MAP2310 - Métodos Numéricos em Equações Diferenciais I
Primeiro Semestre de 2012 (Noturno)

Exercício Programa 1

1 Introdução

Este exercício programa tem como objetivo a implementação de um método numérico para a resolução de equações diferenciais ordinárias. Ele será usado para o estudo de um modelo bem simples (linear não homogêneo) em economia.

Seu programa deve ser entregue na página do curso no sistema Moodle do Stoa (*disciplinas.stoa.usp.br*) até o dia 20 de maio. O programa deve ser escrito em Linguagem C e ser compilado e executado com o compilador DevC++ (ver link na página da disciplina). Caso você desnvolva o programa em outro compilador, verifique se ele compila e executa no DevC++. Programas que não compilarem terão notas muito baixas.

2 Equilíbrio parcial de mercado (modelo linear)

O problema padrão em um modelo de equilíbrio estático é achar o conjunto de valores que satisfazem a condição de equilíbrio do modelo. Isso porque, identificados esses valores, teremos identificado o "estado" de equilíbrio. Em essência um equilíbrio de um modelo é uma situação caracterizada pela falta de mudança no comportamento do estado. Um exemplo desse tipo de equilíbrio é o que chamamos de equilíbrio parcial de mercado, isto é, um modelo de determinação de preço em um mercado isolado.

3 Construção do modelo

Neste tipo de mercado consideramos apenas um tipo de produto (commodity) isolado, portanto necessitamos apenas de três variáveis no modelo: a quantidade de demanda ou procura Q_D, a quantidade fornecida ou oferta Q_S e o preço P. Escolhidas as variáveis, o próximo passo é inferir algumas hipóteses sobre o modelo, em relação ao funcionamento do mercado. Primeiro especificamos a condição de equilíbrio. A hipótese padrão é que temos um quilíbrio se e só se $Q_D - Q_S = 0$.

A pergunta agora que nos fazemos é: Como determinamos Q_D e Q_S? Assumimos que Q_D é uma função linear decrescente com relação ao preço P e Q_S é uma função linear crescente com relação ao preço.

Disso temos

$$\begin{aligned} Q_D &= \alpha - \beta P,\ \beta > 0, \qquad (1)\\ Q_S &= -\gamma + \delta P,\ \delta > 0, \end{aligned}$$

sendo o equilíbrio $\bar{P}$ caracterizado por

$$\bar{P} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta}.$$

Se $P(0) = \bar{P}$ o mercado estará em equilíbrio. No caso $P(0) \neq \bar{P}$, $\bar{P}$ é atingido apenas após um certo período de tempo, durante o qual, não só o preço mas também a oferta e a procura mudam, e portanto P, Q_D, Q_S são funções do tempo.

A pergunta agora é $P(t) \longrightarrow \bar{P}$ quando $t \longrightarrow \infty$?

Para responder essa questão precisamos criar um modelo temporal para o preço. Em geral, nesse modelo, podemos dizer que o preço varia com o tempo de acordo com a oferta e a procura, ou seja, é proporcional a $Q_D - Q_S$. Esse tipo de padrão pode ser expressado como

$$\frac{dP}{dt} = k(Q_D - Q_S), \; k > 0, \tag{2}$$

onde k representa uma constante de ajuste.

Usando (1) e (2) temos:

$$\frac{dP}{dt} + k(\beta + \delta)P = k(\alpha + \gamma). \tag{3}$$

Para garantir a estabilidade do equilíbrio, os parâmetros devem satisfazer algumas restrições. No caso usual ($k > 0$), ou seja, excesso de demanda aumenta o preço do produto, temos que as restrições são dadas por $\beta + \delta > 0$. No caso comum isso sempre ocorre, pois $\delta > 0$ e $-\beta < 0$.

4 Testes

Você pode assumir que $k = 1$ na EDO (3). Isto sempre pode ser feito mudando-se a escala temporal, e o interesse nos testes é o comportamento qualitativo da solução. A variação do preço depende então de quatro parâmetros $(\alpha, \gamma, \beta, \delta)$. Ache a solução de equilíbrio e faça o gráfico da solução, para condições inicias $P(0)$ menores e maiores que a solução de equilíbrio nos seguintes casos:

- $\alpha = 1/2$, $\gamma = 1$, $\beta = 1/2$, $\delta = 1$
- $\alpha = 1/2$, $\gamma = -1$, $\beta = 1/2$, $\delta = 1$
- $\alpha = 1/2$, $\gamma = 1$, $\beta = -1/2$, $\delta = 1$
- $\alpha = 1/2$, $\gamma = -1$, $\beta = -1/2$, $\delta = 1$
- $\alpha = 1/2$, $\gamma = 1$, $\beta = 1/2$, $\delta = -1$
- $\alpha = 1/2$, $\gamma = -1$, $\beta = 1/2$, $\delta = -1$
- $\alpha = 1/2$, $\gamma = 1$, $\beta = -3/2$, $\delta = 1$

- $\alpha = 1/2$, $\gamma = -1$, $\beta = -3/2$, $\delta = 1$

Explique o significado de cada um desses casos, discutindo a possibilidade de sua ocorrência. Ou seja, existe algum sentido prático em quais dos casos?

Se ao invés do modelo proposto, (1) tivermos o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} Q_D &= \alpha - \beta P + \sigma \frac{dP}{dt}, \\ Q_S &= -\gamma + \delta P, \end{aligned} \tag{4}$$

Como seria a solução de equilíbrio? Como se comportaria a solução? Teste para esse modelo os mesmos parâmetros anteriores, para $\sigma = 1$ e $\sigma = -1$. Explique os resultados obtidos.

Para gerar os gráficos, você deve resolver numericamente as equações diferenciais. Como o comportamento assintótico envolve o limite $t \to \infty$, é necessário escolher um instante final $\bar{t}$ adequado para se observar o comportamento. O tamanho do passo h também deve ser escolhido de forma que a solução numérica reflita o comportamento da solução exata. Apresente justificativas para a escolha destes parâmetros e imprima os valores escolhidos.

5 Implementação e resultados

Para os testes, você deverá implementar o Método do Ponto Médio para a resolução de uma equação diferencial ordinária escalar: se a equação é dada por

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

um passo do método com tananho de passo h a partir da aproximação η_j no instante t_j é calculado por

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, \eta_j) \\ k_2 &= f(t_j + 0.5h, \eta_j + 0.5hk_1) \\ \eta_{j+1} &= \eta_j + hk_2 \end{aligned}$$

Documente bem o seu programa. Ele será compilado e executado por outras pessoas. Pense cuidadosamente na entrada e saída de dados. Você deverá entregar também um relatório com gráficos e discussão dos resultados.