LES 201
Matemática Aplicada à Economia

Aulas 15 e 16

Otimização Não Condicionada

Márcia A.F. Dias de Moraes

26 e 27/09/2016

Otimização

Equilíbrio: resultado da interação *impessoal* de forças

- Não requer esforço de ninguém para se atingir as metas

Ex: equilíbrio de mercado

$$\underbrace{\text{força demanda}}_{\textit{famílias}} \ \text{x} \ \underbrace{\text{força oferta}}_{\textit{firmas}}$$

→ ninguém está buscando preço e quantidade de equilíbrio específicos

Problemas de OTIMIZAÇÃO: busca-se atingir uma meta

→ o equilíbrio é a posição ótima para uma unidade econômica (família, firma, etc)

→ existem técnicas de determinação da posição ótima

Otimização

$$\text{Otimização}\begin{cases}\text{Não condicionada}\begin{cases}\text{1 variável}\\ \text{n variáveis}\end{cases}\\ \\ \text{Condicionada}\begin{cases}\text{1 variável}\\ \text{n variáveis}\end{cases}\end{cases}$$

Chiang

Cap. 9 – Otimização não condicionada – 1 variável de escolha

Cap 11 - Otimização não condicionada – n variáveis de escolha

Cap 12 – Otimização condicionada

Otimização Não Condicionada
1 variável de escolha

Valores ótimos e valores extremos

→ Otimização: escolha da melhor alternativa possível

→ baseada em algum critério: *maximização, minimização*

- Maximização
  - Lucro da firma; Utilidade do consumidor; Taxa de crescimento do bem estar
- Minimização
  - Custo; Distância; Perdas

Matematicamente: Achar os **extremos** das funções

⇒ Pontos de **Máximo** ou de **Mínimo** da função

Otimização

PASSOS

I) Delinear a função objetivo

II) Condições de 1a. Ordem

III) Condições de 2a. Ordem

Otimização

PASSO 1: Delinear a função objetivo

- Variável dependente:
  - representa o objeto da maximização ou da minimização
- Variáveis independentes
  - são aquelas cujas grandezas podem ser selecionadas, com vistas à otimização
  - SÃO AS VARIÁVEIS DE ESCOLHA

Essência do Processo de Otimização

Determinação do conjunto de variáveis de escolha que geram o máximo ou mínimo (extremo) da função objetivo

Otimização

Ex: Firma deseja maximizar o lucro (π)

Função objetivo:

____

- Objetivo da maximização : _______________
- Variável de escolha:____________________

Problema:______________________________

Otimização Não Condicionada

A) Uma variável

Dada $y = f(x)$, contínua e que possui derivadas contínuas

- Procedimento da maximização (ou minimização):

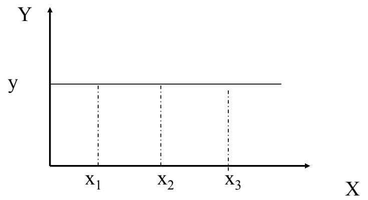
  achar o valor de *x* que *maximize* (ou *minimize)* o valor de y

Otimização Não Condicionada – 1 variável

Exemplos de função objetivo

a) Função objetivo = cte: y = k

- Todos os valores de x correspondem ao mesmo y
- Não existem escolhas a serem feitas

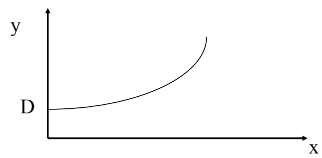


Otimização Não Condicionada – 1 variável

Exemplos de função objetivo

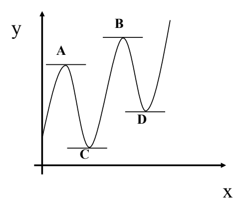
b) Função objetivo monotonamente crescente

- Se o domínio for R^+ , não existe ponto de máximo
- Ponto D: ponto de mínimo absoluto (ou global)



Otimização Não Condicionada – 1 variável

c) + comum em economia



Achar Máximo e Mínimo Global: Se conhecer todas as abscissas dos pontos de máximos e mínimos, estimam-se: os valores da função nestes pontos, os valores da função dos pontos extremos do domínio, e compara os valores da função

Pontos de Mínimo

- ____________________
- ____________________

Pontos de Máximo

- ____________________
- ____________________

→Uma função pode admitir vários extremos relativos

Otimização Não Condicionada – 1 variável

Questão: como achar os extremos?

