

Instituto de Física de São Carlos, USP — FCM502

Números Complexos

Setembro de 2016

I. A UNIDADE IMAGINÁRIA

Os números complexos foram introduzidos na matemática para resolver equações algébricas que não têm solução real. O exemplo mais simples é a igualdade

$$x^2 + 1 = 0. \quad (1)$$

Uma vez que o quadrado de qualquer número real é positivo, o lado esquerdo não pode anular-se, e a Eq. (1) não tem solução real. Entretanto, podemos seguir o procedimento tradicional para mostrar que

$$x = \pm\sqrt{-1}. \quad (2)$$

Como não existe raiz quadrada de -1, no domínio dos números reais a Eq. (2) não ajuda. Entretanto, podemos definir a *unidade imaginária* i pela identidade

$$i \equiv \sqrt{-1}, \quad (3)$$

para mostrar que a Eq. (1) tem duas soluções: $x = \pm i$.

A partir dessa definição, qualquer equação algébrica passa a ter solução. Seja, por exemplo, a equação

$$x^2 + x + 1 = 0. \quad (4)$$

A fórmula de Bhaskara conduz às soluções

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}, \quad (5)$$

que podem ser separadas nas formas

$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (6)$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (7)$$

.

II. NÚMEROS COMPLEXOS

A Eq. (4) tem duas soluções que diferem pelos sinais dos termos proporcionais a i . Cada solução é um número *complexo*, que tem uma parte real [o primeiro termo à direita em cada uma das Eqs. (6)] e outra imaginária (o coeficiente de i no segundo termo à direita). Uma vez que suas partes reais são iguais e as imaginárias são simétricas, os complexos x_1 e x_2 formam um par *conjugado*.

A. Conjugação

De maneira mais geral, se

$$z = a + bi, \quad (8)$$

onde a e b são dois números reais quaisquer, o número complexo

$$z^* = a - bi \quad (9)$$

é o complexo conjugado de z .

As duas soluções da Eq. (4) são, portanto, conjugadas, o que não é coincidência. Na Eq. (3), definimos a unidade imaginária como $\sqrt{-1}$. Poderíamos muito bem ter definido i como $-\sqrt{-1}$, sem afetar o mundo em que vivemos. Assim, as soluções complexas (números com partes imaginárias distintas de zero) de qualquer equação algébrica real (isto é, com coeficientes reais), têm de aparecer aos pares: uma é o complexo conjugado da outra.

Essa noção pode ser estendida ao cálculo de propriedades físicas. Qualquer grandeza que possa ser medida em laboratório, tal como velocidade, momento angular ou energia, tem de ser dada por números reais. Conforme veremos, trabalhar com números complexos pode simplificar o cálculo de certas propriedades. No final, entretanto, o resultado tem de ser um ou mais números reais. Além disso, sempre que a propriedade física for expressa por uma expressão que envolva números complexos, essa expressão deve permanecer invariante quando i for substituído por $-i$.

B. Operações

Dados dois números complexos $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, as operações aritméticas são definidas de forma a preservar as propriedades das operações entre números reais. Mais explicitamente, as seguintes identidades definem as operações aritméticas:

1. Adição

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (10)$$

2. Subtração

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (11)$$

3. Multiplicação

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (12)$$

Um caso particular importante é a multiplicação de um número complexo por seu conjugado. Da Eq. (12) podemos ver que o produto é um número real. Por exemplo,

$$z_1 z_1^* = x_1^2 + y_1^2. \quad (13)$$

Em função desse resultado, define-se a *norma* (ou o *módulo*) de um número complexo z pela identidade

$$|z| = \sqrt{z z^*}. \quad (14)$$

4. Divisão

Antes de definir a divisão, convém definir o inverso de um número complexo z :

$$\frac{1}{z} \equiv \frac{z^*}{z z^*} \quad (15)$$

ou seja

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2}. \quad (16)$$

A fração à direita na Eq. (16) é uma divisão por um número real. Para efetuá-la, basta dividir as partes real e imaginária de z^* por $|z|^2$.

A razão entre dois números z_1 e z_2 é então definida como o produto de z_1 pelo inverso de z_2 :

$$\frac{z_1}{z_2} \equiv \frac{z_1 z_2^*}{|z_2|^2}. \quad (17)$$

III. PLANO COMPLEXO

Dado que os números complexos têm duas componentes, real e imaginária, a sua representação geométrica ocupa o *plano complexo*, também conhecido como de Argand e Gauss. O painel da esquerda na Fig. 1 mostra exemplos.

