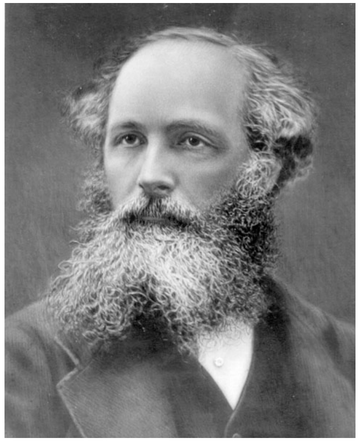
Física Moderna II
Aula 07

Marcelo G Munhoz
Edifício HEPIC, sala 202, ramal 916940
munhoz@if.usp.br

Abordagem estatística

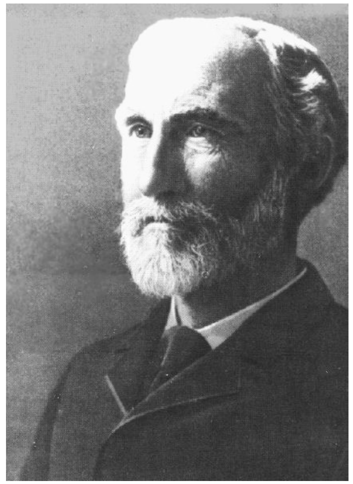
- Em meados do século XIX, assumindo que um gás é formado por pequenas unidades (moléculas), Maxwell calculou a distribuição de velocidades dessas moléculas no estado de equilíbrio
- Em seguida, ele correlacionou essa distribuição com propriedades macroscópicas do gás, como temperatura e pressão



Abordagem estatística

- Boltzmann e Gibbs deram continuidade ao trabalho de Maxwell, estabelecendo as bases da interpretação microscópica para propriedades macroscópicas de sistemas físicos

- A hipótese fundamental deste trabalho é que todas as possíveis maneiras de se distribuir a energia de um sistema entre seus constituintes são igualmente prováveis



Distribuição de Maxwell-Boltzmann

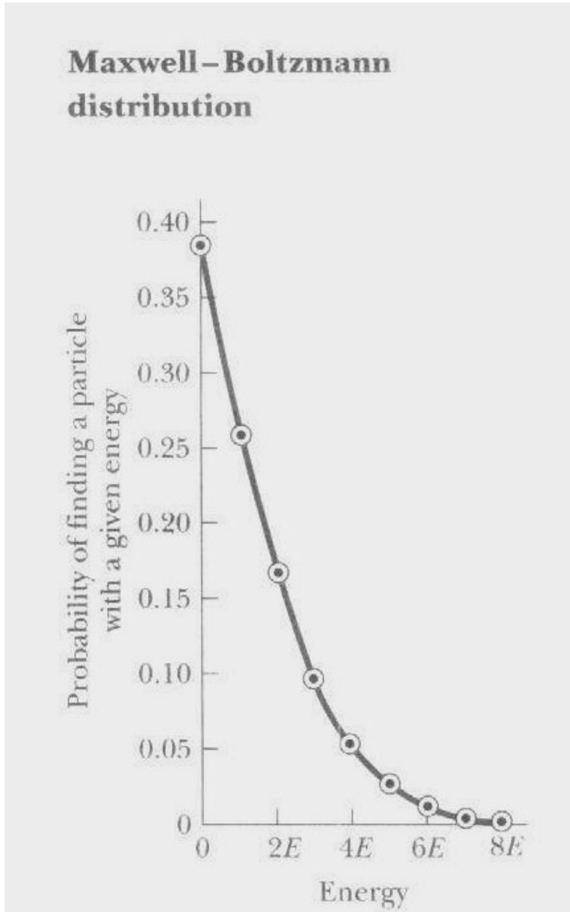
- Como se distribuem os constituintes de um sistema físico entre os vários estados (valores de energia ou outra grandeza) que eles podem assumir?
- Precisamos fazer algumas hipóteses:
  - Os constituintes são distinguíveis
  - A presença de uma partícula em um estado não interfere na probabilidade de outra partícula também ser adicionada nesse estado
  - O estado de equilíbrio é a forma mais provável de distribuir os constituintes entre os vários valores de energia possíveis mantendo o número de constituintes e energia total do sistema fixos

Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- A distribuição de Maxwell-Boltzmann é dada por:

$$P_{MB}(E) = Ae^{-E_i/k_BT}$$

- onde k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do sistema



Abordagem estatística na física quântica

- Esse resultado é válido na física quântica também?
- Quais são as diferenças na física quântica que limitam a validade deste resultado?

Abordagem estatística na física quântica

- Física clássica: os constituintes são distinguíveis
- É possível distinguir duas partículas do mesmo tipo (dois elétrons, dois prótons, etc.) do ponto de vista da mecânica quântica?
    - Não!

