Departamento de Física Experimental

Incertezas
(Lagarta)

22-23 abril de 2014

Paulo R. Pascholati

Lagarta "Mimetizada" com a Calçada

Ibiúna - SP

Sumário

Incertezas

Definição segundo o GUM

- *A palavra "incerteza" significa dúvida, e assim, no sentido mais amplo, "incerteza de medição" significa dúvida acerca da validade do resultado de uma medição. Por causa da falta de palavras diferentes para este conceito geral de incerteza e para as grandezas específicas que proporcionam medidas quantitativas do conceito, como, por exemplo, o desvio padrão, é necessário utilizar a palavra "incerteza" nessas duas acepções diferentes.*
- **incerteza (de medição)** *parâmetro, associado ao resultado de uma medição, que caracteriza a dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando*
- **incerteza padrão** *incerteza do resultado de uma medição expressa com um desvio padrão.*

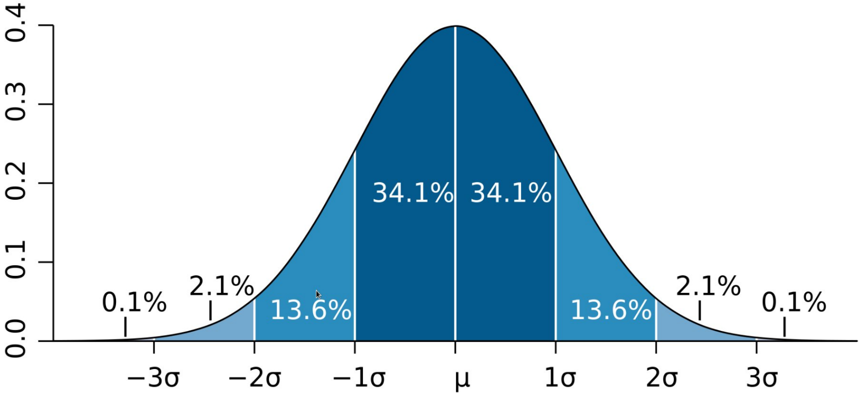
Incertezas
Definição segundo o GUM

- **avalição do Tipo A (incerteza)** *método de avalição da incerteza pela análise estatística de séries de observações.*
- **avalição do Tipo B (incerteza)** *método de avalição da incerteza por outros meios que não a análise estatística de séries observações.*

Incertezas
Definição segundo o GUM

- **incerteza padrão combinada** *incerteza padrão resultante de uma medição, quando este resultado é obtido por meio dos valores de várias outras grandezas, sendo igual à raiz quadrada positiva de uma soma de termos, que constituem as variâncias ou covariâncias destas outras grandezas, ponderadas de acordo com quanto o resultado da medição varia com mudanças nestas grandezas.*
- **incerteza expandida** *grandeza que define um intervalo em torno do resultado de uma medição com o qual se espera abranger uma grande fração da distribuição dos valores que possam ser razoavelmente atribuídos ao mensurando.*
- **fator de abrangência** *fator numérico utilizado como um multiplicador da incerteza padrão combinada de modo a obter um incerteza expandida.*

Incertezas
Definição segundo o GUM



Incertezas
Definição segundo o GUM

- *O propósito da classificação Tipo A e Tipo B é de indicar as duas maneiras diferentes de avaliar os componentes da incerteza e serve apenas para discussão; a classificação não se propõe a indicar que haja qualquer diferença na natureza dos componentes resultando dos dois tipos de avaliação. Ambos os tipos de avaliação são baseados em* **distribuição de probabilidade** *e os componentes de incerteza resultantes de cada tipo são quantificados por variâncias e desvios padrão.*
- *..., uma incerteza padrão do Tipo A é obtida a partir de uma* **função distribuição de probabilidade** *derivada da observação de uma* **distribuição de frequência** *enquanto que uma incerteza padrão do Tipo B é obtida de uma suposta função densidade de probabilidade, baseada no grau de credibilidade de que um evento vá ocorrer [frequentemente chamada de* **probabilidade** *subjetiva]. Ambos os enfoques*

Incerteza Tipo B

Exemplo de Avaliação - Lima-Júnior e Silveira, RBEF 33(2011)2303

Aqui vai ser usado em parte o material do artigo de Lima-Júnior e Silveira citado no cabeçalho deste quadro, que pode ser acessado sem custos no endereço:
http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/332303.pdf.

... todo processo de medição supõe a construção de um modelo em que o profissional lança mão de leis, idealizações e aproximação do seu campo de conhecimento para definir a grandeza física que está sendo medida e estabelecer um procedimento minimamente confiável que lhe permita estimar o valor dessa grandeza dentro de certos limites e para certos propósitos. Essa modelagem é realizada, ora de maneira intuitiva, ora de maneira sistemática, mas é sempre inerente ao processo de medição.

