Obtenção da Fórmula de Biot-Savart a partir da Lei de Ampère

R Galvão

A Lei de Ampère $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$, apesar de sempre válida, somente permite calcular o campo magnético em situações em que a simetria do problema justifica retirar a componente relevante do campo magnético da integral, como vimos em aplicações especiais. Esta é uma situação muito particular e, em aplicações práticas, os fios que conduzem a corrente têm forma arbitrária, quase sempre sem nenhuma simetria particular. Para esses casos gerais, seria interessante ter uma fórmula geral que permita calcular diretamente o campo elementar $d\vec{B}$ produzido por uma pequena extensão do fio, de comprimento $d\vec{\ell}$, que vamos denominar <u>elemento de corrente</u>. O campo total seria obtido integrando-se as contribuições de todos os elementos de corrente, isto é, $\vec{B} = \int d\vec{B}$, semelhante ao que foi feita para calcular o campo elétrico produzido por uma distribuição contínua de cargas. No caso do campo magnético, não é simples obter esta fórmula porque não existem "*cargas magnéticas pontuais*". Quem produz o campo magnético é a corrente elétrica que sempre percorre um circuito fechado. No entanto, esta fórmula existe, tendo sido obtida por Jean-Baptiste Biot e Félix Savart logo após Hans Christian Oersted ter publicado seus trabalhos sobre a deflexão da agulha de uma bússola induzida pela passagem de corrente (1820).

Ao invés de fazermos uma derivação formal da fórmula de Biot-Savart, que é complexa, vamos utilizar um método intuitivo baseado na Lei de Ampère, que é mais fundamental, e na expressão para o campo produzido por um fio infinito, transportando uma corrente I, como mostra a figura na próxima página.

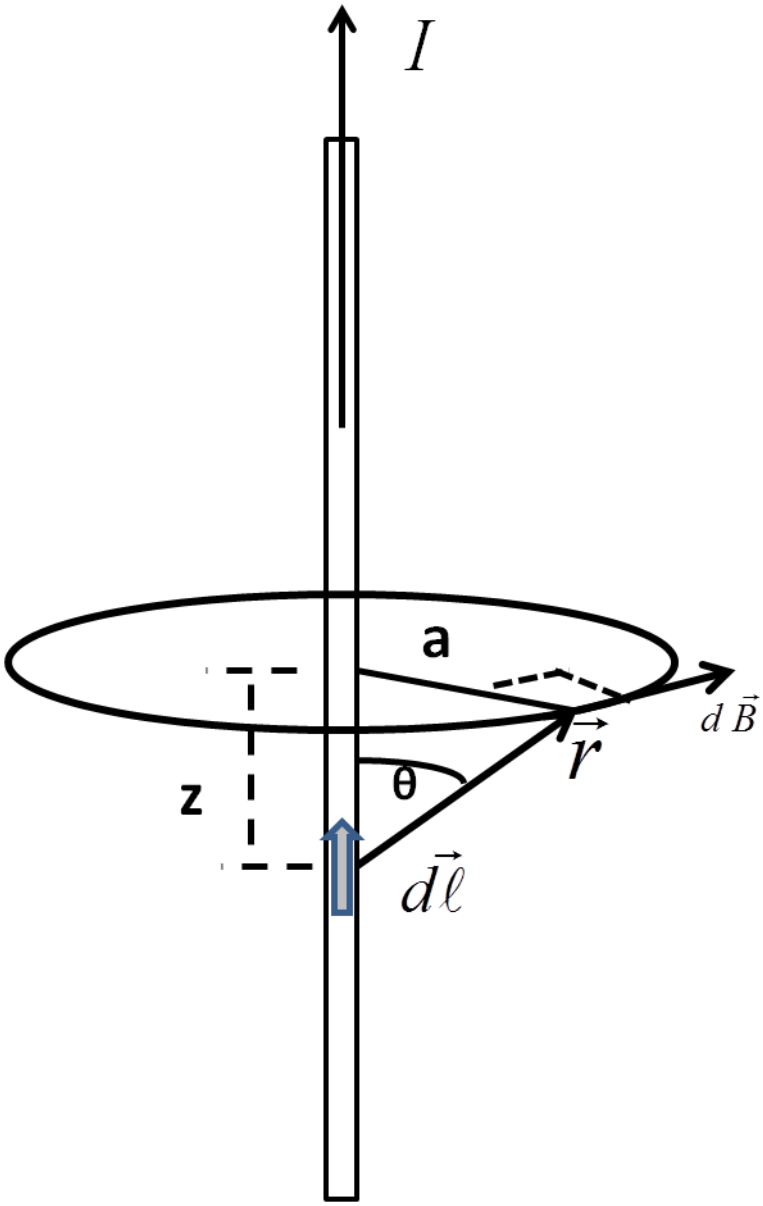
Os principais resultados da Lei de Ampère que obtivemos para este caso especial são:

