**Física I para Engenharia**
**IFUSP - 432195**
**P1 - 25/04/2014**

A prova tem duração de 120 minutos. Resolva questão na folha correspondente. Use o verso se necessário. Escreva de forma legível, a lápis ou tinta.

Seja ético: a prova é individual e sem consulta a anotações ou qualquer outro material.

| Nome | Assinatura | Nº. USP | Turma |
|---|---|---|---|
| | | | |

**1) O vetor posição de uma partícula que se move no plano $X-Y$ é dado por $\overrightarrow{r}(t) = (20+20t)\overrightarrow{i} + (10t + \frac{5}{2}t^2)\overrightarrow{j}$ onde $\overrightarrow{r}$ é dado em metros e $t$ em segundos. Determine:**

——

a) (1,0) o vetor velocidade instantânea da partícula, seu módulo e direção para o instante $t = 1$ s;
b) (0,5) o vetor aceleração instantânea da partícula para o instante $t = 4$ s;
c) (0,5) o vetor deslocamento deslocamento da partícula entre os intervalos de tempo $t = 2$ s e $t = 4$ s;
d) (0,5) o vetor velocidade média da partícula no intervalo de tempo $t = 2$ s e $t = 4$ s.

**SOLUÇÃO:**

a) O vetor velocidade instantânea pode ser obtido pela derivação do vetor posição em função do tempo, ou seja:

$$\overrightarrow{V}(t) = \frac{d\overrightarrow{r}(t)}{dt} = \left[20\overrightarrow{i} + (10+5t)\overrightarrow{j}\right] m/s$$

Portanto o vetor velocidade instantânea para $t = 1$ s vale:

$$\overrightarrow{V}(1) = (20\overrightarrow{i} + 15\overrightarrow{j})m/s$$

e o módulo vale:

$$V = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25m/s$$

Direção:

$$tg\theta = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{3}{4}\right)$$

b) O vetor aceleração instantânea pode ser obtido pela derivação do vetor velocidade em função do tempo, ou seja:

$$\overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{V}(t)}{dt} = (5\overrightarrow{j})m/s^2$$

Portanto o vetor aceleração independe do tempo e para $t = 4$ s vale:

$$\overrightarrow{a}(4) = 5\overrightarrow{j}\ \mathrm{m/s^2}$$

c) As posições para os instantes $t = 2$ s e $t = 4$ s valem:

$$\overrightarrow{r}(2) = (60\overrightarrow{i} + 30\overrightarrow{j})m$$

$$\overrightarrow{r}(4) = (100\overrightarrow{i} + 80\overrightarrow{j})m$$

Portanto o deslocamento é igual a:

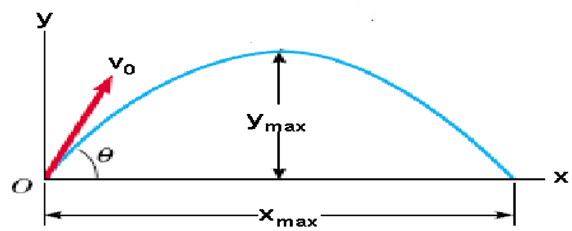
$$\triangle\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(4) - \overrightarrow{r}(2) = (40\overrightarrow{i} + 50\overrightarrow{j})m$$

d) A velocidade média entre os intervalos $t = 2$ s e $t = 4$ s é por definição igual a:

$$\overrightarrow{V_m} = \frac{\triangle\overrightarrow{r}}{\triangle t} = (20\overrightarrow{i} + 25\overrightarrow{j})m/s$$

**2) Um projétil é lançado do chão com velocidade inicial $V_0$ sob um ângulo $\theta$ com a horizontal, como representado na figura abaixo. Supondo que não exista atrito com o ar e que a trajetória do projétil é parabólica do tipo $y(x) = ax + bx^2$. Pede-se determinar**

——-




(a) (0,5) os coeficientes a e b da parábola.
(b) (0,5) a altura máxima atingida pelo projétil $y_{max}$.
(c) (0,5) a distância máxima alcançada pelo projétil $x_{max}$.
(d) (1,0) Achar o módulo e a direção do vetor velocidade do projétil nos pontos $y_{max}$ e $x_{max}$.
Solução:
a) Vamos primeiramente escrever as componentes x e y da equação de movimento, ou seja:

$$x(t) = V_0 cos(\theta)t$$

$$y(t) = V_0 sen(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Isolando o tempo $t$ na primeira equação e substituindo na segunda obtemos:

$$y(x) = \frac{V_0 sen(\theta)}{V_0 cos(\theta)}x - \frac{g}{2V_0^2 cos^2(\theta)}x^2 = tg(\theta)x - \frac{g}{2V_0^2 cos^2(\theta)}x^2$$