Incerteza Tipo B
Exemplo de Avaliação

Vai-se abordar a situação para se obter as incerteza do tipo A e do tipo B em um prodecimento de medição para se obter o valor do comprimento de uma lápis utilizando uma régua cuja menor divisão é milímetro.

Nessa situação, os valores de várias medições do comprimento não apresenta dispersão, portanto não é possível obter a incerteza do tipo A pela falta de "uma **função distribuição de probabilidade** derivada da observação de uma **distribuição de frequência**" [GUM].

Para se obter a incerteza do tipo B é necessário supor uma função densidade de probabilidade ("uma incerteza padrão do Tipo B é obtida de uma suposta função densidade de probabilidade, baseada no grau de credibilidade de que um evento vá ocorrer [frequentemente chamada de **probabilidade** subjetiva]." [GUM])

Incerteza Tipo B
Exemplo de Avaliação

... para estimar a incerteza do tipo B é necessário levar em consideração todas as informações disponíveis que estejam relacionadas à qualidade do resultado da medição. Uma maneira de se fazer isso é propor a priori uma distribuição de probabilidades (por exemplo, gaussiana, retangular, triangular, multinomial) que seja adequada para descrever a distribuição dos resultados de medição em torno do valor verdadeiro do mensurando ou do conjunto de valores verdadeiros que podem ser atribuídos a esse mensurando. Essa distribuição de probabilidades deve possuir pelo menos duas propriedades: (1) ela deve ser ajustável às informações prévias relevantes à determinação da qualidade do resultado da medição; (2) ela deve permitir a tradução dessas informações relevante sem uma quantidade que possa ser interpretada como desvio padrão.

Incerteza Tipo B
Exemplo de Avaliação

Supondo que a régua utilizada é do tipo comum de plástico, a distribuição que parece melhor adequada para descrever a incerteza do tipo B é a distribuição homogênea, $f_h(x)$, apresentada no quadro 13.
A f.d.p. $f_h(x)$, dada por $f(x) = 0,5$ no intervalo [x_v-1,x_v+1] e $f(x) = 0$ para todos os valores x fora desse intervalo. Ela é igual a $1/2$ no intervalo [v_v-1,v_v+1] para satisfazer a condição de normalização.

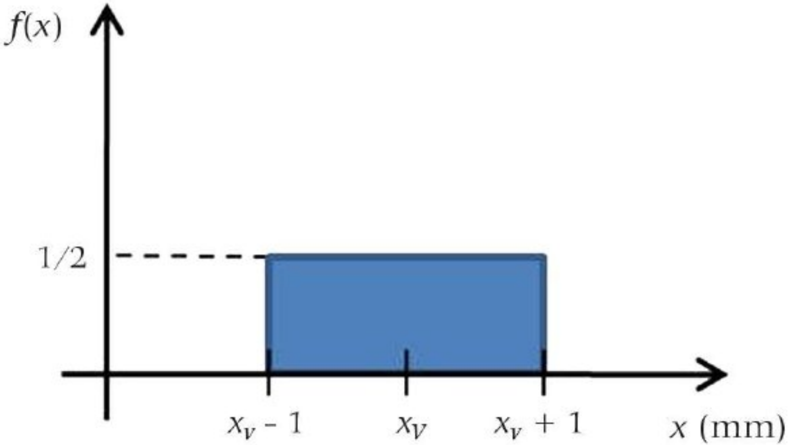
A variância nesse caso vai ser obtida por

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_v)^2 f_h(x) dx \tag{1}$$

Resolvendo essa integral obtem-se que
$\sigma_{x,h}^2 = 1,0\ mm/\sqrt{3} \approx 0,6\ mm$.

Incerteza Tipo B
Exemplo de Avaliação

(a) Distribuição uniforme



Incerteza Tipo B
Exemplo de Avaliação

Supondo, agora, que a régua utilizada é do tipo escala de aço, a distribuição que parece melhor adequada para descrever a incerteza do tipo B é a distribuição triangular, $f_t(x)$, apresentada no quadro 16. A f.d.p. $f(x)$, para satisfazer a condição de normalização, é igual a