O painel da direita mostra as partes real x e imaginária y de um número complexo z . No triângulo retângulo formado pela linha azul que corre da origem até o ponto z , a vertical que cai de z até o eixo horizontal e o trecho horizontal do eixo real entre o ponto z e a origem, a hipotenusa é a norma de z , e o ângulo φ é chamado de *fase* ou *argumento* de z . A geometria e a trigonometria nos dizem então que

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (18)$$

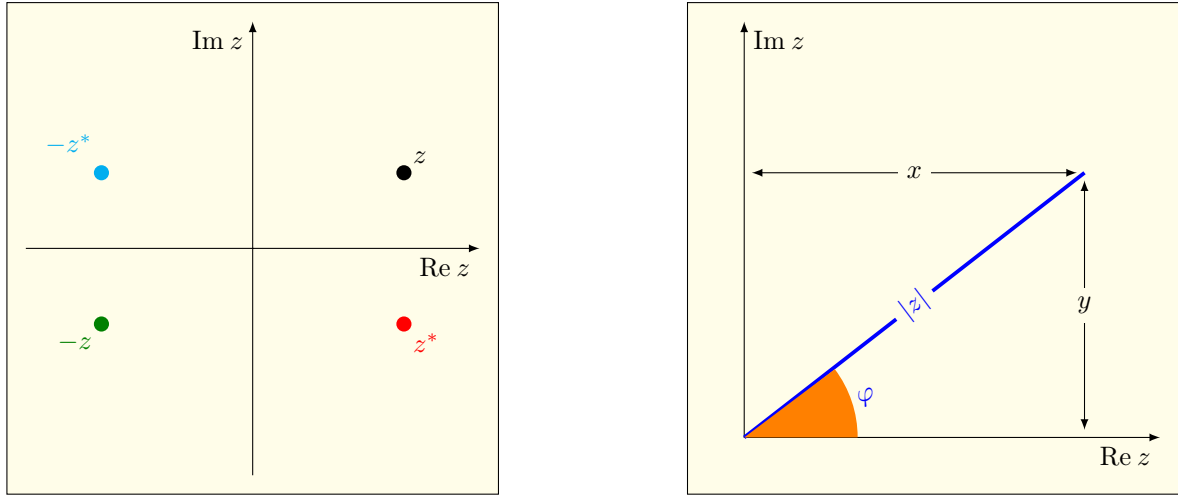


Figura 1 Representação geométrica de números complexos. No painel da esquerda, o complexo $z = 2 + i$ é representado por um ponto negro, e os números z^* , $-z$ e $-z^*$, por pontos vermelho, verde e ciano, respectivamente. O painel da direita mostra a norma $|z|$ e a fase φ do número complexo $z = x + iy$

e

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (19)$$

A Eq. (18) determina, sem nenhuma ambiguidade, a norma de z . Já a Eq. (19) somente determina a fase φ a menos de um múltiplo de π , pois, dado um ângulo θ qualquer, a trigonometria nos ensina que $\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg}(\theta + \pi)$. Os sinais de x e y nos dizem em que quadrante φ está, e assim eliminam parte dessa ambiguidade. Se x e y forem positivos, por exemplo, φ pertencerá ao primeiro quadrante; se x for negativo e y positivo, φ estará no segundo quadrante, e assim por diante. Mesmo após análise dos sinais, porém, a fase somente será determinada a menos de um múltiplo de 2π .

Para o número $z = -1$, por exemplo, para o qual $x = -1$ e $y = 0$, a Eq. (18) mostra que $|z| = 1$. De acordo com a Eq. (19), a sua fase é dada por $\operatorname{tg} \varphi = 0$, equação que tem infinitas soluções: $\varphi = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$. Uma vez que o sinal de x é negativo, a fase não pode ser $0, \pm2\pi, \dots$, mas ainda ficamos com infinitas alternativas: $\varphi = \pm\pi, \pm3\pi, \dots$

Essa última ambiguidade não precisa e nem deve ser eliminada. Para a maioria das aplicações, ela não tem consequências, e é suficiente escolher a fase que pertence a um intervalo pré-definido de tamanho 2π . Em geral se escolhe o intervalo $-\pi < \varphi \leq \pi$. Assim, a fase do número $z = -1$ é π .

Há, porém, uma exceção. Quando se extrai a raiz quadrada de um número z , é necessário considerar dois valores para a fase: um no intervalo $-\pi < \varphi \leq \pi$ e outro no intervalo subsequente $\pi < \varphi \leq 3\pi$. Quando se extrai a raiz cúbica, são necessários três valores, em três intervalos, e assim sucessivamente. A extração de raízes será discutida na Seção V.E.

