

Semelhança, Análise Dimensional e Modelos

PME 2230 - Mecânica dos Fluidos I

PME/EP/USP

Prof. Antonio Luiz Pacífico

2º Semestre de 2016

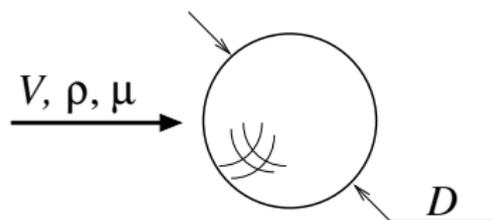
Conteúdo da Aula

- 1 Introdução
- 2 Análise Dimensional
- 3 Teorema de Buckingham para Termos Π
- 4 Principais Grupos Adimensionais em Mecânica dos Fluidos
- 5 Modelagem e Semelhança
- 6 Exercícios

A Mecânica dos Fluidos é uma ciência extremamente dependente da investigação experimental. As teorias de semelhança, análise dimensional e modelagem permitem que ensaios em modelos (realizados em laboratório) possam ser aplicados em escalas reais.

A amplificação dos resultados com modelos possuem limitações, mas trazem sempre resultados que auxiliam na análise de problemas complexos.

Exemplo Introdutório



Considere o escoamento ao redor de uma esfera. Deseja-se saber como a força de arrasto aerodinâmico é influenciada pelas variáveis: velocidade, V , massa específica, ρ , e viscosidade, μ , do fluido e pelo diâmetro, D , da esfera.

Quantos experimentos serão necessários?

Quanto tempo para realizá-los?

Quais serão as principais dificuldades para sua realização?

E se V, ρ, μ e D pudessem ser *aglomerados* num único parâmetro?

	FLt System	MLt System
Acceleration	Lt^{-2}	Lt^{-2}
Angle	$F^0L^0t^0$	$M^0L^0t^0$
Angular velocity	t^{-1}	t^{-1}
Area	L^2	L^2
Density	$FL^{-4}t^2$	ML^{-3}
Energy	FL	ML^2t^{-2}
Force	F	MLt^{-2}
Frequency	t^{-1}	t^{-1}
Length	L	L
Mass	$FL^{-1}t^2$	M
Moment of a force	FL	ML^2t^{-2}
Moment of inertia (area)	L^4	L^4
Momentum	Ft	MLt^{-1}
Power	FLt^{-1}	ML^2t^{-3}
Pressure	FL^{-2}	$ML^{-1}t^{-2}$
Specific weight	FL^{-3}	$ML^{-2}t^{-2}$
Stress	FL^{-2}	$ML^{-1}t^{-2}$
Time	t	t
Torque	FL	ML^2t^{-2}
Velocity	Lt^{-1}	Lt^{-1}
Viscosity (dynamic)	$FL^{-2}t$	$ML^{-1}t^{-1}$
Viscosity (kinematic)	L^2t^{-1}	L^2t^{-1}
Volume	L^3	L^3
Work	FL	ML^2t^{-2}

Toda grandeza física possui uma informação qualitativa (unidade de medida) e uma quantitativa (valor numérico). Ex: 75 m/s → 75 é a informação quantitativa e m/s é a informação qualitativa. A informação qualitativa possui grandeza primária quando é expressa em unidades de medidas fundamentais: m, kg, s, K, ... no SI; ou secundária quando é expressa em unidades de medidas derivadas (combinadas) das fundamentais: m/s, kg/m³, N, J, Pa, ... no SI.

Homogeneidade Dimensional: Toda equação que envolve variáveis físicas deve ter a mesma unidade de medida em ambos os lados do sinal de igualdade. Ex: $W = p\Delta V \therefore \text{N.m} = (\text{N/m}^2) \cdot \text{m}^3 \Rightarrow \text{N.m} = \text{N.m}$. Ou, simbolicamente, $\text{F.L} = (\text{F.L}^{-2}) \cdot \text{L}^3 \Rightarrow \text{F.L} = \text{F.L}$

A **análise dimensional** só tem sentido quando o número de variáveis adimensionais necessárias para descrever o fenômeno físico for menor que o número de variáveis físicas dimensionais envolvidas no fenômeno.

Teorema de Buckingham para Termos Π

Se uma equação envolvendo k variáveis for dimensionalmente homogênea, ela pode ser reduzida a uma relação entre $k - r$ produtos dimensionais independentes, onde r é o número mínimo de dimensões básicas necessárias para descrever as variáveis (Munson).

É comum em análise dimensional usar o símbolo Π (pi grego maiúsculo) para representar um produto de variáveis dimensionais cujo resultado seja adimensional.