Partículas Idênticas

- A consequência desse fato é que **observáveis** não podem depender de uma possível identificação das partículas
- Como podemos expressar isso formalmente na mecânica quântica?

Partículas Idênticas

- A única maneira de termos uma função de onda que representa observáveis que são **independentes** dessa troca de partículas é escrevendo funções de onda simétricas (para *bósons*) ou anti-simétricas (para *férmions*)

Abordagem estatística na física quântica

- Física clássica: a presença de uma partícula em um estado não interfere na probabilidade de outra partícula também ser adicionada nesse estado
- Isso é válido na mecânica quântica?
  - Não!

Princípio de Exclusão

- O Princípio de Exclusão de Pauli afirma que férmions não podem ocupar o mesmo estado quântico ao mesmo tempo, ao contrário dos bósons
- Esse fato, aliado a indistinguibilidade das partículas que impõem funções de onda com propriedade de simetria para sistemas de partículas idênticas, cria uma dependência na ocupação de um estado com relação a sua ocupação corrente

Abordagem estatística na física quântica

- *Se já existem n férmions em um estado quântico, a probabilidade para que um outro se junte a eles será* ***reduzida*** *por um fator de inibição de (1-n) do que seria esta probabilidade se não houvesse uma exigência quântica de indistinguibilidade*

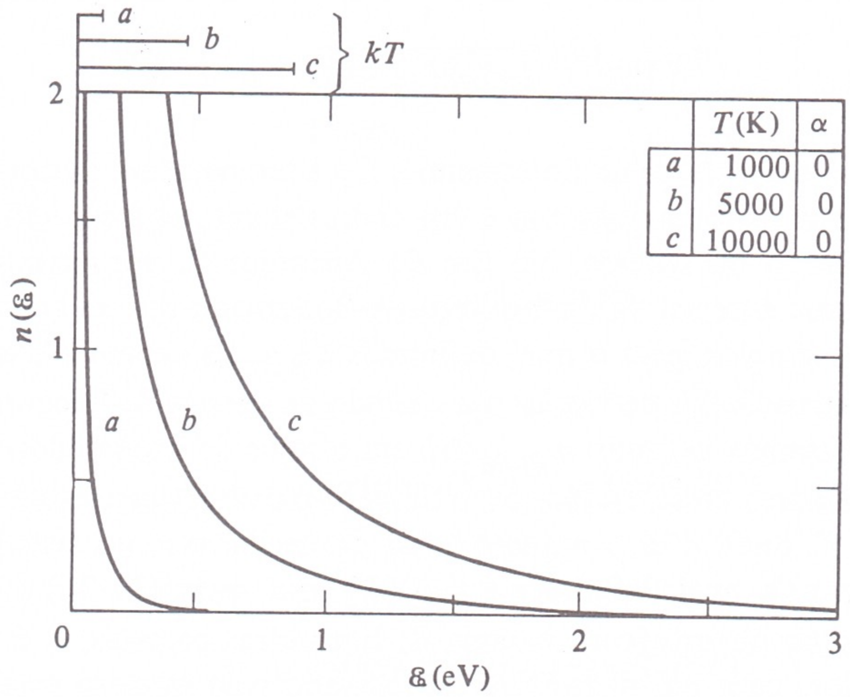
Abordagem estatística na física quântica

- *Se já existem n bósons em um estado quântico, a probabilidade para que um outro se junte a eles será* ***aumentada*** *por um fator de (1+n) do que seria essa probabilidade se não houvesse uma exigência quântica de indistinguibilidade*

Distribuições Quânticas

- A partir desse fator e assumindo um sistema em equilíbrio térmico com o chamado balanço detalhado, obtemos que a distribuição de probabilidade para bósons é dada por:

$$n_{Bose}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\epsilon/kT} - 1}$$

