Universidade de São Paulo
Instituto de Física

FÍSICA MODERNA I

AULA 15

Profa. Márcia de Almeida Rizzutto
Pelletron – sala 114
rizzutto@if.usp.br

1o. Semestre de 2014
Monitor: Gabriel M. de Souza Santos

Página do curso:
http://disciplinas.stoa.usp.br/course/view.php?id=2905

25/04/2014

Durante a década de 1920 – proposta da mecânica ondulatória (de Broglie, Schrödinger, Heisenberg, Pauli, Dirac e outros)

Propriedades ondulatórias da matéria

- Vimos que as partículas que constituem a matéria (elétron) possuem propriedades ondulatórias

QUESTÕES:

1) Como podemos descrever este elétron então?
2) O que seria esta "onda" que constitui o elétron
3) O elétron é uma "onda" se propagando em que meio?
4) Como descrever esta "onda" matematicamente?

- Bohr elaborou o Princípio da complementaridade:
  - "o caráter ondulatório e o corpuscular da natureza são complementares, isto é, ou se observa a manifestação do comportamento ondulatório de um sistema físico ou do comportamento corpuscular, nunca os dois simultaneamente"

Dualidade Onda-partícula

Associaremos uma função de onda ψ (probabilidade da partícula ser observada em uma certa posição em um certo instante de tempo)

Função de onda $\Psi(x,t)$

que é solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

v é a velocidade de fase

$$\Psi(x,t) = A\cos k(x - vt)$$

$$\Psi(x,t) = A\mathrm{sen}\, k(x - vt)$$

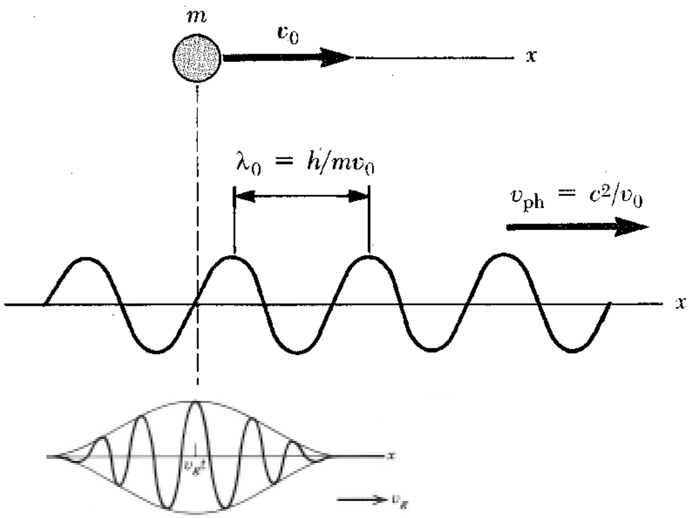
Uma solução simples é a chamada onda harmônica

$$\Psi(x,t) = A\cos(kx - wt)$$

Curva que viaja na direção de x positivo

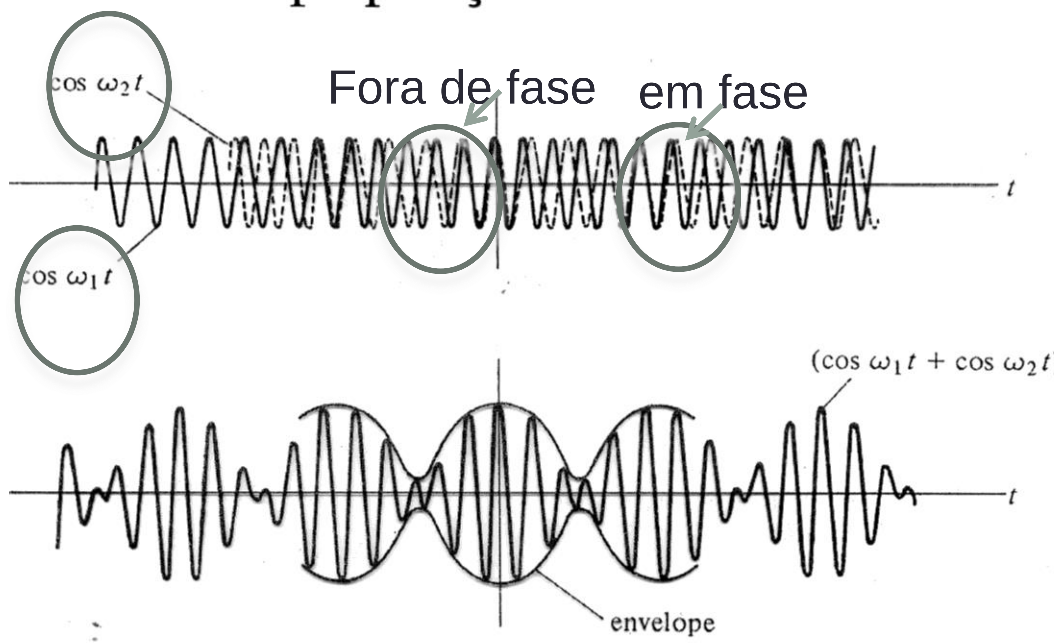
Cujo nº de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Velocidade de fase $v = f\lambda$



Partícula ↔ onda localizada (pacote de onda).
Como produzir um pacote?

Superposição de 2 ondas



- Para representar uma partícula, devemos utilizar uma onda "localizada" no espaço, ou seja, um "pacote de ondas", cuja velocidade de grupo coincide com a velocidade da partícula

1) pacote de onda é obtido a partir de uma combinação de várias ondas de frequências diferentes
2) Neste caso, duas onda de frequências próximas se combinam resultado em vários pacotes ou grupos de onda

Soma de 2 ondas

$$y_1 = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) \qquad \text{e} \qquad y_2 = A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

onde, como no Capítulo 13 (vol. II), $\omega = 2\pi f$ e $k = 2\pi/\lambda$. Adicionamos as ondas usando o princípio de superposição:

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(k_1 x - \omega_1 t) + A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