Método da Repetição de Variáveis

- 1 Liste todas as variáveis que estão envolvidas no problema (determinação de k);
- 2 Represente cada uma das variáveis em termos das dimensões básicas (determinação de r);
- 3 Determine o número necessário de termos Π ($k - r$);
- 4 Escolha as variáveis de repetição, onde o número necessário é igual ao número de dimensões básicas;
- 5 Forme um termo Π multiplicando uma das variáveis não repetidas pelo produto das variáveis de repetição, cada uma delas elevada a um expoente que torne a combinação adimensional;
- 6 Repita o passo 5 para cada uma das variáveis não repetidas remanescentes;
- 7 Verifique todos os termos Π resultantes cuidadosamente para ter certeza de que eles sejam adimensionais;
- 8 Represente a forma final como uma relação entre os termos Π e pense sobre o que isso significa. Geralmente:

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{k-r})$$

Exemplo: problema do arrasto sobre uma esfera

São dados: $F_D = f(\rho, V, D, \mu)$

Passo 1: $F_D, \rho, V, D, \mu \Rightarrow k = 5$ parâmetros (variáveis) dimensionais.

Passo 2: Usando o sistema MLt: $F_D \rightarrow M.L.t^{-2}$; $\rho \rightarrow M.L^{-3}$; $V \rightarrow M.t^{-1}$; $D \rightarrow L$; e $\mu \rightarrow M.L^{-1}.t^{-1}$. Portanto bastam 3 dimensões básicas para montar as dimensões de todas as variáveis: $r = 3$.

Passo 3: $k - r = 5 - 3 = 2$ grupos Π .

Passo 4: $r = 3 \Rightarrow 3$ variáveis de repetição devem ser escolhidas. Escolhe-se, por exemplo, ρ, V, D . Sempre que possível escolhas aquelas cujas dimensões envolvidas sejam as mais simples em termos de combinação de unidades básicas.

Exemplo: problema do arrasto sobre uma esfera

Passo 5: Determinação de Π_1 .

$$\Pi_1 = \rho^a \cdot V^b \cdot D^c \cdot F_D \therefore \left(\frac{M}{L^3}\right)^a \cdot \left(\frac{L}{t}\right)^b \cdot (L)^c \cdot \frac{M \cdot L}{t^2} = M^0 \cdot L^0 \cdot t^0$$

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{\rho \cdot V^2 \cdot D^2} : \begin{cases} M: a + 1 = 0 \rightarrow a = -1 \\ L: -3 \cdot a + b + c + 1 = 0 \rightarrow c = -2 \\ t: -b - 2 = 0 \rightarrow b = -2 \end{cases}$$

Exemplo: problema do arrasto sobre uma esfera

Passo 6: Determinação de Π_2 .

$$\Pi_2 = \rho^d \cdot V^e \cdot D^f \cdot \mu \therefore \left(\frac{M}{L^3}\right)^d \cdot \left(\frac{L}{t}\right)^e \cdot (L)^f \cdot \frac{M}{L \cdot t} = M^0 \cdot L^0 \cdot t^0$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D} : \begin{cases} M: d + 1 = 0 \rightarrow d = -1 \\ L: -3 \cdot d + e + f - 1 = 0 \rightarrow f = -1 \\ t: -e - 1 = 0 \rightarrow e = -1 \end{cases}$$

Exemplo: problema do arrasto sobre uma esfera

Passo 7: Verificação da adimensionalidade.

$$\Pi_1 = \frac{F_D}{\rho \cdot V^2 \cdot D^2} \equiv \frac{M \cdot L}{t^2} \cdot \frac{L^3}{M} \cdot \frac{t^2}{L^2} \cdot \frac{1}{L^2} \equiv 1 \text{ OK!}$$

$$\Pi_2 = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D} \equiv \frac{M}{L \cdot t} \cdot \frac{L^3}{M} \cdot \frac{t}{L} \cdot \frac{1}{L} \equiv 1 \text{ OK!}$$

Passo 8: Conclusão.

$$\Pi_1 = \phi(\Pi_2) \therefore \frac{F_D}{\rho \cdot V^2 \cdot D^2} = \phi\left(\frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot D}\right)$$

Número de Reynolds, Re: Importante na maioria dos problemas de mecânica dos fluidos. É uma medida da razão entre as forças de inércia de um elemento fluido e os efeitos viscosos no elemento. Em homenagem a Osborne Reynolds (1842 a 1912).