Usando a relação $1/cos^2(\theta) = 1 + tg^2(\theta)$ obtemos que:

$$y(x) = xtg(\theta) - x^2 g\frac{(tg^2(\theta)+1)}{2V_0^2}$$

Portanto os coeficientes $a$ e $b$ valem:

$$a = tg(\theta) \text{ e } b = -\frac{g}{2V_0^2 cos^2(\theta)} = -g\frac{(tg^2(\theta)+1)}{2V_0^2}$$

b) A altura máxima pode ser obtida fazendo $dy(x)/dx = 0$, ou seja:

$$\frac{dy(x)}{dx} = tg(\theta) - g\frac{1}{V_0^2 cos^2(\theta)}x = 0 \Rightarrow x = \frac{V_0^2 cos^2(\theta)}{g}tg(\theta)$$

Esta é a posição $x$ do projétil para a máxima altura. Esta posição corresponde a $x_{max}/2$. Portanto para obter a altura máxima basta substituir o valor de $x$ na equação que mostra a dependência de $y$ em função de $x$, ou seja:

$$y_{max} = \frac{V_0^2}{g}cos^2(\theta)tg^2(\theta) - \frac{g}{2V_0^2 cos^2(\theta)}\left(\frac{V_0^2}{g}cos^2(\theta)tg(\theta)\right)^2 \Rightarrow$$

$$y_{max} = \frac{V_0^2}{g}sen^2(\theta) - \frac{V_0^2}{2g}sen^2(\theta) = \frac{V_0^2}{2g}sen^2(\theta)$$

c) A distância máxima ($x_{max}$) alcançada pelo projétil é simplesmente $2x$ ou seja:

$$x_{max} = \frac{2V_0^2}{g}cos^2(\theta)tg(\theta) = \frac{2V_0^2}{g}cos^2(\theta)\frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} = \frac{V_0^2}{g}sen(2\theta)$$

d) As componentes $x$ e $y$ do vetor velocidade são:

$$V_x(t) = V_0cos(\theta)$$

$$V_y(t) = V_0sen(\theta) - gt$$

Na posição $y_{max}$ a componente da velocidade $V_y$ é igual a zero e portanto a direção do vetor velocidade neste ponto vale:

$$tg(\theta(y_{max})) = \frac{V_y}{V_x} = 0 \Rightarrow \theta(y_{max}) = 0$$

Logo o módulo da velocidade é:

$$V(y_{max}) = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2cos^2(\theta)} = V_0cos(\theta)$$

A velocidade $V_y$ para a posição $x_{max}$ pode ser obtida a partir da segunda equação das velocidades substituindo $t = 0$, pois como não existe atrito podemos considerar que a velocidade de subida é a mesma de descida, ou seja $V_y(x_{max}) = -V_0sen(\theta)$, logo a direção do vetor vale:

$$tg(\theta(x_{max})) = \frac{V_y}{V_x} = \frac{-V_0sen(\theta)}{V_0cos(\theta)} = -tg(\theta)$$

$$\theta(x_{max}) = -\theta$$

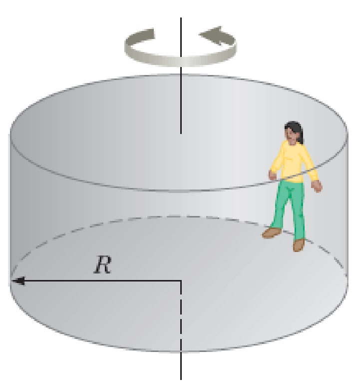
O módulo da velocidade é:

$$V(x_{max}) = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2cos^2(\theta) + V_0^2sen^2(\theta)} = V_0$$

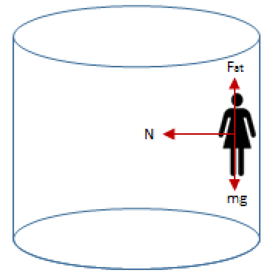
**3) Considere um grande cilindro oco vertical girando ao redor de seu eixo e uma pessoa dentro dele (figura abaixo). Quando a velocidade do conjunto atinge um valor predeterminado o piso do cilindro desce rapidamente, mas a pessoa que está dentro dele não cai, permanecendo presa à parede. O coeficiente de atrito estático entre a pessoa e a parede é $\mu_s$ e o raio do cilindro é $R$.**

———

a) (0,5) Desenhe todas as forças que agem sobre a pessoa que está dentro do cilindro em movimento.
b) (1,0) Calcule o período máximo de revolução necessário para que a pessoa não caia.
c) (0,5) Qual é a velocidade escalar mínima do cilindro para que a pessoa não caia?
d) (0,5) Se a massa da pessoa for igual a $m$, qual é o módulo da força centrípeta que atuará sobre ela?