PASSO II: Condição de 1a. Ordem: Teste da Derivada Primeira

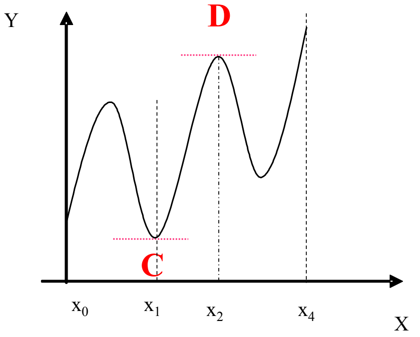
Dada uma função contínua, y = f(x), se um extremo relativo ocorre em $x = x_0$, então:

$$f'(x_o) = 0$$

Funções contínuas:

- extremos ocorrem em $f'(x_0) = 0$
- $f'(x_0) = 0$ pode ser ponto de máximo e de mínimo

Otimização Não Condicionada – 1 variável



Otimização Não Condicionada – 1 variável

Se f'(x_0) = 0 então f(x_0) é:

- Máximo relativo :

f'(x_0) muda o sinal ___________para_________ da esquerda de x_0 para a direita de x_0.

- Mínimo relativo:

f'(x_0) muda de sinal___________para__________da esquerda para a direita de x_0

- Ponto de inflexão (nem máximo nem mínimo)

____

Otimização Não Condicionada – 1 variável

Note que: $f'(x_0) = 0$

- É condição *necessária* mas *não suficiente* para f(x_0) ser ponto de extremo
  - Pode ser ponto de inflexão
- Extremo: deve ocorrer também mudança de sinal de f'(x)

Otimização Não Condicionada – 1 variável

Pontos de Inflexão: $f'(x_0) = 0$ ou $f'(x_0) \neq 0$

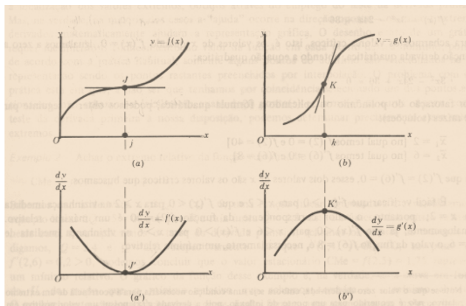


Figura 9.3

Otimização Não Condicionada – 1 variável

III) Condição de 2a. Ordem – Teste da Derivada 2ª

Se a derivada primeira de uma função no ponto $x = x_0$ é: $f'(x_0) = 0$, então o valor da função neste ponto f (x_0) será:

a) máx. relativo (ou máximo local) se $f''(x_0) < 0$

b) mín. relativo (ou máximo local) se $f''(x_0) > 0$

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ é abscissa de } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 \text{ é abscissa de } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Otimização Não Condicionada – 1 variável

- f ´(x): mede a taxa de variação da FUNÇÃO ORIGINAL
- f ´´(x): mede a taxa de variação da f '(x) (DERIVADA PRIMEIRA)

Quando x aumenta:

- $f'(x_0) > 0$ valor da função original tende a CRESCER
- $f'(x_0) < 0$ valor da função original tende a DECRESCER

- $f''(x_0) > 0$ a inclinação da curva original tende a CRESCER
- $f''(x_0) < 0$ a inclinação da curva original tende a DECRESCER

Sinais de f' e f''	Propriedades do Gráfico de f	Forma Geral do Gráfico de f
$f'(x) > 0$ $f''(x) > 0$	f crescente f côncava para cima	
$f'(x) > 0$ $f''(x) < 0$	f crescente f côncava para baixo	
$f'(x) < 0$ $f''(x) > 0$	f decrescente f côncava para cima	
$f'(x) < 0$ $f''(x) < 0$	f decrescente f côncava para baixo	

Otimização Não Condicionada – 1 variável

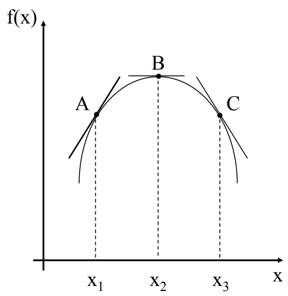
$\begin{cases} f'(x_0) > 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ a inclinação da curva é POSITIVA E CRESCENTE
o valor da função AUMENTA A TAXAS CRESCENTES

$\begin{cases} f'(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ a inclinação da curva é POSITIVA E DECRESCENTE
o valor da função AUMENTA A TAXAS DECRESCENTES

$\begin{cases} f'(x_0) < 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ a inclinação da curva é NEGATIVA E DECRESCENTE
o valor da função SE REDUZ A TAXAS CRESCENTES

$\begin{cases} f'(x_0) < 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ a inclinação da curva é NEGATIVA E CRESCENTE
o valor da função SE REDUZ A TAXAS DECRESCENTES

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DERIVADA 2ª.