As Eqs. (18) e (19) permitem determinar a norma e a fase de um número complexo a partir de suas componentes real e imaginária. Reciprocamente, do triângulo retângulo no painel direito da Fig. 1, podemos

ver que

$$x = |z| \cos(\varphi) \quad (20)$$

e

$$y = |z| \sin(\varphi), \quad (21)$$

e assim, da norma e da fase de z conseguimos determinar suas partes real e imaginária.

Uma vez que $z = x + iy$, as Eqs. (20) e (21) podem ser combinadas numa só:

$$z = |z| \left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) \right). \quad (22)$$

As transformações (18) e (19) e suas inversas (20) e (21) são muito importantes porque, dependendo da situação, pode ser mais conveniente pensar nas partes real e imaginária ou na norma e na fase do número complexo. Adicionar e subtrair é fácil quando se conhecem as componentes, mas multiplicar e dividir é mais simples quando as normas e fases são conhecidas. Para verificar, basta escrever dois números complexos z_1 e z_2 na forma da Eq. (22), efetuar o produto conforme a receita da Eq. (12) e comparar o resultado com a Eq. (22). Pode-se chegar à mesma conclusão, entretanto, com ajuda de um resultado encontrado pelo matemático suíço Leonhard Euler, no Século XVIII.

IV. A EQUAÇÃO DE EULER

Esta seção discute uma das expressões mais notáveis da matemática, que empregaremos com grande frequência daqui por diante. Para derivá-la, precisamos deixar os números complexos de lado por um instante, e voltar nossa atenção para uma relação bem conhecida do Cálculo. Vamos considerar a função simples

$$f(x) = e^{\alpha x}, \quad (23)$$

onde α é uma constante qualquer.

Do Cálculo, sabemos que

$$\frac{df}{dx} = \alpha e^{\alpha x}, \quad (24)$$

e portanto,

$$\frac{df}{dx} = \alpha f(x). \quad (25)$$

Existe alguma outra função que satisfaz à Eq. (25)? Para responder, basta dividir ambos os lados por $f(x)$ e integrar ambos os lados em relação a x :

$$\int \frac{1}{f(x)} \frac{df}{dx} dx = \alpha \int dx + c. \quad (26)$$

A constante c é necessária porque as integrais são indefinidas.

No lado esquerdo da Eq. (26), agora, podemos mudar a variável de x para f . Resulta que

$$\int \frac{1}{f} df = \alpha x + c. \quad (27)$$

Efetuada a integral no lado esquerdo, temos então que

$$\ln f = \alpha x + c, \quad (28)$$

e se exponenciarmos ambos os lados, encontraremos que

$$f(x) = e^{\alpha x} e^c. \quad (29)$$

O fator e^c é uma constante, que podemos chamar de C . Assim, as únicas funções que satisfazem à Eq. (25) são da forma

$$f(x) = Ce^{\alpha x}, \quad (30)$$

onde C é uma constante qualquer.

Esse resultado nos interessa porque, com ajuda dos números complexos, podemos construir uma função trigonométrica que satisfaz à Eq. (25):

$$F(x) = \cos(x) + i \sin(x). \quad (31)$$

De fato, se derivarmos ambos os lados da Eq. (31) em relação a x , veremos que

$$\frac{dF}{dx} = i \left(\cos(x) + i \sin(x) \right), \quad (32)$$

ou seja

$$\frac{dF}{dx} = iF(x), \quad (33)$$

que tem a forma da Eq. (25) com $\alpha = i$.

Para compatibilizar a Eq. (33) com as Eqs. (25) e (30), somos forçados a admitir que

$$F(x) = Ce^{ix}, \quad (34)$$

onde C é uma constante a ser determinada.

A Eq. (31) pode agora ser substituída no lado esquerdo da Eq. (34) para mostrar que

$$\cos(x) + i \sin(x) = Ce^{ix}, \quad (35)$$

Se tomarmos $x = 0$ em ambos os lados da Eq. (35), veremos imediatamente que $C = 1$. Percebemos, portanto que, para que as Eqs. (25) e (30) valham também para α complexo, é necessário adotar a seguinte definição para a exponencial de um número imaginário θ :

$$e^{i\theta} \equiv \cos(\theta) + i \sin(\theta), \quad (36)$$

resultado que é conhecido como *equação de Euler*.