**SOLUÇÃO:**
a) As forças que atua sobre a pessoa estão representadas na figura abaixo.




b) Para que a pessoa não caia a força de atrito deve ser igualada a força peso, ou seja

$$mg = F_{at} = \mu_s N$$

Por outro lado a normal é igual a força centrípeta, dai temos que:

$$mg = \mu_s N = \mu_s m\frac{V^2}{R} = \mu_s m\omega^2 R \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{\mu_s R}$$

Período

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} = \frac{4\pi^2\mu_s R}{g} \Rightarrow T_{max} = 2\pi\sqrt{\frac{\mu_s R}{g}}$$

c) Velocidade escalar mínima:

$$mg = \mu_s N = \mu_s m\frac{V^2}{R} \Rightarrow V_{min} = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}}$$

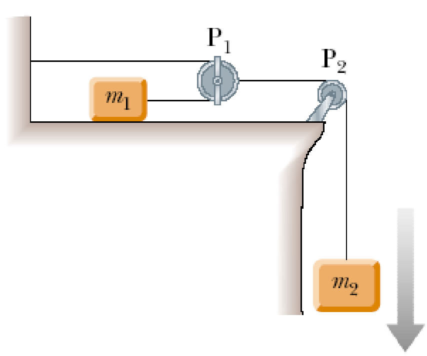
d) Força centrípeta:

$$mg = \mu_s N \Rightarrow N = \frac{mg}{\mu_s} = F_C$$

**4) Na figura ao lado tem-se uma massa $m_1$ que está conectada a uma massa $m_2$ através das polias $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$ que tem massas desprezíveis. Supondo que a massa $m_1$ desliza sobre mesa sem atrito e que a aceleração da massa $m_2$ é vertical e para baixo, pede-se:**

———

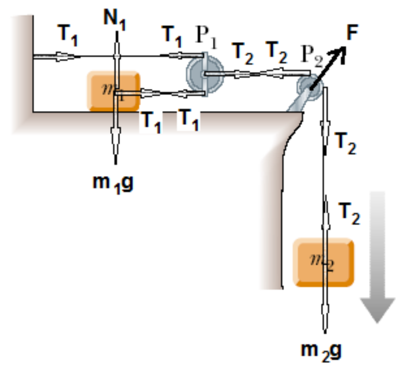
(a) (0,5) Coloque em um diagrama todas as forças que atuam no sistema.
(b) (0,5) Determinar o valor numérico da razão $a_1/a_2$, considerando os fios inextensíveis.
(c) (1,0) Determinar as trações $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ em função de $g$, $m_1$ e $m_2$.
(d) (0,5) Determinar as acelerações $a_1$ e $a_2$.




**SOLUÇÃO:**

(a)

As forças que atuam no sistema estão representadas na figura abaixo.




(b)

Quando a massa $m_2$ se desloca de um comprimento $L$ a massa $m_1$ se desloca de um comprimento $2L$ portanto $a_1 = 2a_2$, logo

$$\frac{a_1}{a_2} = 2$$

(c)

Vamos primeiramente escrever as equações de movimento para os três corpos que possuem acelerações diferente de zero que são as massas $m_1$ e $m_2$ e a polia $P_1$.

$$T_1 = m_1 a_1 \tag{1}$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \tag{2}$$

$$T_2 - 2T_1 = m_{p1} a_2 = 0 \tag{3}$$

onde $m_{p1}$ é a massa da polia 1 que é igual a zero. Substituindo a equação (**3**) em (**2**) obtemos:

$$m_2 g - 2T_1 = m_2 a_2 \Longrightarrow 2T_1 = m_2 g - m_2 a_2 = m_2 g - m_2 \frac{a_1}{2} = m_2 g - m_2 \frac{T_1}{2m_1}$$

$$2T_1 + m_2 \frac{T_1}{2m_1} = m_2 g \Longrightarrow T_1 \left(2 + \frac{m_2}{2m_1}\right) = T_1 \left(\frac{4m_1 + m_2}{2m_1}\right) = m_2 g$$

Logo $T_1$ vale:

$$T_1 = \frac{2m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}$$

e $T_2$ vale:

$$T_2 = \frac{4m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}$$

(d)

Uma vez conhecida as trações podemos obter as acelerações a partir das equações (**1**) e (**2**), ou seja:

$$a_1 = \frac{2m_2 g}{4m_1 + m_2} \text{ e } a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{m_2 g}{4m_1 + m_2}$$