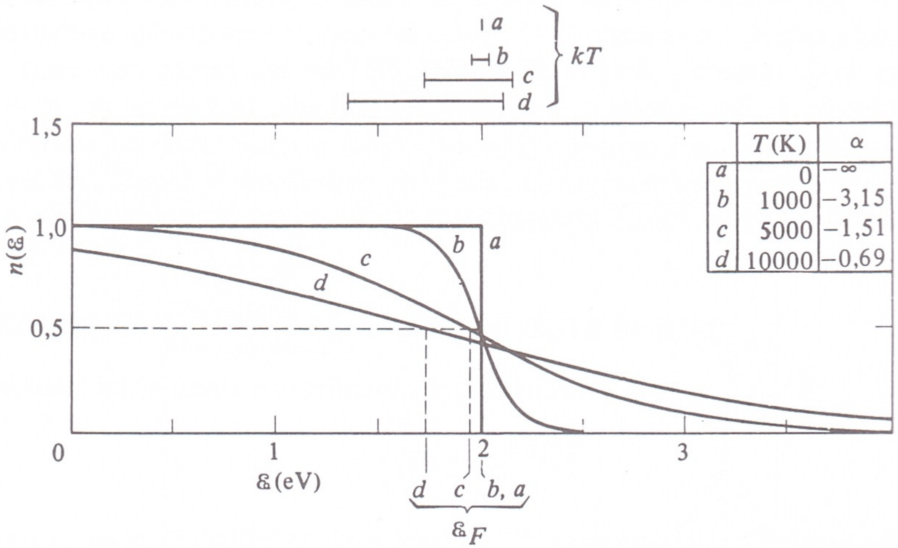


Distribuições Quânticas

- De forma semelhante, tem-se que a distribuição de probabilidade para férmions é dada por:

$$n_{Fermi}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\alpha}e^{\epsilon/kT}+1}$$

$$n_{Fermi}(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\epsilon_F)/kT}+1}$$



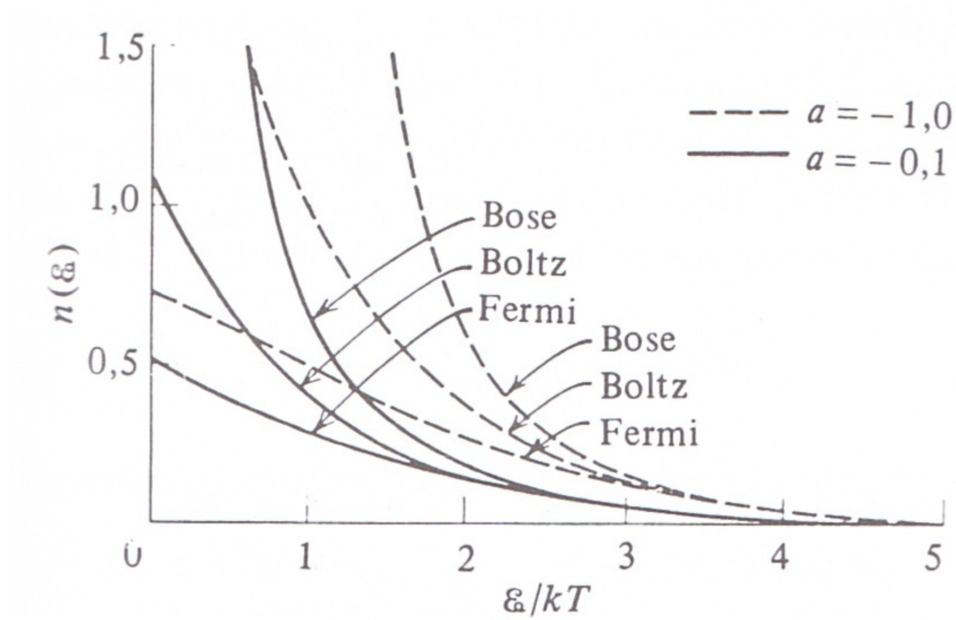
Distribuições Quânticas

- Uma comparação entre as três distribuições: clássica, de bósons e de férmions

$$n_{Boltz}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\epsilon/kT}}$$

$$n_{Bose}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\epsilon/kT} - 1}$$

$$n_{Fermi}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\epsilon/kT} + 1}$$



Abordagem estatística na física quântica

- Como essas novas distribuições se manifestam na natureza?
- Quais são os sistemas físicos que manifestam essas propriedades em observáveis?

O Gás de Fótons

- O espectro de emissão de radiação de um corpo negro conforme descrito por Planck é obtido imediatamente da distribuição estatística de um sistema de bósons (como os fótons) em equilíbrio

O Gás de Fótons

- Nessa abordagem, o espectro é dado por:

$$\rho_T(E)dE = \frac{E \cdot n(E) \cdot N(E)dE}{V}$$

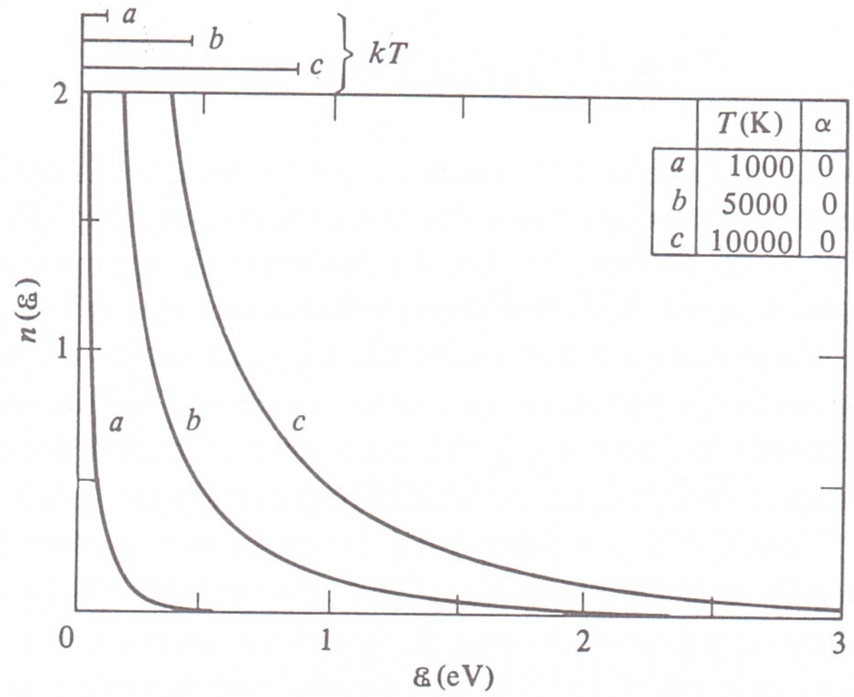
- onde $N(E)dE$ é o número de estados quânticos de fótons para cada energia e $n(E)$ é o número de fótons encontrados nesse sistema para cada valor de energia

Distribuições Quânticas

- A distribuição de energia de um sistema físico composto de bósons é dada por:

$$n_{Bose}(\epsilon) = \frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1}$$

- supondo $\alpha = 0$



Número de ondas estacionárias dentro da cavidade

- A dedução do número de estados quânticos em função da frequência (energia) para ondas estacionárias é perfeitamente válida para fótons também

- Portanto:

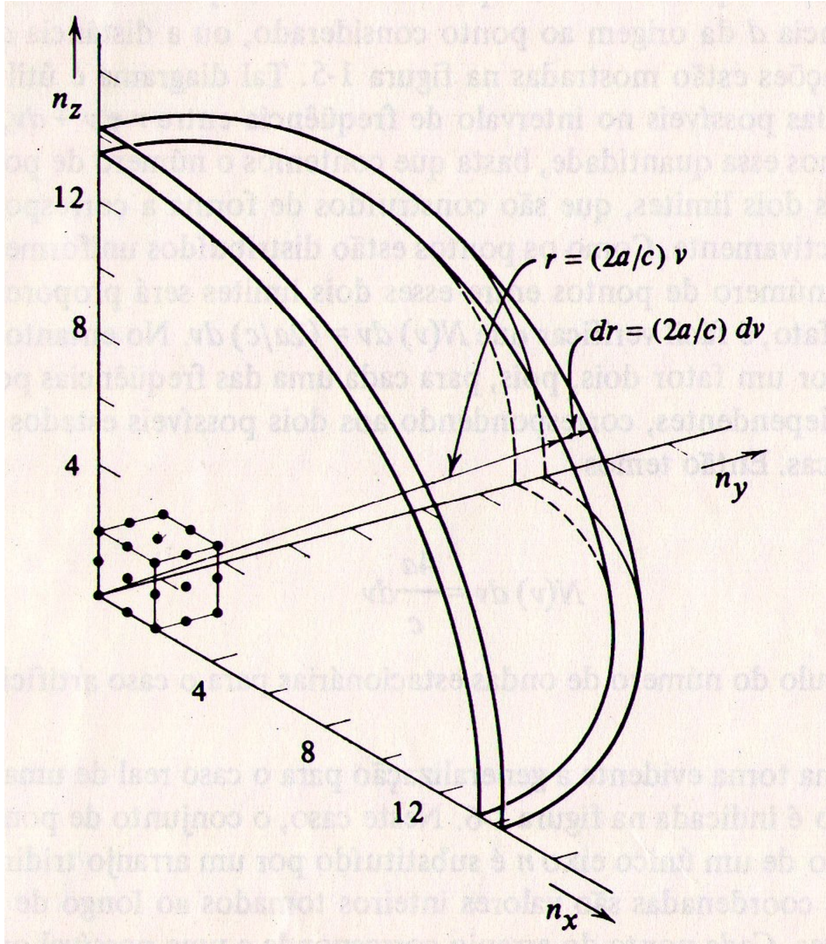
$$\nu = \frac{c}{2a} \cdot \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

- e

$$N(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \cdot V \cdot \nu^2 d\nu$$

- ou

$$N(E)dE = \frac{8\pi}{c^3} \cdot V \cdot \frac{E^2}{h^3} dE$$



O Gás de Fótons

- Finalmente, tem-se que:

$$\rho_T(E)dE = \frac{E \cdot n(E) \cdot N(E)dE}{V}$$
$$= \frac{8\pi E^3 dE}{c^3 h^3 \left(e^{E/kT} - 1\right)}$$

- ou

$$\rho_T(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}\frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}d\nu$$