V. APLICAÇÕES DA EQUAÇÃO DE EULER

A. Trigonometria mais simples

A equação de Euler tem inúmeras aplicações. Uma delas é facilitar a derivação de relações trigonométricas. Vejamos um exemplo. Considere dois ângulos θ_1 e θ_2 . Da Eq. (36), temos que

$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = \left(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1) \right) \left(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2) \right). \quad (37)$$

No lado esquerdo da Eq. (37), o produto de exponenciais é a exponencial da soma dos expoentes. No lado direito, podemos efetuar o produto como aprendemos na Seção II.B.3. Resulta que

$$e^{i\theta_1 + i\theta_2} = \left(\cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \right) + i \left(\sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) \right). \quad (38)$$

De acordo com a própria Eq. (36), porém, o lado esquerdo da Eq. (37) pode ser escrito como combinação de funções trigonométricas:

$$e^{i\theta_1 + i\theta_2} = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2). \quad (39)$$

Basta agora comparar os lados direitos das Eqs. (38) e (39) para ver que

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2) \quad (40)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_2) \cos(\theta_1), \quad (41)$$

dois resultados que podem também ser obtidos geometricamente, em troca de um bocado de suor.

B. Funções trigonométricas complexas

Se substituirmos θ por $-\theta$ nos dois lados da Eq. (36), teremos que

$$e^{-i\theta} \equiv \cos(\theta) - i \sin(\theta). \quad (42)$$

Podemos então somar as Eqs. (36) e (42) para ver que

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}. \quad (43)$$

Podemos também subtrair as duas equações, membro a membro, para encontrar uma expressão para a função seno:

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (44)$$

Nas Eqs. (43) e (44), o ângulo θ é um número real, mas podemos tomá-las como base para estender as funções trigonométricas para argumentos complexos. Definimos, dessa forma, as funções

$$\cos(z) \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad (45)$$

e

$$\text{sen}(z) \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (46)$$

A partir das Eqs. (46) e Eq. (45), as demais funções trigonométricas podem ser definidas. Por exemplo, divisão membro a membro da segunda pela primeira define a função tangente:

$$\text{tg}(z) \equiv -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}. \quad (47)$$

Se o número z for imaginário, $z = iy$, as funções nas Eqs. (45), (46) e (47) são proporcionais às funções hiperbólicas de y . Por exemplo, a Eq. (46) mostra que

$$\text{sen}(z) \equiv \frac{e^{-y} - e^y}{2i}, \quad (48)$$

isto é,

$$\text{sen}(iy) \equiv i \sinh(y). \quad (49)$$

C. Representação alternativa para os números complexos

Na Seção III, vimos que qualquer número complexo z pode ser designado por sua norma $|z|$ e sua fase φ . A equação de Euler nos oferece uma forma conveniente de expressar essa conclusão. Das Eqs. (20) e (21), temos que

$$z = |z| \left(\cos(\varphi) + i \text{sen}(\varphi) \right), \quad (50)$$

e daí segue, imediatamente, que

$$z = |z| e^{i\varphi}, \quad (51)$$

um resultado que vem preencher um vazio, já que tínhamos uma expressão simples, $z = x + iy$, para expressar o número em termos de suas partes real e imaginária, mas não dispúnhamos de equação equivalente para expressá-lo em termos de sua norma e sua fase. Agora dispomos da Eq. (51).

D. Multiplicação e divisão de números complexos

Nas Seções II.B.3 e II.B.4 aprendemos a multiplicar e a dividir dois números complexos z_1 e z_2 a partir de suas partes reais e imaginárias. A Eq. (51) oferece uma alternativa mais simples, a partir das normas e fases de z_1 e z_2 :

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\varphi_1} |z_2| e^{i\varphi_2}, \quad (52)$$

ou, se agruparmos as normas e as fases, à direita,

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (53)$$

A Eq. (53) mostra que, para multiplicar dois números complexos, basta multiplicar as normas e somar as fases. De forma análoga, podemos ver que, para dividir dois números complexos, basta dividir as normas e subtrair as fases:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (54)$$

E. Raízes

Da Eq. (51) segue também que para elevar um número complexo z a uma potência n , temos apenas que elevar seu módulo à mesma potência e multiplicar sua fase por n :

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}. \quad (55)$$

De maneira semelhante podemos extrair as raízes de um número complexo qualquer:

$$\sqrt[n]{z} \equiv z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\varphi/n}. \quad (56)$$

A operação descrita pela Eq. (56) é relativamente simples, mas o lado direito exige um cuidado. Já vimos, na Seção III, que a fase de um número complexo é definida a menos de um múltiplo de 2π . Por exemplo, a fase do número $z = -1$ pode ser escolhida como $\varphi = \pm\pi, \pm3\pi, \pm5\pi, \dots$. Normalmente basta fixar um valor, porque φ e $\varphi + 2\pi$ dão o mesmo resultado quando substituídas no lado direito da Eq. (51). Na Eq. (56), porém, φ/n não é equivalente a $(\varphi + 2\pi)/n$. Por isso, é necessário considerar n valores para φ , em n intervalos de comprimento 2π começando em $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Vamos estudar dois exemplos: as raízes quadrada e cúbica de $z = -1$. Já sabemos que a fase de -1 pode ser $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$. Para extrair a raiz quadrada, devemos escolher dois valores: $\varphi = \pi$ (que está no intervalo $-\pi < \varphi \leq \pi$) e $\varphi = 3\pi$ (que fica no intervalo seguinte, $\pi < \varphi \leq 3\pi$). Com $\varphi = \pi$, a Eq. (56) dá

$$\sqrt{-1} = e^{i\pi/2}, \quad (57)$$

e a equação de Euler mostra que o lado direito vale i .

