Matrizes Unitárias

Vimos anteriormente que a sensibilidade de um sistema linear $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ face a imprecisões em A e em $\underset{\sim}{b}$ está diretamente relacionada ao número condicional de A, $K(A) = |||A||| \cdot |||A^{-1}|||$.

Sabemos também que $K(A) \geq 1$, pois

$1 \leq |||I||| = |||A \cdot A^{-1}||| \leq |||A||| \cdot |||A^{-1}|||$, para toda norma matricial.

Existe alguma matriz (e uma norma) para a qual $K(A) = 1$?

Seja $\{\underset{\sim}{u}_1, \ldots, \underset{\sim}{u}_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, isto é,

$$\underset{\sim}{u}_i^H \underset{\sim}{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \neq j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Defina então $U = [\underset{\sim}{u}_1, \cdots, \underset{\sim}{u}_n]$. Com esta definição,

$$U^H U = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{u}_1^H \\ \vdots \\ \underset{\sim}{u}_n^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{u}_1 \cdots \underset{\sim}{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{u}_1^H \underset{\sim}{u}_1 & \underset{\sim}{u}_1^H \underset{\sim}{u}_2 & \cdots & \underset{\sim}{u}_1^H \underset{\sim}{u}_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \underset{\sim}{u}_n^H \underset{\sim}{u}_1 & \underset{\sim}{u}_n^H \underset{\sim}{u}_2 & \cdots & \underset{\sim}{u}_n^H \underset{\sim}{u}_n \end{bmatrix} = I,$$

ou seja, $U^H = U^{-1}$!

Por outro lado, $|||U|||_2$ pode ser calculada por

$$|||U|||_2 = \max_{\|\underset{\sim}{x}\|_2 = 1} \|U\underset{\sim}{x}\|_2 = \sqrt{\max_{\|\underset{\sim}{x}\|_2=1} \|U\underset{\sim}{x}\|_2^2} =$$

$$= \sqrt{\max_{\|\underset{\sim}{x}\|_2=1} \underset{\sim}{x}^H \underbrace{U^H U}_{=I} \underset{\sim}{x}} = \max_{\|\underset{\sim}{x}\|_2=1} \underset{\sim}{x}^H \underset{\sim}{x} = 1.$$

Analogamente, concluímos que $|||U^H|||_2 = |||U^{-1}|||_2 = 1$, e portanto $K(A) = |||U||| \cdot |||U^{-1}||| = 1$ se for usada a norma $|||\bullet|||_2$.

Matrizes satisfazendo $U^H U = U U^H = I$ são ditas unitárias (se $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, diz-se que U é ortogonal). Como vimos acima, matrizes unitárias têm propriedades extremamente interessantes:

- $\|U\underset{\sim}{x}\|_2 = \|\underset{\sim}{x}\|_2$ para todo $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{C}^n$,
- O sistema $U\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ é extremamente bem-condicionado, no sentido que pequenas perturbações ΔU e $\Delta \underset{\sim}{b}$ não são amplificadas na solução de $(U + \Delta U)\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{b} + \Delta \underset{\sim}{b}$,
- Se $\|\Delta \underset{\sim}{x}\|_2 \leq \varepsilon$, $U(\underset{\sim}{x} + \Delta\underset{\sim}{x}) = U\underset{\sim}{x} + U\Delta\underset{\sim}{x}$, e $\|U\Delta\underset{\sim}{x}\|_2 \leq \varepsilon$.
- Se $U_1, \ldots, U_p$ são matrizes unitárias, então $U \triangleq U_1 U_2 \cdots U_p$ também é unitária.

As propriedades acima tornam algoritmos baseados em matrizes unitárias extremamente estáveis (em geral). Além disso, a facilidade de se obter U^{-1} torna as matrizes unitárias interessantes do ponto de vista teórico também.

Exemplos de matrizes unitárias

1) $U = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (matriz ortogonal)

$$U^T U = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta & \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta \\ \cdot & \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} = I.$$

2) Rotação de Givens

$$U = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cos\theta & \cdots & \operatorname{sen}\theta & \\ & & & & 1 \ddots & & \\ & & & -\operatorname{sen}\theta & & \cos\theta & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \text{linha } i \\ \\ \leftarrow \text{linha } j \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \text{col. } i & \text{col. } j \end{array}$$