É conveniente escrever isso em uma forma que use a identidade trigonométrica

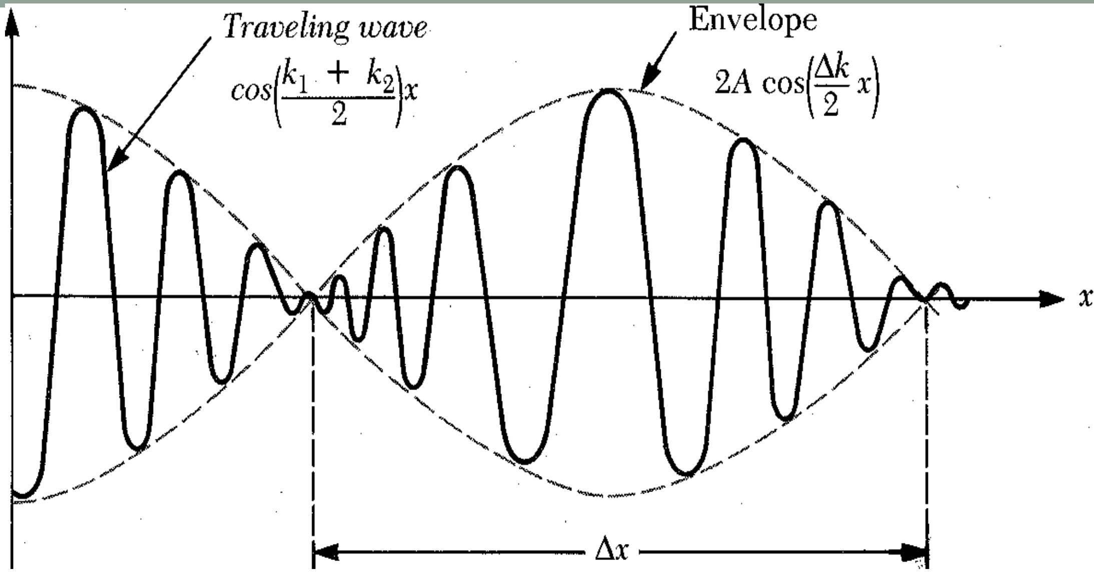
$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Sendo $a = k_1 x - \omega_1 t$ e $b = k_2 x - \omega_2 t$, encontramos

$$y = 2A\cos\left[\frac{(k_1 x - \omega_1 t) - (k_2 x - \omega_2 t)}{2}\right]\cos\left[\frac{(k_1 x - \omega_1 t) + (k_2 x - \omega_2 t)}{2}\right]$$

$$= \left[2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)\right]\cos\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \qquad [28.12]$$

k_m $\qquad$ w_m



Podemos interpretar a onda soma como sendo um envelope que modula lentamente uma onda com k e w médios

$$\Psi(x,t) = \Psi_1 + \Psi_2 = 2A\cos\frac{1}{2}\left(\Delta kx - \Delta\omega t\right)\cos\left(\bar{k}x - \bar{\omega}t\right)$$

amplitude (envelope)

A velocidade de propagação das ondas individuais v_f=w/k

$$\frac{1}{2}\left(\Delta kx - \Delta\omega t\right) = \frac{1}{2}\Delta k\left(x - \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t\right) = \frac{1}{2}\Delta k\left(x - v_g t\right)$$

velocidade de grupo

A velocidade de propagação do grupo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Para o postulado de de Broglie

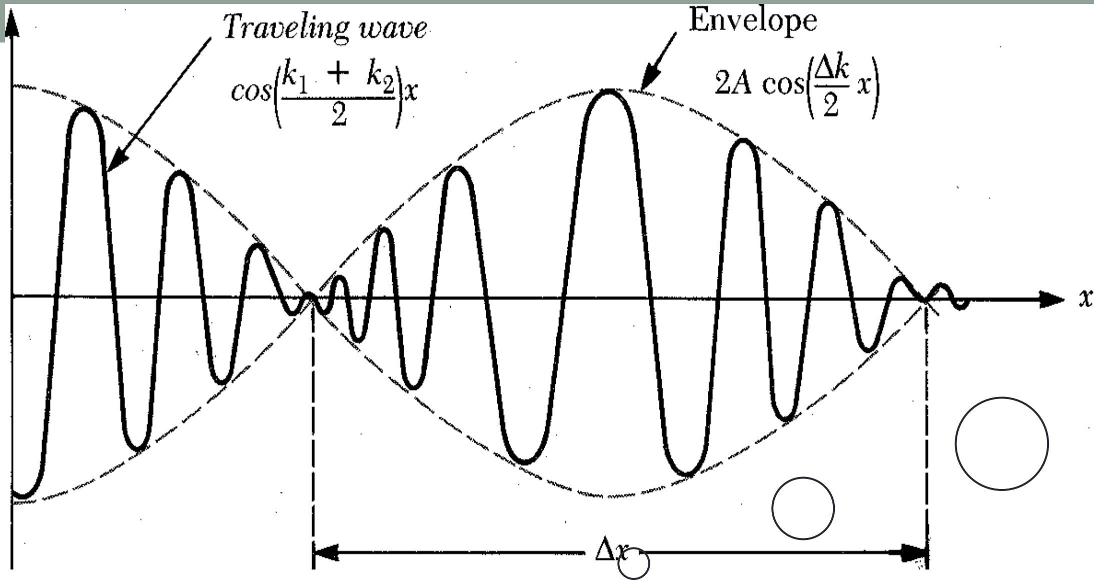
$$E = h\nu = \hbar\omega \qquad \mathrm{p} = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \qquad \mathrm{E} = \frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}}$$

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{\hbar}\frac{\hbar}{p} = \frac{p^2}{2mp} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}$$

- A velocidade de fase não corresponde a velocidade da partícula

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m} = v$$

- O pacote de onda se propaga com velocidade do elétron



A incerteza Δx nesta localização corresponde a distância entre dois nulos consecutivos do envoltório

Para um dado instante a distância entre dois nulos consecutivos será:

$$\frac{1}{2}\left(\Delta k x_2 - \Delta \omega t\right) - \frac{1}{2}\left(\Delta k x_1 - \Delta \omega t\right) = \pi$$