$$f_t(x) = 0 \quad para\ x < x_v - 1 \tag{2}$$

$$f_t(x) = x - (x_v - 1) \quad para\ x_v - 1 \leq x \leq x_v \tag{3}$$

$$f_t(x) = 1 - (x - x_v) \quad para\ x_v \leq x \leq x_v + 1 \tag{4}$$

$$f_t(x) = 0 \quad para\ x > x_v + 1 \tag{5}$$

Incerteza Tipo B
Exemplo de Avaliação

A variância nesse caso vai ser obtida por

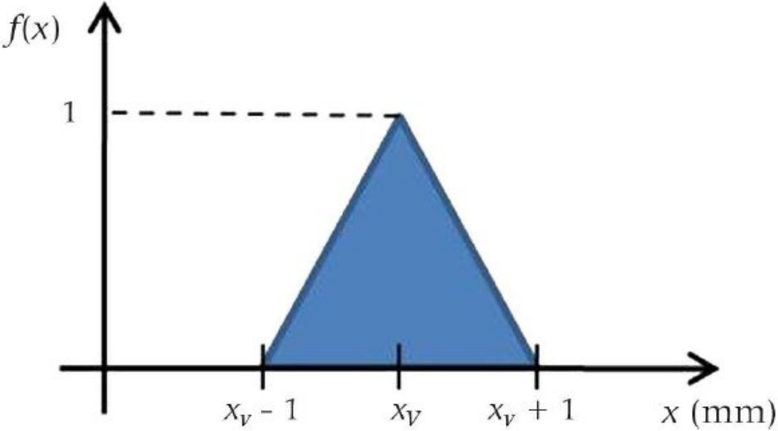
$$\sigma_{x,t}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_v)^2 f_t(x) dx \tag{6}$$

Resolvendo essa integral obtem-se que $\sigma_{x,t}^2 = 1,0\ mm/\sqrt{6} \approx 0,4\ mm$.

Incerteza Tipo B

Exemplo de Avaliação

(b) Distribuição triangular



Sumário

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Motivação

Suponha que se tenha uma grandeza $f(x)$ que o resultado de uma medição x com incerteza s_x. Intuitivamente a incerteza s_f pode ser expressa como:

$$s_f \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2} \tag{7}$$

No caso em que $f(x) = x$ (*esquema anterior de assimilação* Piaget)

$$s_f \approx \frac{(x+\Delta x) - (x-\Delta x)}{2} = \frac{x+\Delta x - x + \Delta x}{2} = \frac{2\Delta x}{2} = \Delta x \tag{8}$$

$$s_f = \lim_{\Delta x \to s_x} (\Delta x) = s_x \tag{9}$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Motivação

No caso em que $f(x) = x^2$ (*esquema anterior de assimilação* Piaget)

$$s_f \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2} = \frac{(x+\Delta x)^2 - (x-\Delta x)^2}{2} \tag{10}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - (x^2 - 2x\Delta x + (\Delta x)^2)}{2} \tag{11}$$

$$= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 + 2x\Delta x - (\Delta x)^2)}{2} \tag{12}$$

$$= \frac{2x\Delta x + 2x\Delta x}{2} = 2x\Delta x \tag{13}$$

$$s_f = \lim_{\Delta x \to s_x} (2x\Delta x) = 2xs_x \tag{14}$$

(Lagarta)

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Motivação - $f(x) = x^3$

$$s_f \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2} = \frac{(x+\Delta x)^3 - (x-\Delta x)^3}{2} \quad (15)$$

$$= \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3) - (x^3 - 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 - (\Delta}{2} \quad (16)$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 + 3x^2(\Delta x) - 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{2} \quad (17)$$

$$= \frac{3x^2\Delta x + (\Delta x)^3 + 3x^2(\Delta x) + (\Delta x)^3}{2} = 3x^2\Delta x + (\Delta x)^3 \quad (18)$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Fundamentação - segundo Bevington

Considere uma grandeza u função de ao menos duas variáveis medidas x e y

$$u = f(x, y, ..) \tag{20}$$

Embora nem sempre pode ser exato, vai se supor que o valor mais provável de u é dado por

$$\overline{u} = f(\overline{x}, \overline{y}, ...) \tag{21}$$

A incerteza no valor de u pode ser encontrado considerando a dispersão dos valores de u resultando da combinação das medidas individuais de x_i, $y_i, ...$

$$u_i = f(x_i, y_i, ...) \tag{22}$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Fundamentação - segundo Bevington

No limite de infinito número de medidas, a média da distribuição de u coincidirá com a média $\overline{u}$.
Dai podemos calcular a variância como

$$\sigma_u^2 = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=n}^{N}(u_i - \overline{u})^2\right] \tag{23}$$

Fazendo a expansão em séries de Taylor da função u em torno de $\overline{u}$ tem-se

$$u_i = \overline{u} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_i - \overline{x}) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(y_i - \overline{y}) + \ldots \tag{24}$$

ou

$$u_i - \overline{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_i - \overline{x}) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(y_i - \overline{y}) + \ldots \tag{25}$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Fundamentação - segundo Bevington