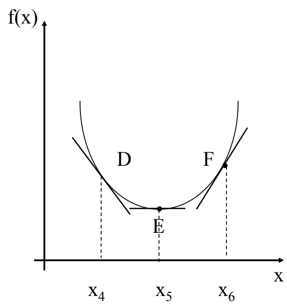


$A(x_1) \Rightarrow$

$B(x_2) \Rightarrow$

$C(x_3) \Rightarrow$

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DERIVADA 2ª.



$D(x_4) \Rightarrow$

$E(x_5) \Rightarrow$

$F(x_6) \Rightarrow$

Otimização Não Condicionada – 1 variável

Roteiro para otimização não condicionada

Para uma função objetivo com 1 variável independente, dentro do domínio [a,b]

1. Condição necessária (CPO)
   - 1.1) calcule f'(x)
   - 1.2) f '(x) = 0 → x* (valor crítico de x)
2. Condição suficiente (CSO)
   - 2.1) calcule f'' (x)
   - 2.2) se:
     - f '' (x*) < 0 → Máximo Local
     - f '' (x*) > 0 → Mínimo Local
     - f'' (x*) = 0 → provavelmente inflexão

Otimização Não Condicionada – 1 variável

Roteiro para otimização não condicionada - continuação

3. Determinação de mínimo (máximo) local geral

Inspeção entre os valores f(x*), assim como entre valores de f(a) e f(b) (pontos extremos de domínio)

Otimização Não Condicionada – 1 variável
Pontos de Inflexão

A) $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$
$f'''(x_0) \neq 0$
→ x_0 é abscissa de ponto de inflexão, com reta tangente paralela ao eixo das abscissas

B) $f'(x_0) \neq 0$
$f''(x_0) = 0$
$f'''(x_0) \neq 0$

Note que para ponto de inflexão não é necessário que $f'(x_0) = 0$

→ x_0 é abscissa do ponto de inflexão, com reta tangente oblíqua ao eixo das abscissas

Otimização Não Condicionada – 1 variável

4) Generalização do Critério

Teste da derivada enésima. Se:

$f'(x_o) = f''(x_o) = f'''(x_o) = \dots f^{n-1}(x_o) = 0$

e

$f^n(x_o) \neq 0$

Então:

a) Se n for ímpar: → x é abscissa de ponto de inflexão

b) Se n for par:

b.1) $f^n(x_o) > 0$ → x é abscissa de mínimo relativo

b.2) $f^n(x_o) < 0$ → x é abscissa de máximo relativo

Otimização Não Condicionada – 1 variável

Aplicação Numérica

a) $y = x^3$ $y = (7-x)^4$

Otimização Não Condicionada – 1 variável

Ex 1: Ache os pontos de máximo ou de mínimo da função. Dado o intervalo [-4,2], obter os pontos de máximo e mínimo absolutos.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x$$

Otimização Não Condicionada – 1 variável

Ex 2: Maximização Lucro - Dadas as funções de receita e Custo, qual a quantidade que maximiza o lucro? Qual o valor do lucro?

$$R(Q) = 1000\,Q - 2Q^2$$
$$C(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$$

Otimização Não Condicionada – 1 variável

Ex 2: Maximização Lucro - Função genérica

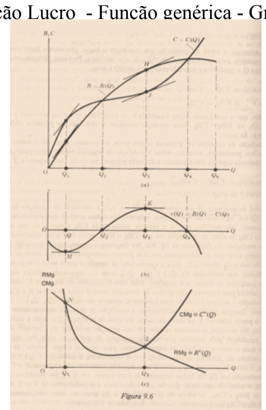
$R(Q) = P.Q$ $C(Q) = f(Q)$ $L(Q) = R(Q) - C(Q)$