Com $\varphi = 3\pi$, a Eq. (56) dá outra resposta:

$$\sqrt{-1} = e^{i3\pi/2}, \quad (58)$$

e a equação de Euler mostra que o lado direito vale $-i$. Recuperamos assim as duas soluções com que começamos, na Eq. (2).

A raiz cúbica de -1 propõe um problema mais interessante. A primeira vista, diríamos que a solução é -1 , mas com três fases, encontraremos três soluções: -1 e duas outras. As três fases são $\pi, 3\pi$ e 5π . Já empregamos as duas primeiras para calcular a raiz quadrada de -1 , mas aqui precisamos também da terceira. Com $\varphi = \pi$, a Eq. (56) dá o resultado

$$\sqrt[3]{-1} = z_1 = e^{i\pi/3}, \quad (59)$$

e como $\cos(\pi/3) = 1/2$ e $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, o lado direito vale

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}. \quad (60)$$

Com $\varphi = 3\pi$, resulta da Eq. (56) a solução que esperávamos:

$$\sqrt[3]{-1} = z_2 = -1. \quad (61)$$

Finalmente, com $\varphi = 5\pi$, encontramos a terceira raiz:

$$\sqrt[3]{-1} = z_3 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}. \quad (62)$$

Como -1 é um número real, suas raízes complexas são conjugadas, $z_1 = z_3^*$, enquanto a raiz real $z_2 = -1$ não tem par. É fácil confirmar, por multiplicações sucessivas, que $z_1^3 = z_2^3 = z_3^3 = -1$.

F. A circunferência complexa unitária

A Eq. (51) mostra que qualquer número complexo z com norma unitária, $|z| = 1$, pode ser escrito como $e^{i\varphi}$, onde φ é sua fase. O lugar-comum desses pontos no plano complexo é a circunferência de raio unitário. Para fixar essa ideia, a Fig. 2, mostra um número complexo com norma unitária no plano complexo. A figura mostra que o lugar comum dos pontos com norma unitária é uma circunferência com raio $|z| = 1$.

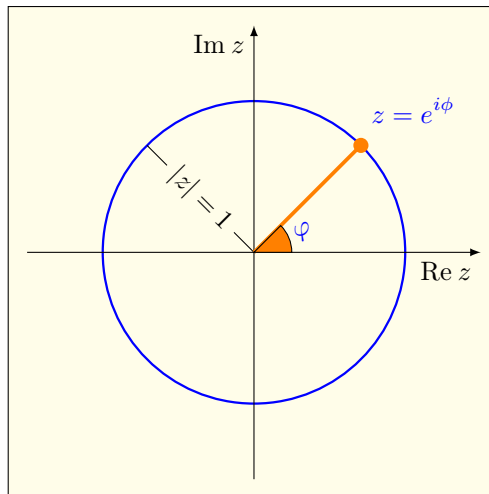


Figura 2 A circunferência unitária no plano complexo. Qualquer ponto sobre a circunferência é da forma $z = e^{i\varphi}$.

VI. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As Leis do Movimento, de Newton, relacionam a aceleração de uma massa m com a força resultante sobre ele. Em geral, a força é conhecida em função da posição do corpo. Quando isso acontecer, resulta da Segunda Lei do Movimento uma relação entre a aceleração, que é a segunda derivada da posição, e a própria posição. Uma equação desse tipo é conhecida como *equação diferencial*.

A. O oscilador harmônico

Um exemplo é a equação que descreve o movimento de uma massa m sujeita à força de uma mola de constante k — o oscilador harmônico mostrado na Fig. 3(a).

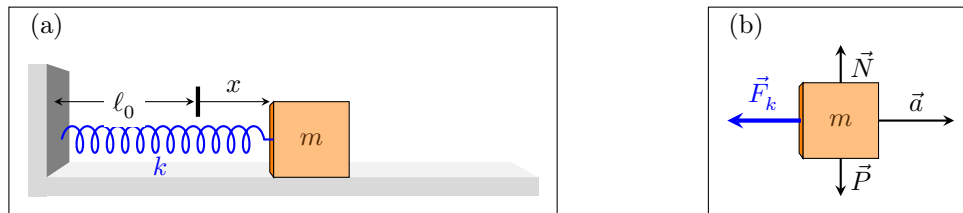


Figura 3 (a) O oscilador harmônico. A posição x é medida do comprimento relaxado da mola. (b) Diagrama de corpo livre para o bloco de massa m . É conveniente desenhar a aceleração no sentido positivo de x , ainda que a intuição física aponte para o sentido oposto.