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot V \cdot L}{\mu}$$

Número de Froude, Fr: Utilizado em escoamento com superfície livre (rios, oceanos, canais abertos...). Indica a razão entre forças de inércia e o peso do elemento fluido. Em homenagem a William Froude (1810 a 1879).

$$\text{Fr} = \frac{V}{\sqrt{g \cdot L}}$$

Número de Euler, Eu: Utilizado em problemas onde a pressão, ou diferença de pressão, são importantes. É uma medida da razão entre as forças de pressão e forças de inércia um elemento fluido. Em homenagem a Leonhard Euler (1707 a 1783).

$$Eu = \frac{p}{\rho \cdot V^2}$$

Números de Cauchy, Ca, e de Mach, Ma: Utilizados em situações onde a compressibilidade do fluido é importantes. É uma medida da razão entre as forças de inércia e as de compressibilidade. Em homenagem a Augustin Louis de Cauchy (1789 a 1857) e Ernst Mach (1838 a 1916).

$$Ca = \frac{\rho \cdot V^2}{E_v} ; Ma = \frac{V}{c} ; Ma^2 = Ca$$

Número de Strouhal, St: Utilizado em escoamentos transitórios ou com frequência de oscilação característica. É uma medida da relação entre as forças de inércia devidas a transitoriedade do escoamento (aceleração local) e as forças de inércia devidas a variação da velocidade de ponto a ponto do campo de escoamento (aceleração convectiva). Em homenagem a Vicenz Strouhal (1850 a 1922).

$$St = \frac{f \cdot L}{V}$$

Número de Weber, We: Utilizado em problemas onde os efeitos da tensão superficial são importantes. Indica a razão entre forças de inércia e força devida à tensão superficial que atuam num elemento fluido. Em homenagem a Moritz Weber (1871 a 1951).

$$We = \frac{\rho \cdot V^2 \cdot L}{\sigma}$$

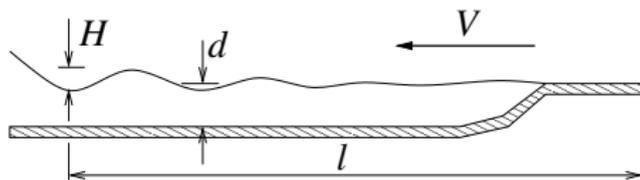
Modelo é uma representação de um sistema físico que pode ser utilizada para prever o comportamento de um sistema com relação a algum aspecto desejado. O sistema físico para o qual as estimativas são feitas é denominado protótipo.

Se $\Pi_1 = \phi(\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_n)$ para um protótipo, então $\Pi_{1m} = \phi(\Pi_{2m}, \Pi_{3m}, \dots, \Pi_{nm})$ para o modelo: a função ϕ é a mesma. Assim diz-se que $\Pi_1 = \Pi_{1m}$ é a equação de predição, enquanto $\Pi_2 = \Pi_{2m}$, $\Pi_3 = \Pi_{3m}$, ..., $\Pi_n = \Pi_{nm}$ são as leis de modelagem (ou condições de similaridade).

Enunciado: A elevação de pressão, Δp , por meio de uma bomba pode ser representada como $\Delta p = f(D, \rho, \omega, \dot{V})$ onde D é o diâmetro do impelidor, ρ é a massa específica do fluido, ω é a velocidade de rotação e \dot{V} é a vazão volumétrica. Determine um conjunto de parâmetros adimensionais apropriados.

Exercício de Aula 2

Enunciado: Deseja-se determinar a altura de uma onda quando o vento sopra a superfície de um lago. Admite-se que a altura, H , da onda seja uma função da velocidade do vento, V , da massa específica da água, ρ , da massa específica do ar, ρ_a , da profundidade da água, d , da distância da margem, l , e da aceleração da gravidade, g , conforme mostrado na Figura a seguir. Utilize d , V e ρ como variáveis de repetição para determinar um conjunto apropriado de termos pi, que possa ser utilizado para descrever este problema.



Exercício de Aula 3

Enunciado: A queda de pressão por unidade de comprimento, $\Delta p_l = \Delta p/l$, (N/m^2)/m, para o escoamento do sangue através de um tubo horizontal de pequeno diâmetro é uma função da vazão volumétrica, \dot{V} , do diâmetro, D , e da viscosidade do sangue, μ . Para uma série de testes no qual $D = 2 \text{ mm}$ e $\mu = 0,004 \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$, foram obtidos os seguintes dados, onde os valores listados de Δp foram medidos ao longo do comprimento, $l = 300 \text{ mm}$:

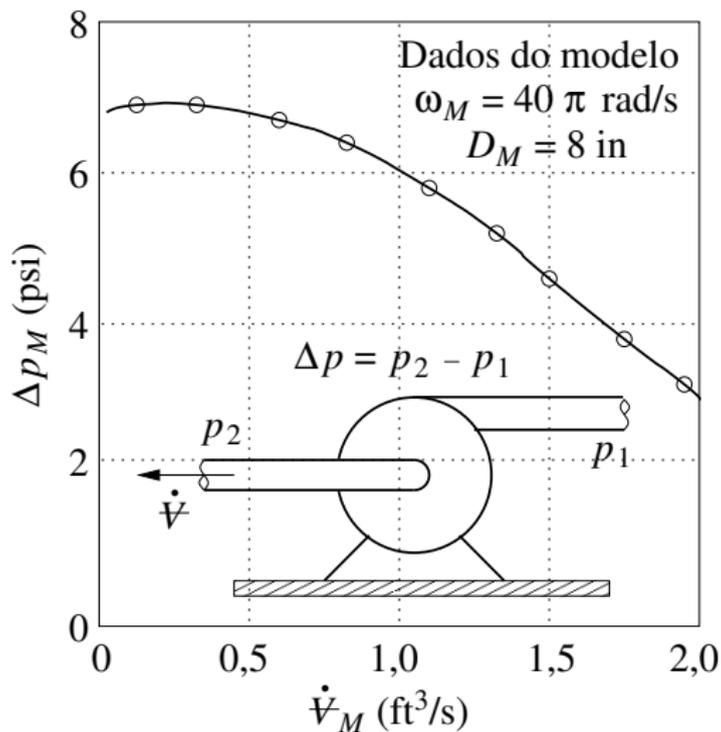
\dot{V} [m ³ /s]	Δp [N/m ²]
$3,6 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^4$
$4,9 \times 10^{-6}$	$1,5 \times 10^4$
$6,3 \times 10^{-6}$	$1,9 \times 10^4$
$7,9 \times 10^{-6}$	$2,4 \times 10^4$
$9,8 \times 10^{-6}$	$3,0 \times 10^4$

Desenvolva uma análise dimensional para este problema e utilize os dados fornecidos na Tabela acima para determinar uma relação geral entre Δp_l e \dot{V} que seja válida para outros valores de D , l e μ .

Enunciado: O projeto de um modelo de um rio é baseado na similaridade do número de Froude, onde o número de Froude, $Fr = V/(g \cdot y)^{1/2}$, é uma função da velocidade, V , da água, da profundidade, y , da água e da aceleração da gravidade, g . Se a profundidade do rio for de 3 m e a profundidade do modelo for de 100 mm, que velocidade do protótipo corresponde à velocidade de 2 m/s do modelo?

Enunciado: A elevação de pressão, Δp , por meio de uma bomba centrífuga de uma dada forma (veja Figura a seguir) pode ser expressa por $\Delta p = f(D, \omega, \rho, \dot{V})$ onde D é o diâmetro do impelidor, ω é a velocidade angular do impelidor, ρ é a massa específica do fluido e \dot{V} é a vazão volumétrica através da bomba. Um modelo de bomba com um diâmetro de 8 in (= 0,2032 m) é testado em laboratório, utilizando água. Quando operando a uma velocidade angular de 40π rad/s, a elevação da pressão no modelo em função de \dot{V} é mostrada na Figura a seguir. Utilize essa curva para estimar o aumento de pressão por meio de uma bomba geometricamente semelhante (protótipo) para uma vazão no protótipo de $6 \text{ ft}^3/\text{s}$ (= $0,17 \text{ m}^3/\text{s}$). O protótipo tem um diâmetro de 12 in (= 0,3048 m) e opera a uma velocidade angular de 60π rad/s. O fluido do protótipo também é água.

Continuação do Exercício de Aula 5



Exercício Proposto 1

Enunciado: A velocidade, V , de uma partícula esférica caindo lentamente em um líquido muito viscoso pode ser expressa por $V = f(d, \mu, \gamma, \gamma_s)$ onde d é o diâmetro da partícula, μ é a viscosidade do líquido e γ e γ_s são os pesos específicos do líquido e da partícula, respectivamente. Desenvolva um conjunto de parâmetros adimensionais que possam ser utilizados neste problema.

