

PSI-5813 Compressão Digital de Sinais

Exercício 2

23 de setembro de 2016

1. Sabe-se que a função massa de probabilidade conjunta entre duas fontes de informação $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ com dicionários de três símbolos é

$$[p(x, y)] = \frac{1}{45} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Pedem-se os itens abaixo.

- a) Determine as funções massa de probabilidade marginais de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.
- b) Calcule as entropias das fontes $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.
- c) Calcule a informação mútua $I(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$.
- d) Determine as funções massa de probabilidade condicionais $p(x|y)$ e $p(y|x)$.
- e) Calcule as entropias condicionais $H(\mathbf{X}|\mathbf{Y})$ e $H(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$ pelas suas definições e verifique os resultados pelo diagrama de Venn.

Obs.: Define-se

$$H(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = - \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \sum_{y \in \mathcal{Y}} p(y|x) \log_2 p(y|x)$$

- f) Calcule a capacidade do canal que consegue transportar a máxima informação mútua entre duas fontes de informação quaisquer, ambas com alfabetos de três símbolos. Apresente a função massa de probabilidade (fmp) conjunta cuja informação mútua atinge a capacidade do canal.

Dica: Escolha a fmp conjunta tal que as entropias marginais sejam máximas e as entropias condicionais sejam nulas.

2. Mostre que a média aritmética $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k$ de números reais não-negativos é maior ou igual a sua média geométrica $\left(\prod_{k=1}^N x_k \right)^{1/N}$.

Obs.: Use a desigualdade de Jensen.

3. Determine os valores $x_1, x_2, \dots, x_N$ reais não-negativos cuja soma é S e cujo produto é o máximo possível.

Obs.: Use multiplicador de Lagrange.