$$\Delta k\left(x_2 - x_1\right) = \Delta k \Delta x = 2\pi$$

e

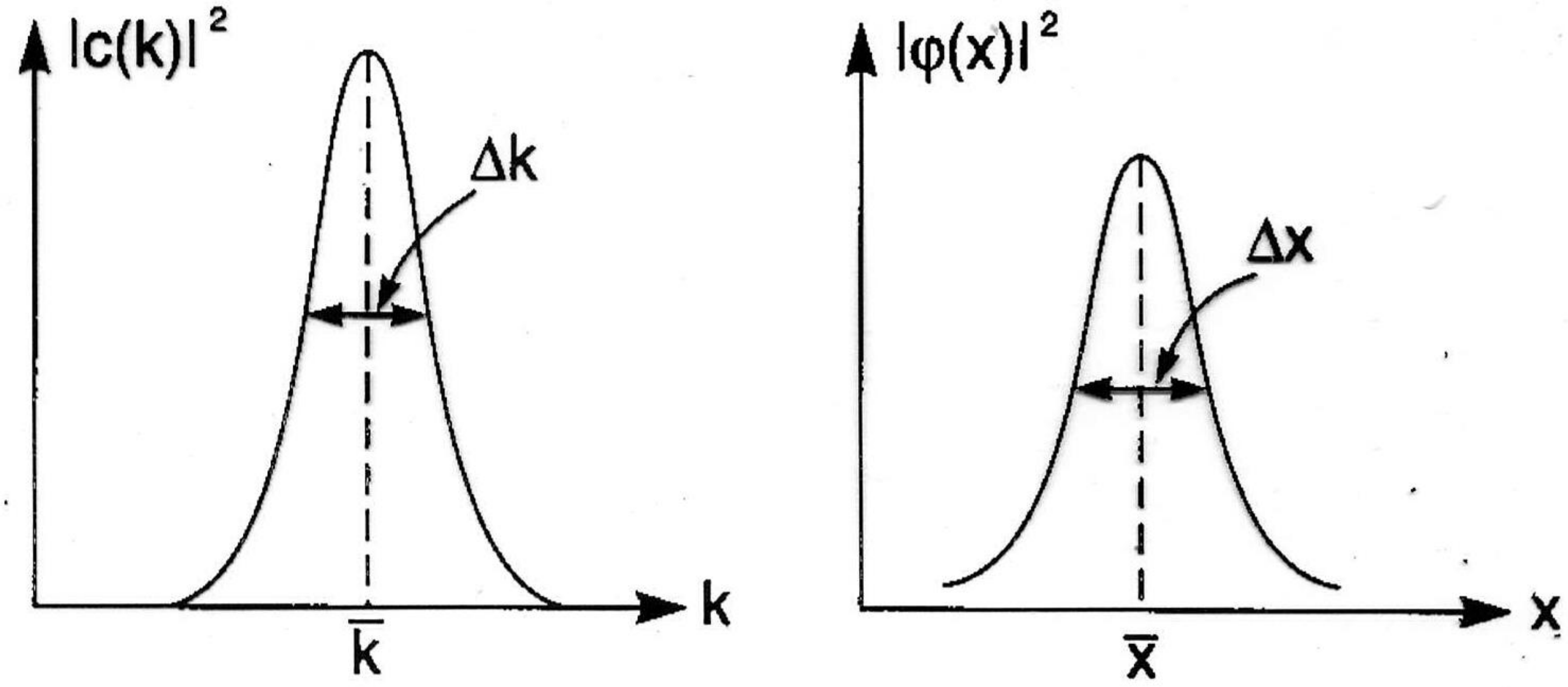
$$\Delta w \Delta t = 2\pi$$

Isto mostra que quanto mais tentamos localizar a partícula no espaço Δx, maior será o numero de ondas utilizado para a construção do pacote

A integral de Fourier

Para construir um pacote de ondas realmente localizado como um pulso gaussiano devemos somar um no infinito de ondas

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk$$



$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$$

O princípio da incerteza

Werner Heisenberg, 1927:
Propõe o princípio de incerteza que diz que é impossível determinar (fazer medidas) simultaneamente da posição e momento de uma partícula) (x e p_x, por exemplo) apresentam uma relação entre suas incertezas dada por

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{p}{h} = \frac{p}{\hbar}$$

Quanto mais bem definida a posição de uma partícula (pacote de onda mais estreito), menos definido será o momento dessa partícula (uma combinação maior de comprimentos de onda, e portanto de momentos será necessário)

O princípio de incerteza também pode ser enunciado em termos da energia e do tempo:
Das propriedades do pacote de onda, tem-se que:

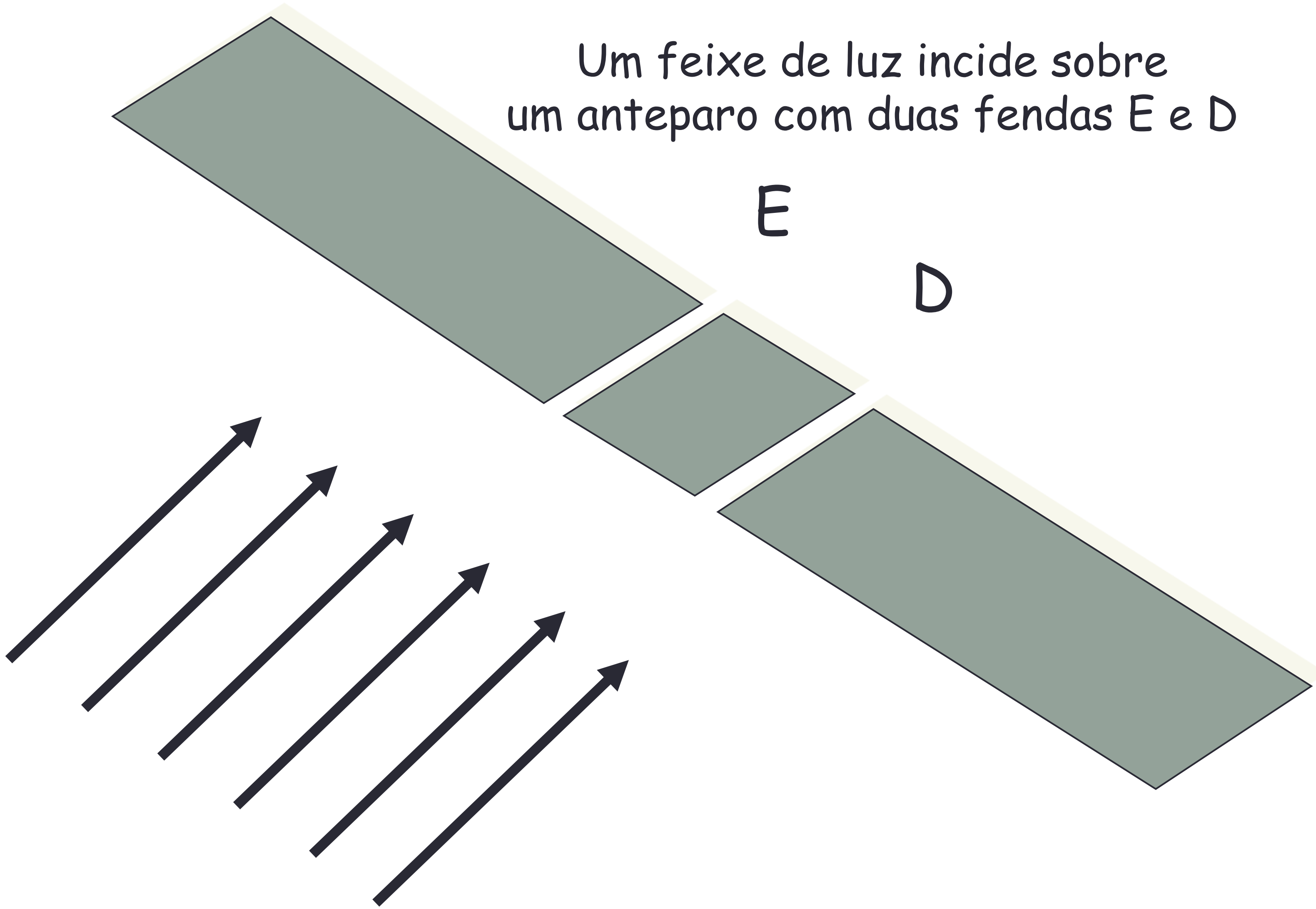
$$\Delta \omega . \Delta t \geq \frac{1}{2}$$