B. A aceleração em função de x

A aceleração do bloco pode encontrada a partir da Segunda Lei do Movimento. Sobre ele agem três forças: o seu peso, a normal exercida pelo chão sobre ele e a força da mola, conforme mostra o diagrama de corpo livre na Fig. 3(b). Projetada a igualdade que expressa a Segunda Lei, $\vec{F}_k + \vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$, sobre o eixo x , encontramos que

$$-F_k = ma. \quad (63)$$

O módulo da força elástica é

$$F_k = kx, \quad (64)$$

já que a deformação x na Fig. 3(a) é positiva.

Assim, das Eqs. (63) e (64), chegamos à igualdade

$$ma = -kx. \quad (65)$$

Uma vez que desenhamos a no sentido de x positivo, temos que $a = d^2x/dt^2$, e assim podemos escrever a Eq. (65) na forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (66)$$

C. Classes de equações diferenciais

A Eq. (66) é uma *equação diferencial*, isto é, uma equação que relaciona uma derivada — no caso a segunda derivada — de uma função com a própria função ou com derivadas de ordens mais baixas. As

equações diferenciais podem ser (i) *lineares* ou *não-lineares*; (ii) *ordinárias* ou *parciais*; (iii) *homogêneas* ou *não-homogêneas*; (iv) de diferentes *ordens*; e (v) com *coeficientes constantes* ou *variáveis*.

A Eq. (66) serve para explicar o que significam esses nomes. Ela é uma equação *linear* porque cada parcela no lado esquerdo é linearmente proporcional à função ou a uma de suas derivadas. Ela é uma equação diferencial *ordinária* porque somente envolve derivadas ordinárias, e não derivadas parciais. Ela é *homogênea* porque não existe parcela independente de x . É de *segunda ordem* porque a maior derivada é d^2x/dt^2 . E seus *coeficientes* são *constantes*, isto é, os coeficientes das duas parcelas do lado esquerdo independem do tempo.

D. Linearidade

A mais importante das quatro propriedades é a linearidade. Se encontrarmos duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ de uma equação diferencial linear, qualquer combinação linear

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t), \quad (67)$$

onde A e B são constantes arbitrárias, também será solução.

Para verificar, basta substituir o lado direito da Eq. (67) no lugar de x no lado esquerdo da Eq. (66). Temos então que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = A\frac{d^2x_1}{dt^2} + B\frac{d^2x_2}{dt^2} + A\frac{k}{m}x_1 + B\frac{k}{m}x_2, \quad (68)$$

ou, se juntarmos os termos proporcionais a A à direita e os termos proporcionais a B ,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = A\left(\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k}{m}x_1\right) + B\left(\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{k}{m}x_2\right). \quad (69)$$

Dado que $x_1(t)$ é solução da Eq. (66), podemos ver que o primeiro termo à direita na Eq. (69) se anula. E como $x_2(t)$ é também solução da Eq. (66), o segundo termo à direita também se anula. Assim, a Eq. (69) se reduz à Eq. (66), o que comprova que $x(t)$, dado pela Eq. (67), é solução da equação diferencial.

E. Condições iniciais

Na prática, a linearidade significa que, encontradas duas soluções da equação diferencial, teremos encontrado uma infinidade de soluções. Somente uma solução entretanto satisfará às condições iniciais, dadas pela posição inicial $x(t=0)$ e pela velocidade inicial $(dx/dt)_{t=0}$. Já sabemos da Mecânica que, conhecida a aceleração de um corpo, precisamos saber a sua posição inicial e sua velocidade inicial para determinar completamente a posição do corpo em função do tempo. No caso do oscilador harmônico, se encontrarmos duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ que não sejam proporcionais uma à outra, isto é, que sejam linearmente independentes, as condições iniciais nos darão duas igualdades:

$$x(t=0) = Ax_1(t=0) + Bx_2(t=0), \quad (70)$$

e

$$v(t=0) = A \left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{t=0} + B \left. \frac{dx_2}{dt} \right|_{t=0}. \quad (71)$$

Uma vez que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são conhecidas, as Eqs. (70) e (71) constituem um sistema linear de equações que pode ser resolvido para determinar A e B . Com isso, teremos encontrado a solução $x(t)$ que satisfaz à diferencial e às duas condições iniciais.

