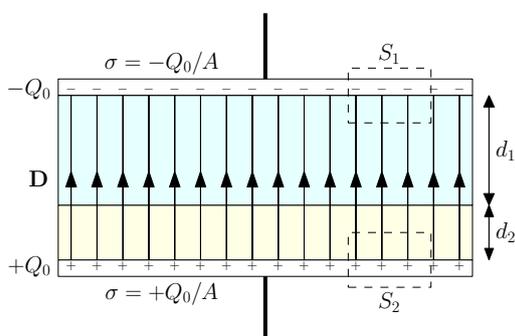


Figura 1.6: Vetor deslocamento elétrico  $D$  no capacitor plano com dois dielétricos. Nesta geometria,  $D$  é determinado apenas pelas cargas livres  $Q_0$ .

Como  $D = \epsilon E = \kappa \epsilon_0 E$ , o campo elétrico é diferente em cada dielétrico, ou seja

$$E = \begin{cases} E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{1}{\kappa_1} \frac{Q_0}{\epsilon_0 A}, & \text{no dielétrico 1} \\ E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{1}{\kappa_2} \frac{Q_0}{\epsilon_0 A}, & \text{no dielétrico 2.} \end{cases}$$

Na Fig. 1.7 o campo elétrico é representado por linhas de força assumindo  $\kappa_1 = 3$  e  $\kappa_2 = 2$ . Também estão indicadas as cargas de polarização  $Q'$  nas superfícies dos dielétricos. É a presença dessas cargas de polarização que provoca a descontinuidade do campo elétrico na interface entre os dois dielétricos.

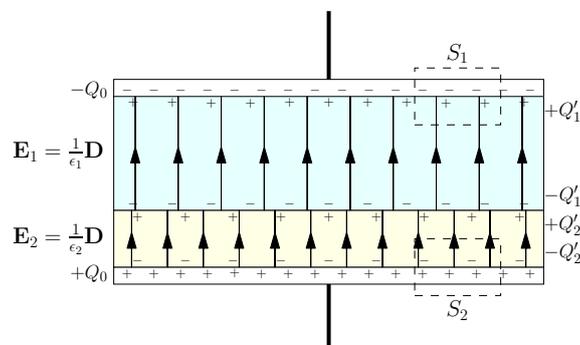


Figura 1.7: Campo elétrico no capacitor plano com dois dielétricos. As cargas de polarização  $Q'$  nas superfícies dos dielétricos também estão indicadas.

A diferença de potencial entre os dois eletrodos fica

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \left( \frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} \right) \frac{Q_0}{\epsilon_0 A}.$$

Como  $V = Q_0/C$ , obtemos

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d_1/\kappa_1 + d_2/\kappa_2}.$$

O resultado mostra que o sistema é equivalente à associação de dois capacitores em série, um com capacitância  $C_1 = \kappa_1(\epsilon_0 A/d_1)$  e o outro com capacitância  $C_2 = \kappa_2(\epsilon_0 A/d_2)$ .

Para ilustração vamos considerar um exemplo específico. O capacitor tem área  $A = 1,00 \text{ cm}^2$  e espaçamento  $d = 50 \text{ }\mu\text{m}$ . O preenchimento é feito com uma camada de  $d_1 = 25 \text{ }\mu\text{m}$  de espessura de poliestireno ( $\kappa_1 = 2,6$ ) e outra de  $d_2 = 25 \text{ }\mu\text{m}$  de neopreno ( $\kappa_2 = 6,7$ ).

Para capacitância, a expressão anterior resulta (com  $\epsilon_0 = 8,8542 \text{ pF/m}$ )

$$C = 66,3 \text{ pF}.$$

A sua capacitância em vácuo seria  $C_0 = \epsilon_0 A/d = 17,7 \text{ pF}$ .

Suponhamos que ele está ligado a uma bateria cuja força eletromotriz é de 100 V. Quais serão os campos e cargas no sistema?

- A carga livre, nos eletrodos, será simplesmente

$$Q_0 = CV = 6,63 \text{ nC},$$

correspondendo a uma densidade superficial de carga de

$$\sigma_0 = \frac{Q_0}{A} = 6,63 \text{ nC/cm}^2 = 6,63 \times 10^4 \text{ nC/m}^2 = 6,63 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2.$$

- Isto é numericamente igual ao módulo do vetor deslocamento elétrico no interior do capacitor

$$D = \sigma_0 = 6,63 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2.$$

- As polarizações dos dielétricos podem ser obtidas de

$$D = \epsilon_0 E + P = \epsilon E = \kappa \epsilon_0 E \Rightarrow P = \left( 1 - \frac{1}{\kappa} \right) D,$$

resultando

$$\begin{aligned} P_1 &= 4,08 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2, \text{ no poliestireno e} \\ P_2 &= 5,64 \times 10^{-5} \text{ C/m}^2, \text{ no neopreno.} \end{aligned}$$

Como nesta geometria  $\sigma_P = P$ , segue que as cargas de polarização são

$$\begin{aligned} Q'_1 &= AP_1 = 4,08 \text{ nC, no poliestireno e} \\ Q'_2 &= AP_2 = 5,64 \text{ nC, no neopreno.} \end{aligned}$$

- O campo elétrico, de  $D = \epsilon E$ , resulta

$$E_1 = \frac{1}{\kappa_1 \epsilon_0} D = 2,88 \times 10^6 \text{ V/m, no poliestireno e}$$

$$E_2 = \frac{1}{\kappa_2 \epsilon_0} D = 1,12 \times 10^6 \text{ V/m, no neopreno.}$$

Para comparação, os valores da rigidez dielétrica dos dois materiais são  $24 \times 10^6 \text{ V/m}$  e  $12 \times 10^6 \text{ V/m}$ , respectivamente.

Se o capacitor tivesse ar entre suas placas, com  $C_0 = 17,7 \text{ pF}$ , a tensão necessária para obter a mesma carga livre  $Q_0 = 6,63 \text{ nC}$  seria  $V_0 = Q_0/C_0 = 374 \text{ V}$ . O campo elétrico entre as placas seria  $E_0 = D/\epsilon_0 = V_0/d = 7,49 \times 10^6 \text{ V/m}$ , acima da rigidez dielétrica do ar que é de  $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ , e o capacitor não suportaria a tensão aplicada. Com uma tensão  $V = 100 \text{ V}$  o campo elétrico seria  $E = V/d = 2,00 \times 10^6 \text{ V/m}$ , com uma carga livre de apenas  $Q_0 = C_0 V = 1,77 \text{ nC}$ .