$$E = h\nu = h\frac{\omega}{2\pi} = \hbar\omega$$

$$\Delta E . \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

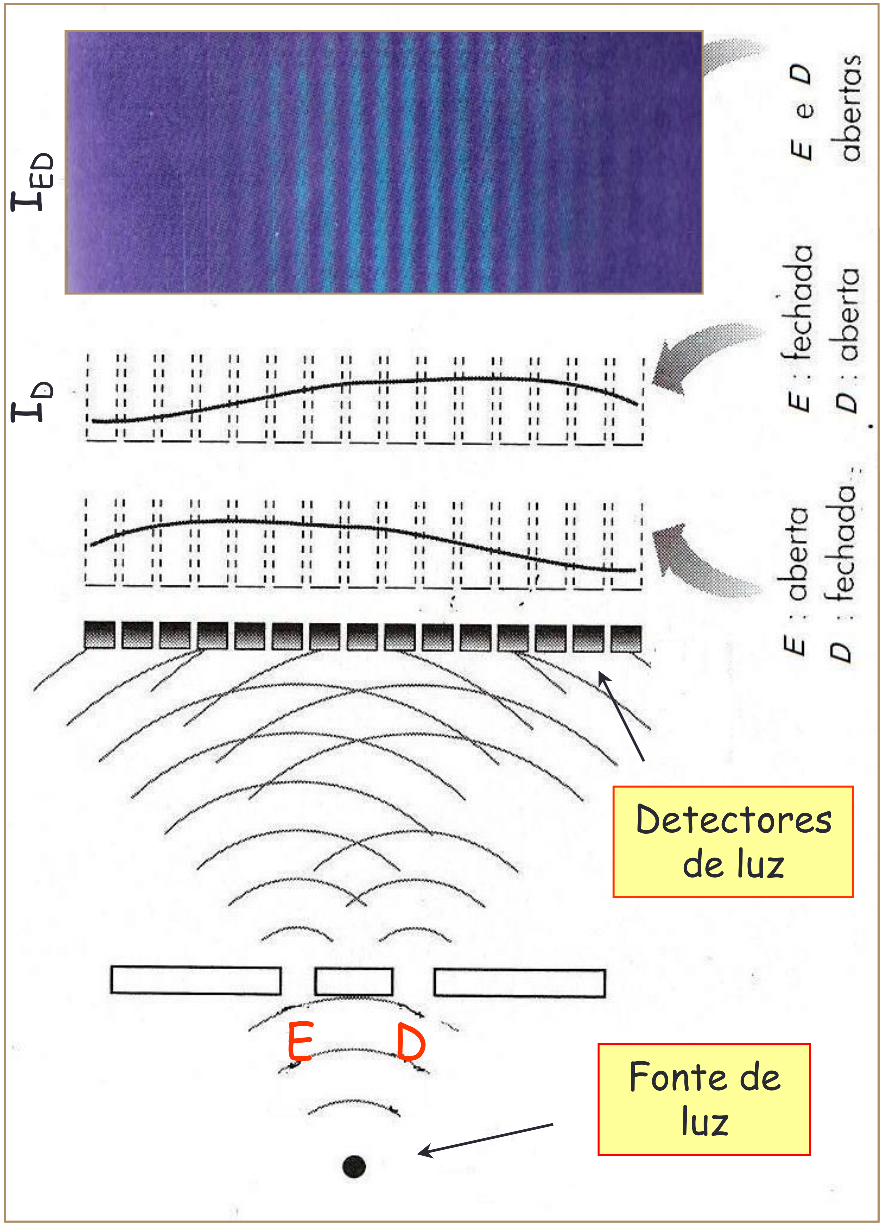
Feixe de luz incidindo sobre fendas

Um feixe de luz incide sobre
um anteparo com duas fendas E e D



Interferência

- A luz ao atravessar duas fendas em um anteparo apresenta um padrão de interferência como o das ondas na superfície da água.
- A luz apresenta também aquelas outras propriedades (superposição, reflexão, refração, ...) ⇒ fenômeno ondulatório.
- Mas...