3) Transformação de Householder

$$U = I - \frac{2\underset{\sim}{x}\,\underset{\sim}{x}^H}{\|\underset{\sim}{x}\|_2^2}.$$

$$U^H U = \left(I - \frac{2\underset{\sim}{x}\,\underset{\sim}{x}^H}{\|\underset{\sim}{x}\|_2^2} - \frac{2\underset{\sim}{x}\,\underset{\sim}{x}^H}{\|\underset{\sim}{x}\|_2^2} + \frac{4\underset{\sim}{x}\overbrace{(\underset{\sim}{x}^H\underset{\sim}{x})}^{=\|\underset{\sim}{x}\|_2^2}\underset{\sim}{x}^H}{\|\underset{\sim}{x}\|_2^4}\right) = $$

$$= I.$$

Vamos agora estudar algumas propriedades das matrizes unitárias:

Teorema 1: Se $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

a) U é unitária

b) U é não-singular e $U^H = U^{-1}$

c) $UU^H = I$

d) U^H é unitária

e) As colunas de U formam um conjunto ortonormal

f) As linhas de U formam um conjunto ortonormal

g) Para todo $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{C}^n$, $\|U\underset{\sim}{x}\|_2 = \|\underset{\sim}{x}\|_2$.

Prova: Vamos verificar apenas a equivalência entre (a) e (g)

Se U for unitária, então $\|U\underset{\sim}{x}\|_2^2 = \underset{\sim}{x}^H U^H U \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}^H\underset{\sim}{x} = \|\underset{\sim}{x}\|_2^2$.

Conversamente, se $\|U x\|_2 = \|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$, então precisamos mostrar que $U^H U = I$:

Vamos começar com $n=2$. Assumindo que (g) é verdade, vamos escolher $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e calcular $\|U x\|_2^2$:

$$\|U x\|_2^2 = 1 = x^H x$$

$$= [1 \;\; 0]\, U^H U \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (U^H U)_{1,1} .$$

Analogamente, para $z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, concluímos que

$$(U^H U)_{2,2} = 1.$$

Portanto, $U^H U = \begin{bmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{bmatrix}$ (pois $(U^H U)^H = U^H U$).

Escolha agora $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$2 = w^H w = [1 \;\; 1] \begin{bmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + a + \bar{a} + 1 = 2 + a + \bar{a}$$

$$\Rightarrow a + \bar{a} = 2\,\mathrm{Re}\{a\} = 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\{a\} = 0$$

Finalmente, escolha $t = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}$:

$$2 = t^H t = [1 \;\; -j] \begin{bmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = 1 + ja - j(\bar{a} + j) =$$

$$= 1 + 1 + ja - j\bar{a} = 2 + j^2 . \mathrm{Im}\{a\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}\{a\} = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow U^H U = I.$$

Portanto, o resultado está provado para $U \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Para $\mathbb{C}^{n\times n}$, defina $W = U^H U$, $W(i,j) = \begin{bmatrix} (U^H U)_{ii} & (U^H U)_{ij} \\ (U^H U)_{ji} & (U^H U)_{jj} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$.

~~estava certo~~

Repita os argumentos acima para mostrar que $W(i,j) = I_2$, e conclua que $W = U^H U = I$. ∎

<u>Definição</u>: Uma matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é uma <u>isometria</u> <u>para a norma</u> $\|\cdot\|$ em $\mathbb{C}^n$ se

$$\|B x\| = \|x\| \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C}^n.$$

Então toda matriz unitária é uma isometria para $\|\cdot\|_2$ (norma Euclideana).

Equivalência Unitária

Devido às propriedades de matrizes unitárias (facilidade de inversão, ótimo número de condição), é interessante estudar transformações de similaridade obtidas usando-se apenas matrizes unitárias. Em especial, queremos determinar a forma mais simples em que pode ser transformada uma matriz qualquer, usando-se apenas transformações de similaridade com matrizes unitárias. Estes resultados serão bastante úteis tanto em teoria como na compreensão de aplicações práticas.

Definição: Uma matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é dita *unitariamente equivalente* a $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se existir $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $B = U^H A U$ e U for unitária.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$B = U^H A U = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -0,5\operatorname{sen}\theta & 0,5\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta + 0,5\operatorname{sen}^2\theta & \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{2} \\ \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{2} & 0,5\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+\cos^2\theta & \cos\theta\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta\operatorname{sen}\theta & 1+\operatorname{sen}^2\theta \end{bmatrix}.$$

Teorema 2: Se A e $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ forem unitariamente equivalentes, então $|||A|||_F = |||B|||_F$, e $|||A|||_2 = |||B|||_2$.