F. Método de solução

Nosso problema, portanto, é encontrar as duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$. O seguinte método pode inicialmente parecer muito especial, mas ele resolve qualquer equação diferencial (ou mesmo sistema de equações diferenciais) linear, ordinária e homogênea com coeficientes constantes. Ademais, com modificações simples, que não discutiremos aqui, permite resolver também equações diferenciais não-homogêneas ou parciais, desde que sejam lineares e que os coeficientes sejam constantes.

O procedimento consiste em escrever a função desconhecida na equação diferencial como uma exponencial do tempo. No caso da Eq. (66), isso significa escrever que

$$x(t) = e^{st}, \quad (72)$$

onde s é uma constante a determinar.

A Eq. (72) pode parecer arbitrária, mas ela é desenhada para oferecer solução a equações diferenciais do tipo da Eq. (66). A derivada da função exponencial é a própria exponencial multiplicada por uma constante (s , no caso). Assim, a Eq. (72) transforma derivadas em produtos e portanto transforma as equações diferenciais em equações algébricas, muito mais fáceis de resolver.

Vejamos o que acontece com a Eq. (66). A substituição de $x(t)$ pelo lado direito da Eq. (72) leva ao resultado

$$s^2 e^{st} + \frac{k}{m} e^{st} = 0. \quad (73)$$

Como a função exponencial nunca se anula, podemos agora dividir os dois lados da Eq. (73) por e^{st} , para obter a equação

$$s^2 = -\frac{k}{m}, \quad (74)$$

cujas soluções são imaginárias:

$$s = \pm i \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (75)$$

Com isso, obtivemos duas soluções do tipo (72) para a Eq. (66):

$$x_1(t) = e^{i\omega t}, \quad (76)$$

e

$$x_2(t) = e^{-i\omega t}, \quad (77)$$

onde definimos

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (78)$$

Como a Eq. (66), das duas soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ nós podemos gerar uma infinidade de soluções na forma da Eq. (67), isto é, combinações lineares de x_1 e x_2 :

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}. \quad (79)$$

1. Condições iniciais

A Eq. (79) já resolve nosso problema, porque ela põe a nossa disposição duas constantes, A e B , que poderemos ajustar para que $x(t)$ satisfaça às condições iniciais do problema, como discutido na Seção VI.E. Podemos entretanto simplificar o lado direito da Eq. (79) antes de impor as condições iniciais. A equação de Euler nos diz que $x(t)$ é uma combinação linear de $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$, visto que as duas exponenciais $e^{i\omega t}$ e $e^{-i\omega t}$ são combinações lineares das mesmas funções trigonométricas. Assim, sem perder generalidade, podemos escrever a Eq. (79) na forma

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t). \quad (80)$$

De posse da Eq. (80), é fácil impor as condições iniciais. Dadas a posição inicial $x(0)$ e a velocidade inicial $v(0)$, temos imediatamente que

$$x(0) = \alpha. \quad (81)$$

A derivada da Eq. (80), por outro lado, mostra que

$$v(t) = -\omega\alpha \sin(\omega t) + \omega\beta \cos(\omega t), \quad (82)$$

e segue que

$$v(0) = \omega\beta. \quad (83)$$

Da Eq. (81) extraímos α e da (83), β . Substituídas as duas constantes na Eq. (80), encontramos a solução desejada:

$$x(t) = x(0) \cos(\omega t) + \frac{v(0)}{\omega} \sin(\omega t). \quad (84)$$

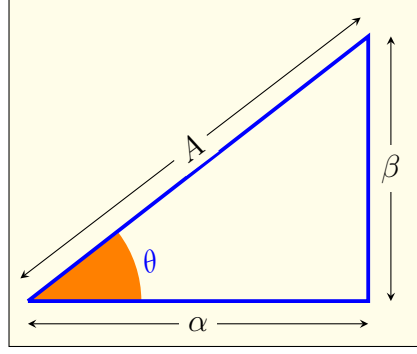


Figura 4 Construção que permite transformar a expressão (80), que dá a posição em função do tempo, na Eq. (88).

2. Forma alternativa

A Eq. (80) é conveniente, quando o objetivo é impor condições iniciais. Para outras aplicações, tais como desenhar o gráfico de $x(t)$ em função de t , a Eq. (80) não é prática, e empregamos a Fig. 4 para simplificá-la. A figura mostra um triângulo retângulo que pode ser facilmente desenhado, com catetos α e β . A hipotenusa do triângulo é A e o ângulo oposto ao cateto β é θ .