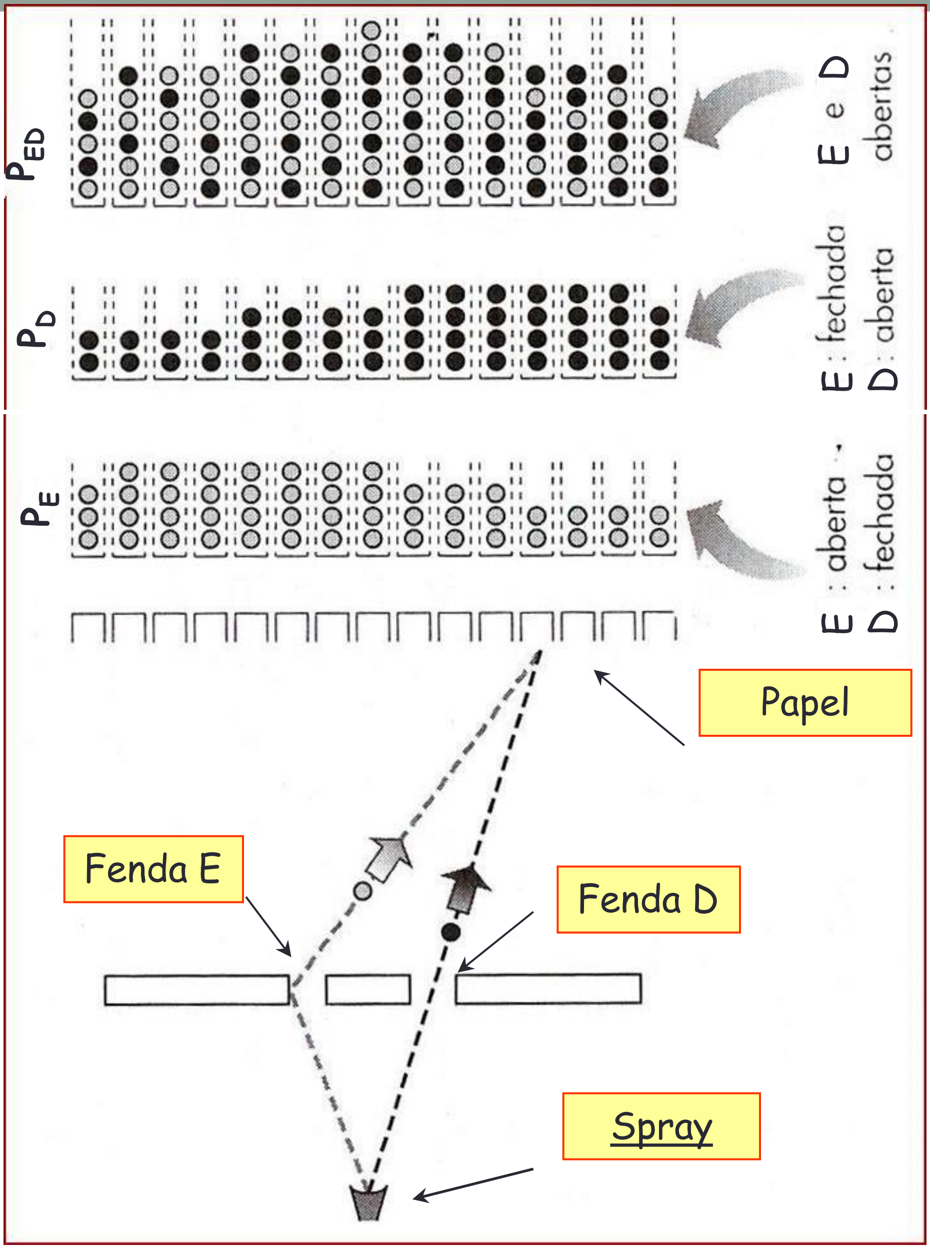
Fótons

- Fotografias com tempos de exposição diferentes dão indicações do comportamento corpuscular da luz.
- Aumentando o tempo de exposição, a figura da moça fica mais nítida.
- Luz: onda ou partícula?

G.I. Taylor: fenda dupla com fótons. Muitos juntos ⇒ interferência. Um de cada vez ⇒ ⇒ interferência. Portanto a interferência ocorre entre partes da onda de 1 partícula.

Partículas (grandes)

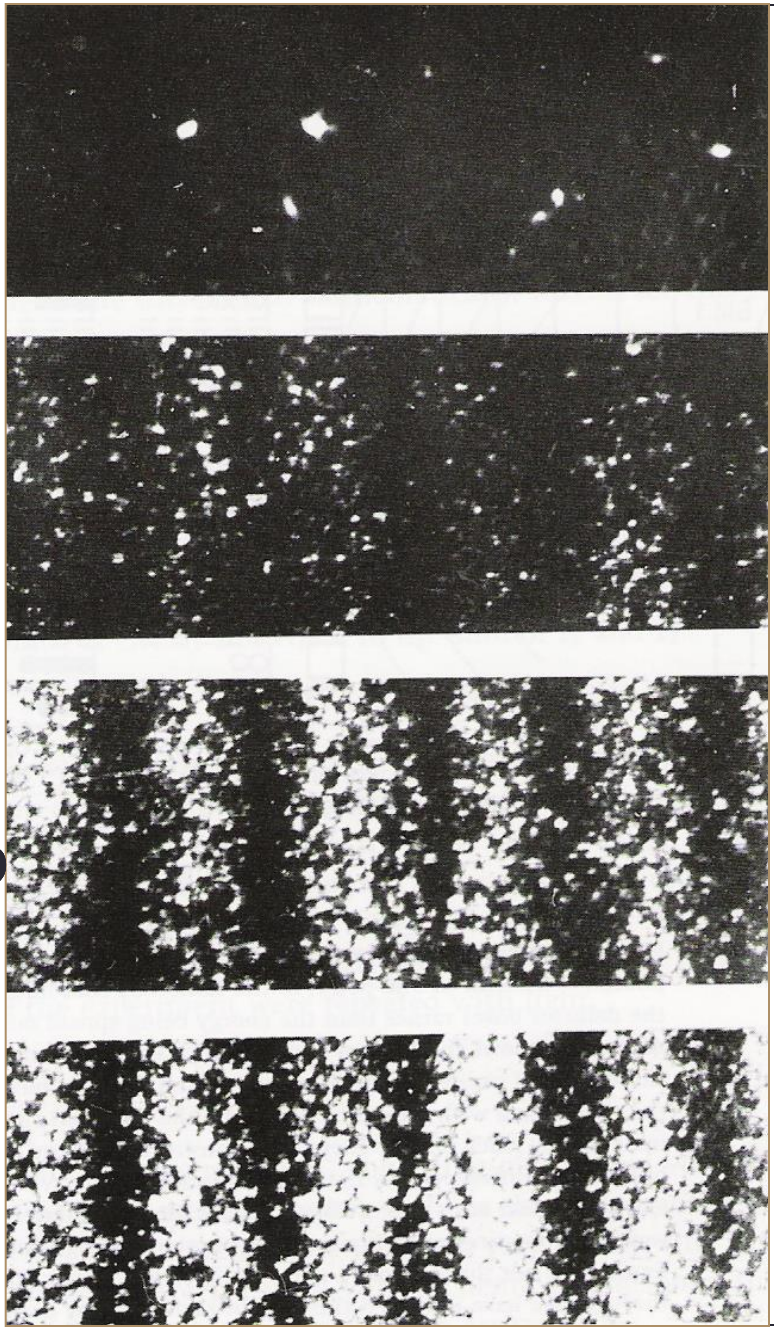
- Um spray é usado para jogar tinta sobre um anteparo coberto por papel.



Elétrons

- Feixe de elétrons incidindo sobre um anteparo com duas fendas: **Interferência!**

- Mas não deveria haver um comportamento como o das esferas?
- Elétrons: partículas ou ondas?



0,02 s

10 s

60 s

120 s

Elétrons e ondas

Hipóteses:

- Os elétrons dividem-se em dois e essas metades pass[illegible]

Falso! Não existe esse elétron dividido

- Os elétrons do feixe ao atingirem as fendas, interagem e produzem esse padrão coletivo de interferência