Para maximizar lucro:

1) Condições de 1a. Ordem

2) Condições de 2a. Ordem

Ex 2: Maximização Lucro - Função genérica - Graficamente



Otimização Não Condicionada – 1 variável

Ex 3: Maximização Renda Fiscal de um imposto específico

Seja:

$$R(Q) = -\alpha Q^2 + \beta Q$$
$$C(Q) = aQ^2 + bQ + c$$
$$L(Q) = R(Q) - C(Q)$$

O governo planeja por um imposto específico sobre o produto da firma

↓

Objetivo: Maximizar receita tributária oriunda desta fonte

Questão: Dada a função receita tributária: $T = t\overline{Q}$

qual a alíquota t a ser escolhida pelo governo?

Otimização Não Condicionada – 1 variável

Resolução

Otimização Não Condicionada

Mais de uma variável de escolha

Otimização Não Condicionada
Mais de uma variável de escolha

Firma que produz *n* produtos:

Maximização lucro: achar níveis ótimos de produção de vários produtos

Caso (a) : 2 variáveis de escolha: x_1 e x_2

Suposição:

- função objetivo possui derivadas parciais contínuas até as ordens desejadas
  - Garantir a diferenciabilidade da função objetivo e de suas derivadas parciais

Otimização Não Condicionada
Mais de uma variável de escolha

Processo otimização

- Da mesma forma que 1 variável de escolha, o critério para se achar os máximos e mínimos relativos baseia-se nas condições:
  - Primeira Ordem – CPO (derivada primeira = 0)
  - Segunda Ordem – CSO (sinal derivada 2a. no(s) pontos(s) críticos)
- Diferença: no caso de mais variáveis trabalhamos com ***derivadas parciais***

Derivadas Parciais de 1a. ordem

Função z = f (x,y) pode gerar ____ derivadas parciais de 1a. Ordem:

$$fx \equiv \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{e} \quad fy \equiv \frac{\partial z}{\partial y}$$

Derivadas Parciais de 2a. ordem

Simbologia

$$fxx \equiv \frac{\partial fx}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Derivadas parciais de 2a. ordem

Simbologia

$$f_{yy} \equiv \frac{\partial (f_y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y}) \equiv \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}$$

Derivadas Parciais Cruzadas

Simbologia

$$fxy \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$fyx \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

- Medem a taxa de mudança de uma derivada parcial com respeito à outra variável

Derivadas parciais cruzadas

Teorema Young:

f (x,y) = f (y,x)

Observação:

$fxx(x, y)$
$fyy(x, y)$ É o valor das derivadas no ponto (x,y)
$fxy(x, y)$

Ex.:

$$z = x^3 + 5xy - y^2$$

→ Obtenha as derivadas parciais de 2a. ordem

Ex: $z = x^2 e^{-y}$

Condições para extremo para função de duas variáveis

Dada z = f (x,y)

Condição	Máx. Local	Mín. Local
Primeira Ordem (CPO) Necessária		
Segunda Ordem (CSO)		