Trigonometria simples aplicada à Fig. 4 mostra que

$$\alpha = A \cos(\theta) \quad (85)$$

e

$$\beta = A \sin(\theta). \quad (86)$$

Podemos então substituir os lados direitos das Eqs. (85) e (86) no lugar de α e β na Eq. (80). Resulta que

$$x(t) = A \left(\cos(\theta) \cos(\omega t) + \sin(\theta) \sin(\omega t) \right), \quad (87)$$

ou, dada a identidade trigonométrica $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$,

$$x(t) = A \cos(\omega t - \theta). \quad (88)$$

3. Amplitude e fase do movimento

A Fig. 5 mostra em gráfico a Eq. (88). A posição é uma função periódica de t , com período $T = 2\pi/\omega$, amplitude A e fase inicial $-\theta$. A amplitude e a fase inicial são determinadas pelas condições iniciais. De fato, da Eq. (88), podemos ver que

$$x(0) = A \cos(\theta), \quad (89)$$

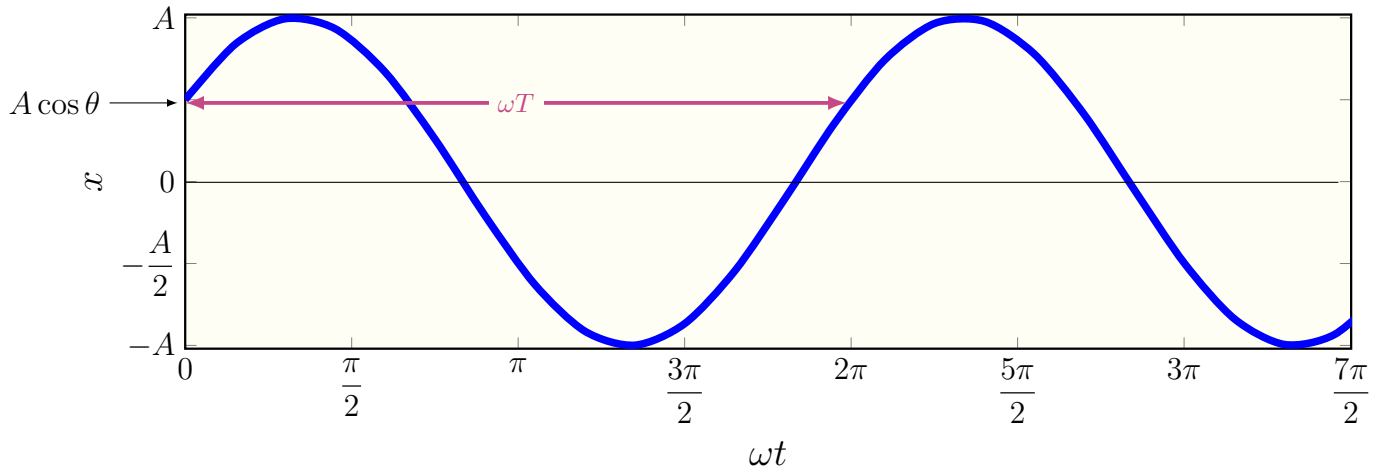


Figura 5 A solução da Eq. (66) para condições iniciais $x(0) = 0.5A$ e $v(0) = \sqrt{3}\omega A$.

e, após derivar $x(t)$ em relação ao tempo, que

$$v(0) = \omega A \text{sen}(\theta). \quad (90)$$

A divisão da Eq. (90) pela Eq. (89) mostra então que

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\omega x(0)}{v(0)}. \quad (91)$$

Por outro lado, podemos escrever a Eq. (90) na forma

$$A \text{sen}(\theta) = \frac{v(0)}{\omega}. \quad (92)$$

Quadradas e somadas, as Eqs. (89) e (92) então resultam na igualdade

$$A^2 \left(\cos^2(\omega t) + \text{sen}^2(\omega t) \right) = x_0^2 + \frac{v^2(0)}{\omega^2}, \quad (93)$$

e assim podemos ver que

$$A = \sqrt{x^2(0) + \frac{v^2(0)}{\omega^2}}. \quad (94)$$

As Eqs. (91) e (94) mostram que, conhecidas as condições iniciais $x(0)$ e $v(0)$, a amplitude e a fase do movimento ficam determinadas.

Em resumo, o método acima definido encontra duas soluções, Eqs. (76) e (77), para a Eq. (66). Combinações lineares de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ geram uma infinidade de outras soluções. Apenas uma delas, entretanto, satisfaz às condições iniciais. A solução da equação diferencial que satisfaz às condições iniciais pode tanto ser escrita na forma da Eq. (84) como na da Eq. (88). Neste último caso, a fase φ e a amplitude A são dadas pelas Eqs. (91) e (94), respectivamente. De qualquer forma, muito embora o método se apoie na equação de Euler e empregue números complexos, a solução é real, porque a posição inicial e a velocidade inicial são, necessariamente, números reais.