Substituindo a última equação do quadro 22 na primeira, tem-se

$$\sigma_u^2 \approx \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=n}^{N} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_i - \overline{x}) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)(y_i - \overline{y}) + \ldots \right]^2 \quad (26)$$

$$\approx \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=n}^{N} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 (x_i - \overline{x})^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 (y_i - \overline{y})^2 \right] \quad (27)$$

$$+ \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + \ldots \right] \quad (28)$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Fundamentação - segundo Bevington

Os dois primeiros termos da última equação do quadro 23 correspondem a variância de x e de y, respectivamente,

$$\sigma_x^2 = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right] \tag{29}$$

e

$$\sigma_y^2 = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{y})^2\right] \tag{30}$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Fundamentação - segundo Bevington

o terceiro termo da última equação do quadro 23 vai ser definido como a covariância entre as variáveis x e y,

$$\sigma_{xy}^2 = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right] \tag{31}$$

$$\sigma_u^2 \approx \sigma_x^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \sigma_y^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \ldots + 2\sigma_{xy}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{32}$$

Se as quantidades x e y não são correlacionadas o último termo da equação é nulo, então

$$\sigma_u^2 \approx \sigma_x^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \sigma_y^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \ldots \tag{33}$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Fórmulas Específicas - Soma ou Diferença

Se u é soma de variável independente x e uma constante a

$$u = x + a \tag{34}$$

$\partial u/\partial x = 1$, daí

$$\sigma_u = \sigma_x \tag{35}$$

e a incerteza relativa é

$$\frac{\sigma_u}{u} = \frac{\sigma_x}{u} = \frac{\sigma_x}{x + a} \tag{36}$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Fórmulas Específicas - Soma ou Diferença

Se u é soma de duas variáveis independentes x e y multiplicadas por constantes a e b, respectivamente,

$$u = ax + by \tag{37}$$

$\partial u/\partial x = a$ e $\partial u/\partial y = b$, daí

$$\sigma_u^2 = a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2 + 2ab\sigma_{xy}^2 \tag{38}$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Fórmulas Específicas - Multiplicação e Divisão

Se u é multiplicação de duas variáveis independentes x e y e de uma constante a

$$u = axy \tag{39}$$

$\partial u/\partial x = ay$ e $\partial u/\partial y = ax$, daí

$$\sigma_u^2 = (ay\sigma_x)^2 + (ax\sigma_y)^2 + 2a^2xy\sigma_{xy}^2 \tag{40}$$

e a incerteza relativa é

$$\frac{\sigma_u^2}{u^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} + 2\frac{\sigma_{xy}^2}{xy} \tag{41}$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Fórmulas Específicas - Multiplicação e Divisão

Se u é divisão de duas variáveis independentes x e y e multiplicadas por uma constante a

$$u = \frac{ax}{y} \tag{42}$$

$\partial u/\partial x = a/y$ e $\partial u/\partial y = -ax/y^2$, daí

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{a}{y}\sigma_x\right)^2 + \left(-\frac{ax}{y^2}\sigma_y\right)^2 + 2\left(\frac{a}{y}\right)\left(-\frac{ax}{y^2}\right)\sigma_{xy}^2 \tag{43}$$

$$\frac{\sigma_u^2}{u^2} = \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \frac{\sigma_y^2}{y^2} - 2\frac{\sigma_{xy}^2}{xy} \tag{44}$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Fórmulas Específicas - Potências

Se u é a potência de uma variável independente x elevada a constante b e multiplicada por uma constante a

$$u = ax^b \tag{45}$$

$\partial u/\partial x = abx^{b-1}$, daí

$$\sigma_u = abx^{b-1}\sigma_x \tag{46}$$

$$\frac{\sigma_u}{u} = b\frac{\sigma_x}{x} \tag{47}$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Fórmulas Específicas - Exponencial

Se u é a exponencial de uma variável independente x multiplicada por constante b e multiplicada por uma constante a

$$u = ae^{bx} \tag{48}$$

$\partial u / \partial x = abe^{bx}$, daí

$$\sigma_u = abe^{bx}\sigma_x = bu \tag{49}$$

$$\frac{\sigma_u}{u} = b\sigma_x \tag{50}$$

Propagação de Incertezas (Propagação de Erros)

Fórmulas Específicas - Logaritmo

Se u é o logaritmo de uma variável independente x multiplicada por constante b e multiplicado por uma constante a

$$u = a ln(bx) \tag{51}$$

$\partial u/\partial x = \frac{a}{x}$, daí

$$\sigma_u = \frac{a}{x}\sigma_x \tag{52}$$

$$\frac{\sigma_u}{u} = \frac{\sigma_x}{x ln(bx)} \tag{53}$$