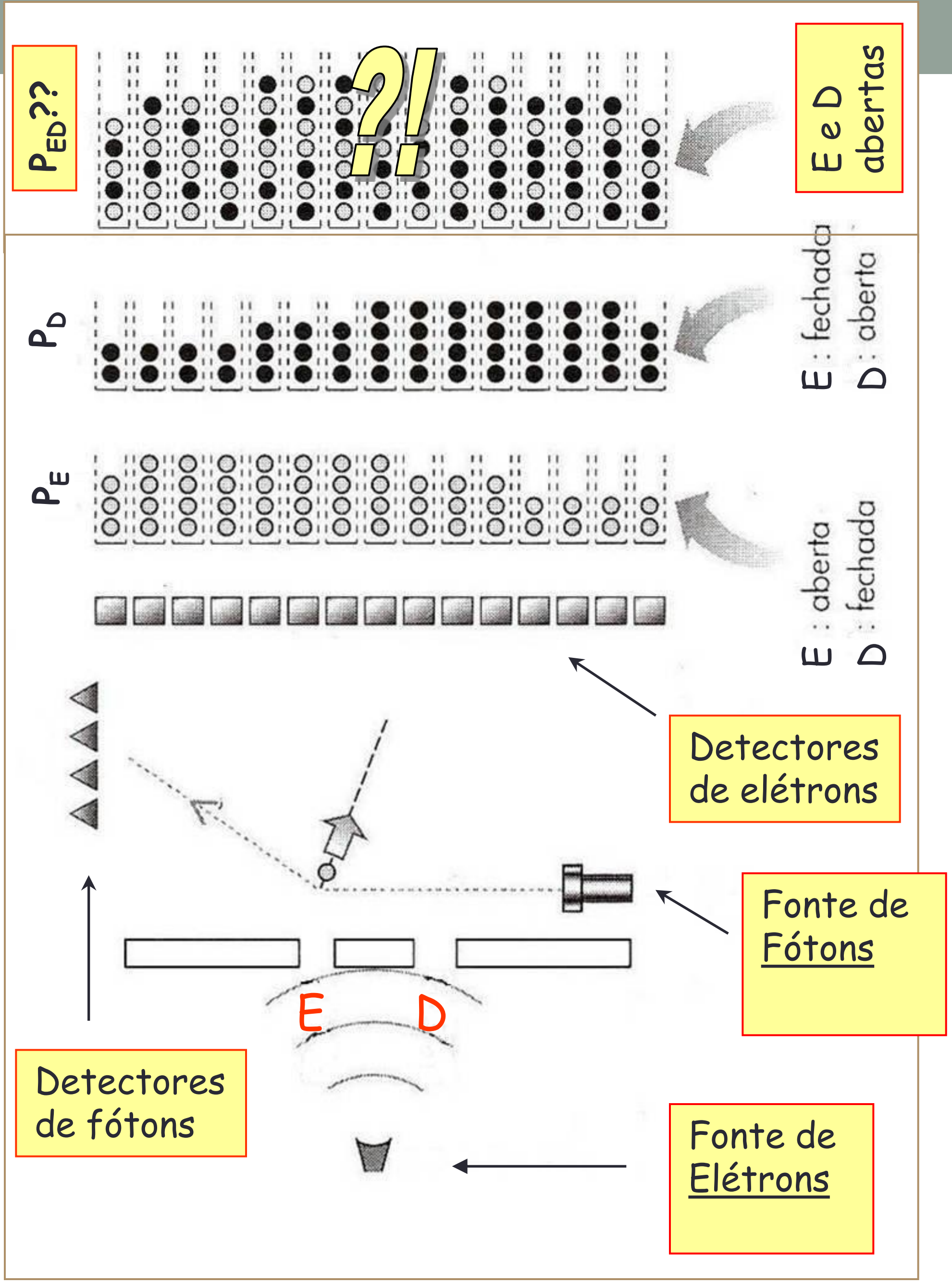
Falso! Basta fazer passar só 1 por vez

O que precisamos é saber por onde o elétron passou.

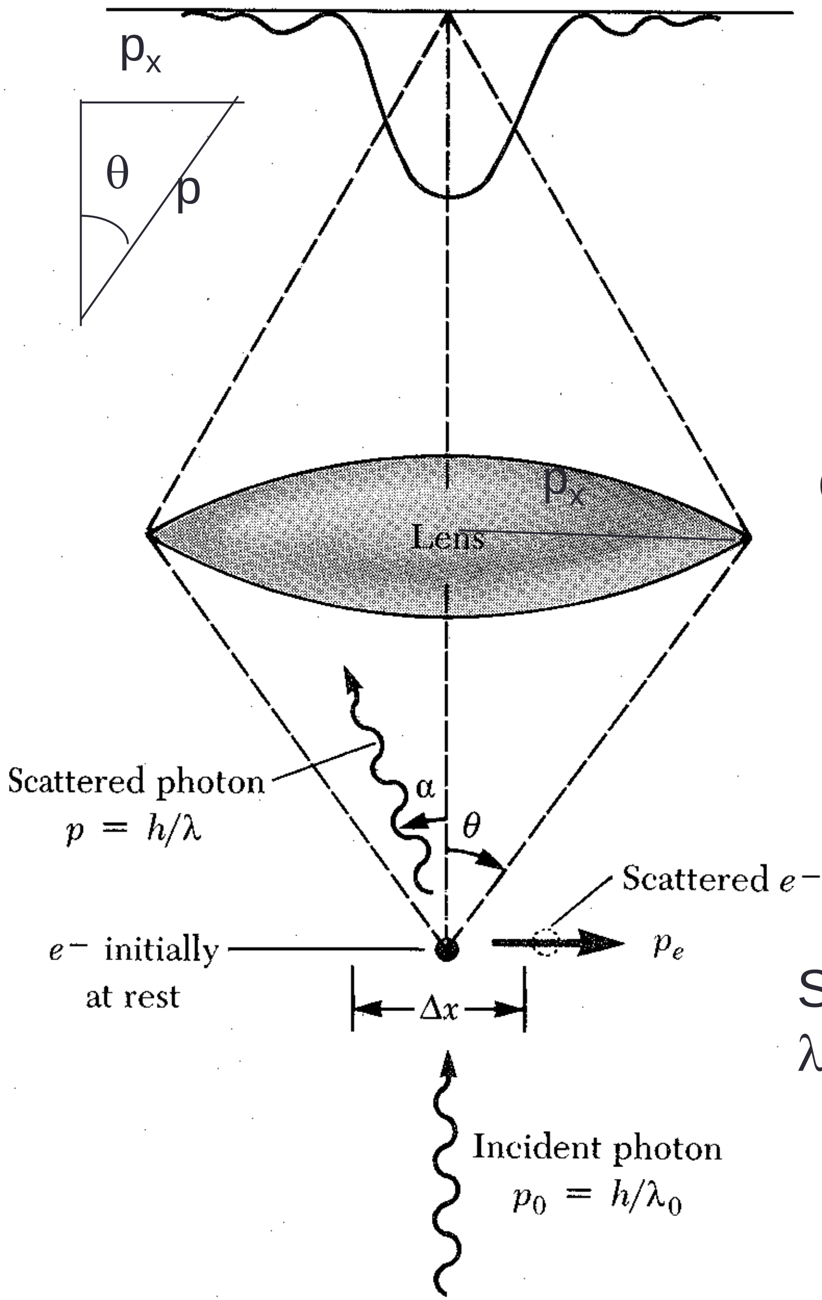
Observando elétrons

- Fácil: é só marcar por qual fenda o elétron passou.
- Isto pode ser feito usando uma fonte de fótons após o anteparo.