Prova: Observe que $|||A|||_F^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = \operatorname{Tr}(A^H A)$.

Portanto, $|||B|||_F^2 = \operatorname{Tr}\Big(\underbrace{(U^H A^H U)}_{=B^H} . \underbrace{(U^H A U)}_{=B}\Big) = \operatorname{Tr}\Big(\underbrace{U^H}_{X} . \underbrace{A^H A . U}_{Y}\Big) = \operatorname{Tr}(A^H A U U^H) =$

$\operatorname{Tr}(XY) = \operatorname{Tr}(YX)$

$$= \operatorname{Tr}(A^H A) = |||A|||_F^2 .$$

Para a outra norma, temos

$$|||B|||_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Bx\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} (x^H B^H B x) = \max_{\|x\|_2=1} (x^H . U^H A^H U . U^H A U . x) =$$

$$= \max_{\|x\|_2=1} (x^H . U^H . A^H A . U x).$$

Definindo $y = Ux$, temos $\|y\|_2 = \|x\|_2 = 1$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$, e portanto

$$|||B|||_2^2 = \max_{\|y\|_2=1} (y^H A^H A y) = \max_{\|y\|_2=1} \|Ay\|_2^2 = |||A|||_2^2 . \quad \blacksquare$$

Da mesma forma que transformações de similaridade comuns, transformações de similaridade unitárias correspondem a mudanças de base. A diferença é que uma transformação unitária corresponde a mudar de uma base ortonormal para outra.

Construção de Bases Ortonormais a partir de Bases Quaisquer

(ou: construção de matrizes unitárias a partir de matrizes não-singulares).

Considere o seguinte conjunto de vetores: $\{x_1, \dots, x_n\}$, $x_i \in \mathbb{C}^n$. Assuma que o conjunto seja linearmente independente, ou seja, que $\{x_1, \dots, x_n\}$ seja uma base de $\mathbb{C}^n$. Podemos obter uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ usando o algoritmo de Gram-Schmidt, descrito abaixo.

(Uma base é ortonormal se seus vetores forem ortogonais entre si e tiverem todos comprimento igual a 1).

Algoritmo de Gram-Schmidt:

Para $k = 1, 2, \dots, n$ repita (defina $q_1 = x_1$):

1) $\rho_{ik} = q_i^H x_k, \quad i = 1, 2, \dots, k-1$

2) $q_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \rho_{ik} q_i$

3) $\rho_{kk} = \|q_k\|_2$

4) $q_k \leftarrow \dfrac{q_k}{\rho_{kk}}$.

Nota: Este algoritmo não é numericamente confiável, mas pode ser útil em análises teóricas e foi importante historicamente. Há uma modificação mais precisa (modified Gram-Schmidt algorithm), ver Stewart, pg. 217; Golub, pg. 231. Veremos a seguir um algoritmo com propriedades numéricas bem melhores.

Exemplo: Seja a base de $\mathbb{R}^3$ $\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\}$.

Aplicando o algoritmo acima a esta base, temos

$k=1$: $q_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, $\quad \rho_{11} = \|q_1\|_2 = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$; $\quad q_1 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix}$.

$k=2$: $q_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$; $\quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

$k=3$: $\rho_{13} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{4}{\sqrt{6}}$; $\quad \rho_{23} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 0$

$$q_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{6}} \cdot \begin{bmatrix}1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{bmatrix} - 0 \cdot \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-2/3\\1-2/3\\1-4/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/3\\1/3\\-1/3\end{bmatrix};$$

$$\rho_{33} = \sqrt{\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{9}+\tfrac{1}{9}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$q_3 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

A base $\{q_1, q_2, q_3\}$ é ortonormal. De fato, $q_i^H q_i = 1$, e

$$q_1^H q_2 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix} = 0$$

$$q_1^H q_3 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}} - \frac{2}{\sqrt{18}} = 0$$

$$q_2^H q_3 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} = 0.$$

Teorema da Triangularização Unitária de Schur

O teorema que provaremos a seguir mostra que, para qualquer matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, existe uma matriz unitária tal que

$U^H A U = R = [r_{ij}]$, triangular superior (ou seja, $r_{ij} = 0$ se $i > j$).

Este resultado é muito útil para a teoria de matrizes, e tem várias conseqüências importantes. Algumas dessas conseqüências nós veremos a seguir, outras (como a Decomposição em Valores Singulares) ficarão para uma outra aula.