Se: *f*xx . *f*yy < (*f*xy)^2: ____________________________________

Se: *f*xx . *f*yy = (*f*xy)^2: ____________________________________

Função de 2 variáveis: pontos de máximo e de mínimo

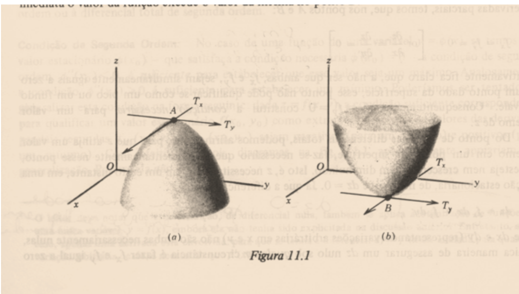


Figura 11.1

Função de 2 variáveis: pontos de máximo e de mínimo

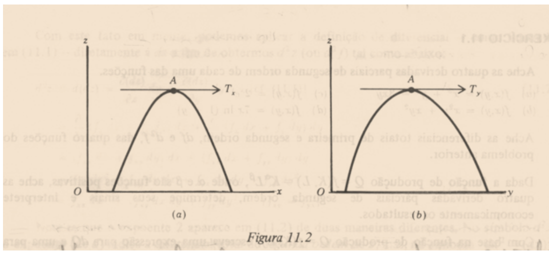


Figura 11.2

Função de 2 variáveis: pontos de Sela e de Inflexão

O CASO DE MAIS DE UMA VARIÁVEL DE ESCOLHA

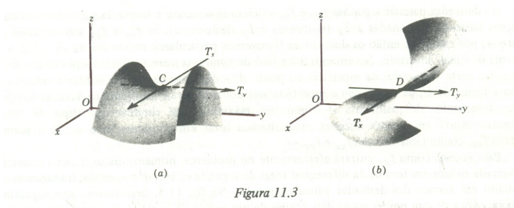


Figura 11.3

Exemplo:

a) Achar as derivadas parciais primeiras e segundas para a função:

$$z=8x^3+2xy-3x^2+y^2+1$$

b) Verificar as condições de primeira ordem:

$fx = 24x^2 + 2y - 6x$ $fy = 2x + 2y$

$$\begin{cases} 24x^2 + 2y - 6x = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

c) Verificar as condições de segunda ordem:

d) Qual o valor da função no ponto de mínimo?

Ex: Chiang, p. 311

Considere uma firma que produz dois produtos sob competição perfeita (preços dados exogenamente), com preços P_{10} e $P_{20.}$ O custo de produção da firma é dado pela função:

$$C = 2\,Q_1^2 + Q_1Q_2 + 2Q_2^2$$

a) Ache Q_1 e Q_2 que, combinados, maximizam o lucro da firma

Ex: Idem anterior, só que neste caso o mercado é monopólio. Considere que as demandas pela firma monopolista são as seguintes:

$$Q_1 = 40 - 2P_1 + P$$
$$Q_2 = 15 + P_1 - P_2$$

Função objetivo com n variáveis

Condição de 1a. Ordem (CPO)

$f_1 = f_2 = \dots f_n = 0$

Condição de 2a. Ordem

Analisar o sinal do **Determinante Hessiano H_i** onde H_i :

é o iésimo menor principal do Hessiano H (subdeterminante formado pela retenção dos iésimos elementos da diagonal principal de H.

Função objetivo com n variáveis

Determinante Hessiano: é um determinante que possui como elementos derivadas parciais de 2ª ordem

Otimização NÃO CONDICIONADA: Caso de 2 variáveis:

Z = f (x,y)

$$|H| = \begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fyx & fyy \end{vmatrix}$$

H1 H2

Condição de 2a. ordem

Mínimo Local: $|H1| > 0$, $|H2| > 0$

Máximo Local: $|H1| < 0$, $|H2| > 0$

Otimização NÃO CONDICIONADA: Caso de 3 variáveis

$$|H| = \begin{vmatrix} fxx & fxy & fxz \\ fyx & fyy & fyz \\ fzx & fzy & fzz \end{vmatrix}$$

Condição de 2a. ordem

Mínimo Local: $|H1| > 0$, $|H2| > 0$, $|H3| > 0$

Máximo Local: $|H1| < 0$, $|H2| > 0$, $|H3| < 0$

Otimização NÃO CONDICIONADA, para o caso de n variáveis:

$$|H| = \begin{vmatrix} fxx & fxy & \dots & fxn \\ fyx & fyy & \dots & fyn \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ fnx & fny & \dots & fnn \end{vmatrix}$$

H1 H2 HN

Condição de 2a. ordem

Mínimo Local: $|H1| > 0$, $|H2| > 0$, ..., $|Hn| > 0$

Máximo Local: $|Himpar| < 0$, $|Hpar| > 0$

Otimização NÃO CONDICIONADA, caso de n variáveis
Critérios para pontos extremos

Condição	Máx. Local	Mín. Local
Primeira Ordem (CPO) Necessária	$f_1 = f_2 = \dots f_n = 0$	$f_1 = f_2 = \dots f_n = 0$
Segunda Ordem (CSO)	$\lvert Hi\rvert > 0$ para i par $\lvert H_i\rvert < 0$ para i ímpar Alterna sinal	$\lvert Hi\rvert > 0$ para qualquer i Sempre positivo

Ex.: Ache os valores extremos da função

$$z = -x_1^3 + 3x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 3x_3^2$$

Ler exemplo 1 Chiang, pag 299

Fazer Exercícios do Chiang: 11.4, exercícios 1 a 4