□ MAS ....



Tentar observar (hipoteticamente) um 1 e^- num microscópio iluminando-o com 1 fóton



$$\text{Fóton}: -p\,\text{sen}\theta \le p_x \le p\,\text{sen}\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p_x = 2p\,\text{sen}\theta = \frac{2h}{\lambda}\text{sen}\theta = \Delta p_e$$

Microscópio: limite na definição da imagem devido à difração ⇒ poder de resolução (Δx)

Portanto:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\,\text{sen}\theta}$$

$$\Delta p_x \Delta x \approx \left(\frac{2h}{\lambda}\text{sen}\theta\right)\left(\frac{\lambda}{2\,\text{sen}\theta}\right) = h > \frac{\hbar}{2}$$

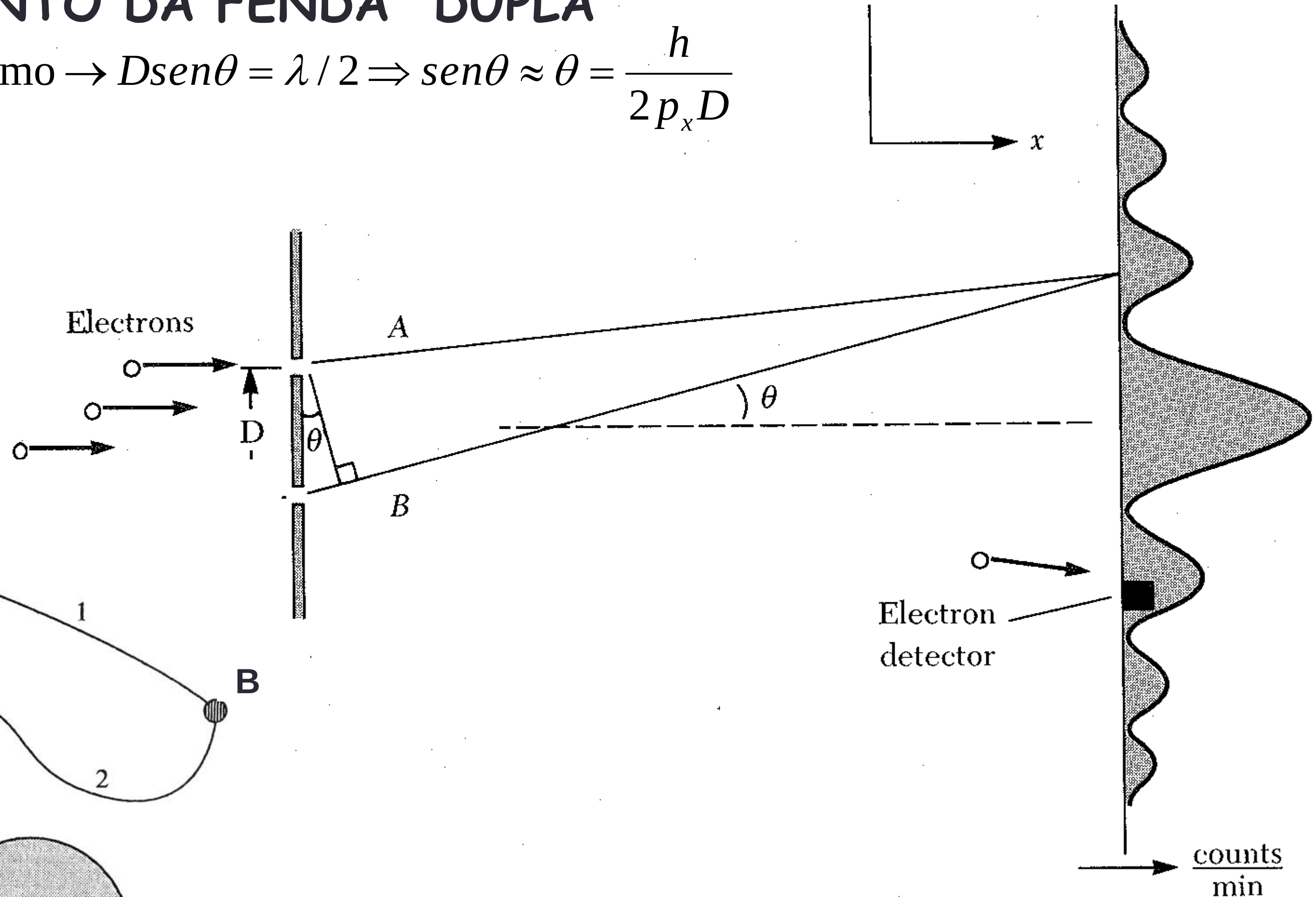
Se Δx diminui ⇒ Δp_x aumenta. Por ex.:

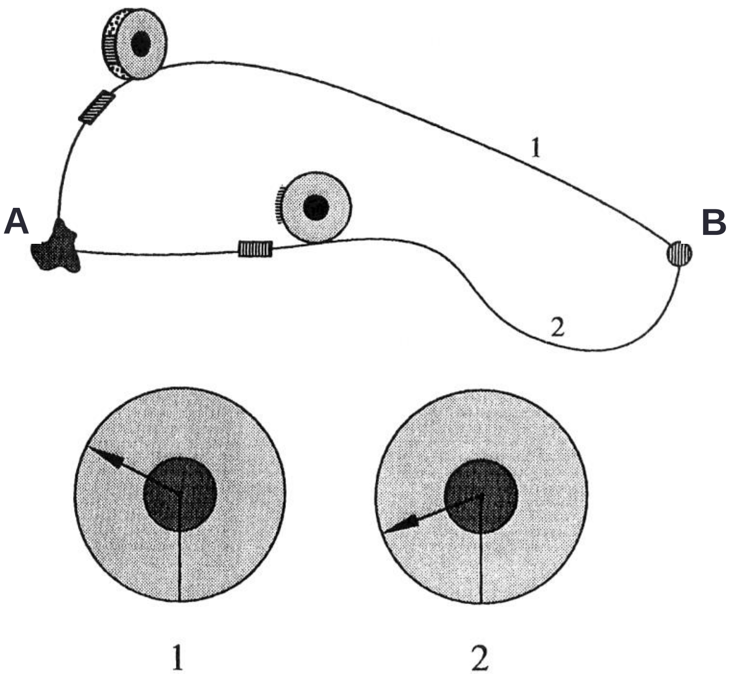
$\lambda\downarrow \Rightarrow \Delta x\downarrow \Rightarrow \Delta p_x\uparrow$

