Gabarito – Prova P1 – Mecânica dos Meios Contínuos – 16/09/2016

1ª Questão (2,0 pontos): O tensor das tensões em um ponto P é dado por:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determine o vetor da tensão $\vec{\sigma}^n$ em P sobre um plano cujo vetor normal unitário é dado por $\vec{n} = (2/3)\vec{e}_1 - (2/3)\vec{e}_2 + (1/3)\vec{e}_3$.

Solução:

Fazemos $\vec{\sigma}^n = \sigma_i^n = \sigma_{ji}\, n_j$. Assim:

$$\sigma_1^n = \sigma_{11}\, n_1 + \sigma_{21}\, n_2 + \sigma_{31}\, n_3 = 7 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + (-2) \cdot \frac{1}{3} = 4$$

$$\sigma_2^n = \sigma_{12}\, n_1 + \sigma_{22}\, n_2 + \sigma_{32}\, n_3 = 0 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 0 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$\sigma_3^n = \sigma_{13}\, n_1 + \sigma_{23}\, n_2 + \sigma_{33}\, n_3 = (-2) \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 4 \cdot \frac{1}{3} = 0$$

Assim, $\boxed{\vec{\sigma}^n = 4\vec{e}_1 - \frac{10}{3}\vec{e}_2}$

2ª Questão (2,0 pontos): Obtenha o valor de $\varepsilon_{ijk}\, a_j\, a_k$, onde $\vec{a}$ é um vetor qualquer.

Solução:

Sabemos que o produto vetorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ é representado, na álgebra tensorial, pela operação $c_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j\, b_k$. Assim, temos que:

$$\varepsilon_{ijk}\, a_j\, a_k = \vec{a} \times \vec{a}$$

Como o produto vetorial de um vetor por ele mesmo é nulo:

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\, a_j\, a_k = 0}$$

3ª Questão (3,0 pontos): Considere que um escoamento é incompressível e tem viscosidade uniforme. Mostre que, se o escoamento é irrotacional, os efeitos viscosos na equação de Navier-Stokes se anulam.

Solução:

A equação de Navier-Stokes para um escoamento incompressível com viscosidade uniforme é dada por:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{v}+\vec{g}$$

Foi demonstrado em aula que, se o escoamento é incompressível:

$$\nabla^2\vec{v}=-\nabla\times\vec{\omega}$$

Assim, se o escoamento for irrotacional, $\nabla^2\vec{v}=0$ E o termo viscoso da equação de Navier-Stokes desaparece.

Outra forma de demonstrar o desaparecimento dos efeitos viscosos em um escoamento irrotacional é lembrar que, nessa situação, o escoamento é potencial, ou seja:

$\vec{v}=\nabla\phi$, ou seja, $v_i=\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}$

O laplaciano da velocidade é dado por:

$$\nabla^2\vec{v}=\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}=\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_j}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right]$$

Porém, $\dfrac{\partial v_j}{\partial x_j}=\nabla\cdot\vec{v}=0$ em um escoamento incompressível, e chegamos novamente no resultado:

$$\nabla^2\vec{v}=0$$

4ª Questão (3,0 pontos): Imagine que num escoamento não-permanente, incompressível e irrotacional o vetor da velocidade deriva de um potencial ϕ de modo que $\vec{\upsilon} = \nabla\phi$. Derive a equação de Bernoulli para esse caso.

Solução:

A equação de Euler é dada por:

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

Usando a fórmula de Lagrange da aceleração:

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{\upsilon} + \nabla\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

Se o escoamento é irrotacional, $\vec{\omega} = 0$. Se é incompressível, $\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)$.

Podemos também dizer que aceleração da gravidade deriva de um potencial, ou seja:

$$\vec{g} = \nabla(-gz)$$

Onde z é uma cota vertical. Assim:

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\upsilon^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\,z\right) = 0$$

Mas agora, fazendo $\vec{\upsilon} = \nabla\phi$, temos $\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} = \nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$. Assim:

$$\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\upsilon^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\,z\right) = 0$$

O que resulta:

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\upsilon^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g\,z = f(t)}$$

Curiosamente, a função $f(t)$ pode ser eliminada criando um novo potencial $\tilde{\phi}$ dado por:

$$\tilde{\phi} = \phi - \int f(t)\,dt$$

Assim:

$$\boxed{\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+g\,z=0}$$

E é fácil ver que vetor da velocidade é dado por:

$$\vec{v}=\nabla\phi=\nabla\tilde{\phi}$$

Pois $\nabla f(t)=0$.