Teorema 2 (Decomposição de Schur). Dada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ em qualquer ordem pré-escolhida, existe uma matriz unitária $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$U^H A U = R = [r_{ij}]$$

é triangular superior, e $r_{ii} = \lambda_i, i = 1, \dots, n$ (na mesma ordem acima). Se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ e todos os autovalores forem reais, então U pode ser escolhida de forma a ser ortogonal, isto é, $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $U^T U = I$.

Prova: Seja $\underset{\sim}{x}^{(1)}$ $(\|\underset{\sim}{x}^{(1)}\|_2 = 1)$ um autovetor de A com respeito ao autovalor λ_1. Como $\underset{\sim}{x}^{(1)} \neq 0$, podemos escolher vetores $\underset{\sim}{y}^{(2)}, \dots, \underset{\sim}{y}^{(n)}$ tais que $\{\underset{\sim}{x}^{(1)}, \underset{\sim}{y}^{(2)}, \underset{\sim}{y}^{(3)}, \dots, \underset{\sim}{y}^{(n)}\}$ forme uma base de $\mathbb{C}^n$. Podemos então aplicar o algoritmo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal $\{\underset{\sim}{x}^{(1)}, \underset{\sim}{z}^{(2)}, \dots, \underset{\sim}{z}^{(n)}\}$.

Defina então a matriz

$$U_1 = \left[\underset{\sim}{x}^{(1)} \quad \underset{\sim}{z}^{(2)} \ \cdots \ \underset{\sim}{z}^{(n)}\right].$$

U_1 é unitária, e como $A\underset{\sim}{x}^{(1)} = \lambda_1 \underset{\sim}{x}^{(1)}$, temos

$$AU_1 = \left[A\underset{\sim}{x}^{(1)} \quad A\underset{\sim}{z}^{(2)} \cdots A\underset{\sim}{z}^{(n)}\right] = \left[\lambda_1 \underset{\sim}{x}^{(1)} \quad A\underset{\sim}{z}^{(2)} \cdots A\underset{\sim}{z}^{(n)}\right],$$

e

$$U_1^H A U_1 = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{x}^{(1)H} \\ \underset{\sim}{z}^{(2)H} \\ \vdots \\ \underset{\sim}{z}^{(n)H} \end{bmatrix} \left[\lambda_1 \underset{\sim}{x}^{(1)} \quad A\underset{\sim}{z}^{(2)} \ \cdots \ A\underset{\sim}{z}^{(n)}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 \underset{\sim}{x}^{(1)H}\underset{\sim}{x}^{(1)} & \underset{\sim}{x}^{(1)H}A\underset{\sim}{z}^{(2)} & \cdots & \underset{\sim}{x}^{(1)H}A\underset{\sim}{z}^{(n)} \\ \lambda_1 \underset{\sim}{z}^{(2)H}\underset{\sim}{x}^{(1)} & \underset{\sim}{z}^{(2)H}A\underset{\sim}{z}^{(2)} & \cdots & \underset{\sim}{z}^{(2)H}A\underset{\sim}{z}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 \underset{\sim}{z}^{(n)H}\underset{\sim}{x}^{(1)} & \underset{\sim}{z}^{(n)H}A\underset{\sim}{z}^{(2)} & \cdots & \underset{\sim}{z}^{(n)H}A\underset{\sim}{z}^{(n)} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \\ \hline \underset{\sim}{0} & A_1 \end{array}\right].$$

Note que os autovalores de A_1 são $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$: de fato, os autovalores de A e $U_1^H A U_1$ são os mesmos, e

$$\det(sI - U_1^H A U_1) = (s - \lambda_1) \cdot \det(sI - A_1)$$

(ver relações sobre determinantes de matrizes particionadas, 1ª aula).

Repita agora a argumentação acima para A_1, determinando U_2 unitária tal que $(U_2 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)})$

$$U_2^H A_1 U_2 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_2 & * \\ \hline \underset{\sim}{0} & A_3 \end{array}\right].$$

Defina $V_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \underset{\sim}{0}^T \\ \hline \underset{\sim}{0} & U_2 \end{array}\right]$, então

$$V_2^H U_1^H A U_1 V_2 = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 & * & * \\ \hline 0 & \lambda_2 & * \\ \hline \underset{\sim}{0} & \underset{\sim}{0} & A_3 \end{array}\right].$$

Prosseguindo desta forma, obteremos uma seqüência de matrizes unitárias $U_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ tal que

$$V_n^H V_{n-1}^H \cdots V_2^H U_1^H A U_1 V_2 \cdots V_{n-1} V_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{bmatrix} = R.$$