1. O campo é dado por $\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} \hat{e}_\theta$, ou seja, perpendicular ao plano formado por $d\vec{\ell}$ e $\vec{r}$, o vetor que vai de $d\vec{\ell}$ ao ponto onde estamos calculando $\vec{B}$.
2. O campo só depende da corrente e da distância perpendicular ao fio, $a = r \sin\theta$.

Gostaríamos de encontrar uma expressão para o campo $d\vec{B}$ gerado por um elemento de corrente, de forma que o campo total possa ser expresso como

$$\vec{B} = \int d\vec{B}$$

Naturalmente esperamos que $d\vec{B}$ dependa da distância ao elemento de corrente $Id\vec{\ell}$. Então, tendo em conta a direção do campo perpendicular ao plano formado por $d\vec{\ell}$ e $\vec{r}$, vamos escrever uma expressão tentativa para $d\vec{B}$ na forma



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} f(r) d\vec{\ell} \times \vec{r}$$

onde $f(r)$ é uma função desconhecida. No caso do fio infinito temos (ver figura)

$$d\vec{\ell} = dz\hat{e}_z; \quad d\vec{\ell} \times \vec{r} = rdz \sin\theta \hat{e}_\theta$$

Como o fio se estende de $-\infty$ $a + \infty$, e conhecendo a expressão do campo produzido pelo fio, segundo a Lei de Ampère, temos que $f(r)$ tem que satisfazer a relação

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi a} \hat{e}_\theta \;\Rightarrow\; \frac{1}{2\pi} \mu_0 I \int_{-\infty}^{+\infty} f(r) r \sin\theta \, dz \hat{e}_\theta = \mu_0 I \frac{\hat{e}_\theta}{2\pi a}$$

portanto

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(r) r \sin\theta dz = \frac{1}{a}$$

mas $r \sin\theta = a$, de forma que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)\, dz = \frac{1}{a^2};\ \ r = \sqrt{z^2 + a^2}$$

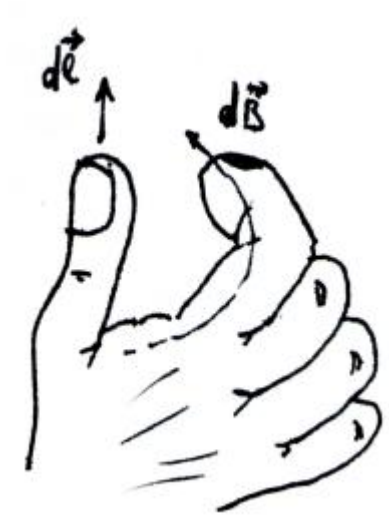
É claro que em princípio existe uma infinidade de funções $f\left(\sqrt{z^2 + a^2}\right)$ que podem satisfazer esta relação, já que a integral é definida. No entanto, podemos ser guiados pela intuição física de que o campo deve diminuir à medida que nos afastamos do elemento de corrente e, pela integral, a função $f(r)$ deve ter dimensão de comprimento à potência (-3). Assim tomemos como tentativa

$$f(r) = \frac{C}{r^3}$$

onde C é uma constante adimensional. Substituindo esta hipótese na integral temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(r)\, dz = C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} = C \left[\frac{z}{a^2\sqrt{a^2 + z^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2C}{a^2} \Longrightarrow C = \frac{1}{2}$$

Usando este resultado,obtemos a <u>Fórmula de Biot-Savart</u>

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}$$

Nas aplicações práticas desta fórmula, é sempre bom verificar primeiro a direção do campo. Utilizando o sentido dado pelo produto vetorial, basta colocarmos o dedo polegar da mão direita na direção de $d\vec{\ell}$; a direção do campo será na dos outros dedos da mão, como ilustrado na figura a seguir.