Resposta:
$$\frac{V \cdot \mu}{d^2 \cdot \gamma} = \Phi \left(\frac{\gamma_s}{\gamma} \right)$$

Exercício Proposto 2

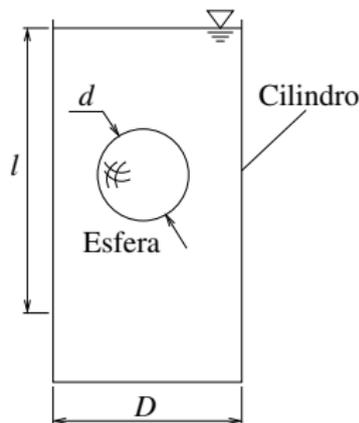
Enunciado: A sustentação e o arraste de um hidrofólio devem ser determinados através de teste em túnel de vento utilizando ar padrão. Se houver necessidade de realizar testes correspondentes à escala plana, qual a velocidade necessária no túnel de vento correspondente à velocidade do hidrofólio na água do mar de 20 mph (= 8,94 m/s)? Admita a similaridade do número de Reynolds.

Resposta: $V_m \cong 111,6$ m/s.

Exercício Proposto 3

Enunciado: A viscosidade, μ , de um líquido pode ser medida através da determinação do tempo, t , tomado por uma esfera de diâmetro, d , para cair lentamente através de uma distância, l , em um cilindro vertical de diâmetro, D , contendo o líquido (Figura ao lado).

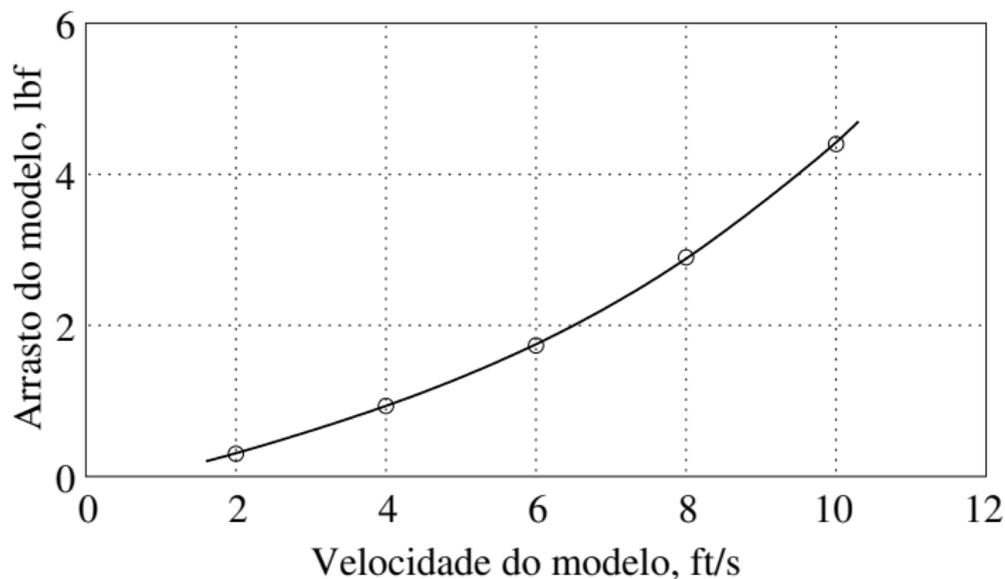
Admita que $t = f(l, d, D, \mu, \Delta\gamma)$, onde $\Delta\gamma$ é a diferença entre os pesos específicos da esfera e do líquido. Utilize análise dimensional para mostrar como t é relacionado com μ e descreva como esse instrumento pode ser utilizado para medir viscosidade.



Exercício Proposto 4

Enunciado: O arraste sobre uma esfera em movimento no interior de um fluido é uma função do diâmetro, da velocidade da esfera, da viscosidade e da massa específica do fluido. Testes em laboratório com uma esfera de 4 in (= 0,1016 m) de diâmetro foram realizados em um túnel de água e alguns dados do modelo foram representados graficamente na Figura a seguir. Para esses testes a viscosidade da água foi de $2,3 \times 10^{-5}$ lbf.s/ft² (= $1,10124 \times 10^{-3}$ N.s/m²) e a massa específica da água foi de 1,94 slug/ft³ (= 999,876 kg/m³). Estime o arraste em um balão de 8 ft (= 2,4384 m) de diâmetro movendo-se no ar com uma velocidade de 3 ft/s (= 0,9144 m/s). Admita o ar com uma viscosidade de $3,7 \times 10^{-7}$ lbf.s/ft² (= $1,7716 \times 10^{-5}$ N.s/m²) e uma massa específica de $2,38 \times 10^{-3}$ slug/ft³ (= 1,2267 kg/m³). Admita semelhança do número de Reynolds.

Continuação do Exercício Proposto 4



Resposta: 1,22 N (o resultado deste exercício admite variações dentro de uma faixa de 10% em torno da resposta dada).