Esta análise mostra que o princípio de incerteza é uma imposição da natureza

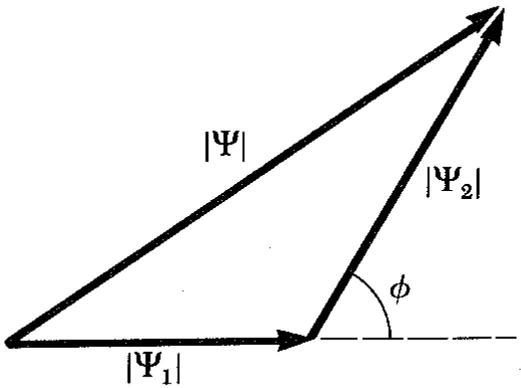
EXPERIMENTO DA FENDA DUPLA

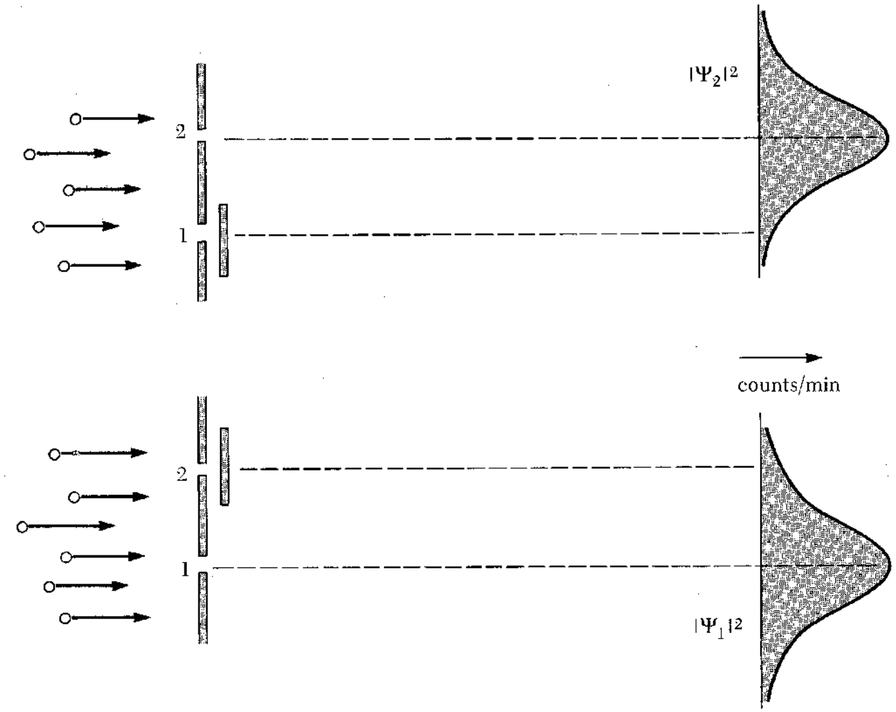
$$\text{Mínimo} \rightarrow D\,sen\theta = \lambda/2 \Rightarrow sen\theta \approx \theta = \frac{h}{2p_x D}$$





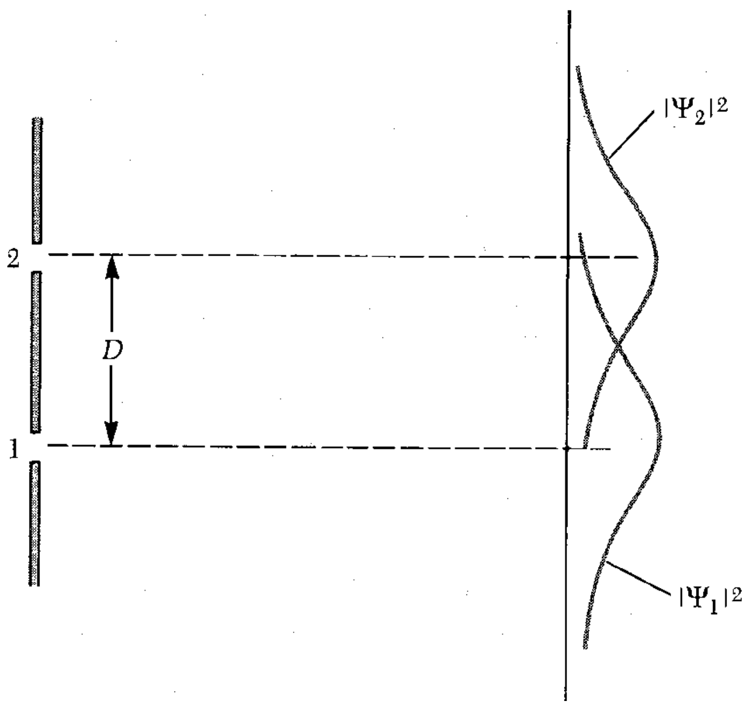
Característica fundamental: fase.
Ondas iguais, caminhos diferentes ⇒ fases diferentes ⇒ interferência

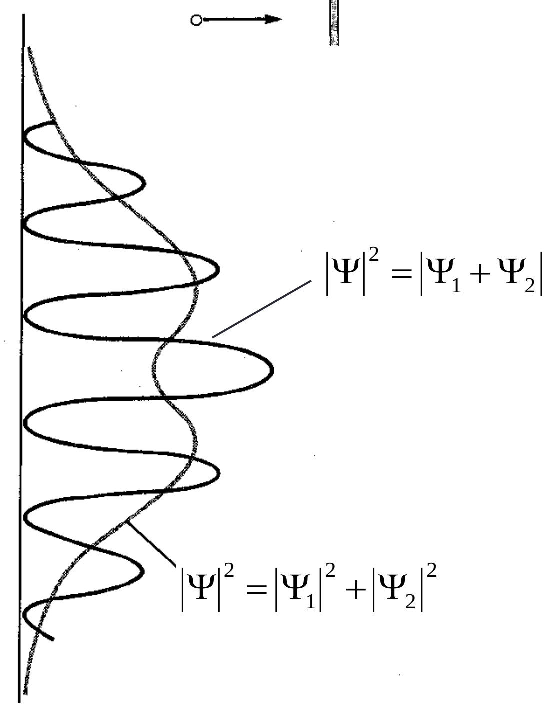




$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$$

$$|\Psi|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2|\Psi_1||\Psi_2|\cos\phi$$





Caso	**Função de onda**	**Contagens/min. na tela**
Elétron é medido passando pela fenda 1 ou 2	Ψ_1 ou Ψ_2	$\lvert\Psi_1\rvert^2 + \lvert\Psi_2\rvert^2$
Sem determinar a passagem do elétron	$\Psi_1 + \Psi_2$	$\lvert\Psi_1\rvert^2 + \lvert\Psi_2\rvert^2 + 2\lvert\Psi_1\rvert\lvert\Psi_2\rvert\cos\phi$