SEM 536 - Sistemas de Controle I
Aula 7 - Lugar das Raízes - Compensadores em Avanço e Atraso

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

- Exemplo

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2(s+12)}$$

- Passo 1: Plotar no plano complexo os pólos ($\times$) e zeros ($\circ$) de $G(s)$
- Passo 2: Determinar o LR sobre o eixo real: Se o número de pólos e zeros à direita de s_0 é ímpar, então s_0 pertence ao LR

- Passo 3: Desenhar as assíntotas do LR para $K \to \infty$
  - Ângulo das assíntotas

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{n-m}, \quad l = 1, 2, \cdots, n-m$$

  - Ponto de cruzamento das assíntotas, α

$$\alpha = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n-m}$$

Lugar das Raízes

- Passo 4: Determinar ângulo de partida do pólo k

$$\phi_k = \sum_{j=1}^{m} \psi_j - \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \phi_i - 180^\circ$$

ψ_j = ângulo entre o zero j e o pólo k
ϕ_i = ângulo entre o pólo i e o pólo k

- Passo 4: Determinar ângulo de chegada do zero k

$$\psi_k = \sum_{i=1}^{n} \phi_i - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \psi_j + 180^\circ$$

ψ_j = ângulo entre o zero j e o pólo k
ϕ_i = ângulo entre o pólo i e o pólo k

- Passo 5: Determinar os pontos de cruzamento com o eixo imaginário

  1) Critério de Routh

  2) Substitui $s_0 = \omega_0 j$ na eq. característica e determina-se K e ω_0

- Passo 6: Determinar os pontos de separação de partida e de chegada

$$a(s)b'(s) - a'(s)b(s) = 0$$

- Dois segmentos se separam em $\pm 90^\circ$

- Três segmentos se aproximam com ângulo relativo de 120° e se separam com rotação de 60°.

- LR com relação a um parâmetro do sistema
- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+c)}$$

- Equação característica, $K = 1$

$$\begin{aligned} 1+G(s) &= 0 \\ s^2+cs+1 &= 0 \\ 1+c\frac{s}{s^2+1} &= 0 \end{aligned}$$

Lugar das Raízes

- LR com dois parâmetros
- Motor DC + controlador PV

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Lugar das Raízes

- Equação característica

$$s^2 + (1 + K_V)s + K_P = 0$$

- Reescrevendo para $K_P = 4$

$$1 + K_V \frac{s}{s^2 + s + 4} = 1 + K_V G(s) = 0$$

- Variação de K_P para valores maiores de 4

$$s^2 + (1 + K_V)s + K_P = 0$$
$$s^2 + (1 + K_V)s + 4 + K = 0$$

- Reescrevendo para $K_V = 1$

$$1 + K\frac{1}{s^2 + 2s + 4} = 1 + KG'(s) = 0$$

Compensação em Avanço e Atraso

- Compensador da forma

$$C(s) = \frac{s+z}{s+p}$$

- Avanço: $z < p$
- Atraso: $z > p$
- Equação característica

$$1 + KC(s)G(s) = 0$$

Compensação em Avanço e Atraso

- Considere

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- Especificações

$$\zeta > 0,5$$

$$\omega_n > 7 \quad \text{rad/s}$$

- Matlab: sisotool

Matlab

- Exemplo: Compensador em Avanço

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 51s + 550)}$$

- Especificações:
  - Parte real: $-\sigma < -7$ (tempo de acomodação $t_s < 0,56s$)
  - Amortecimento: $\zeta > 0.6$
  - Erro de regime: $K_v > 10$

Matlab

- numG = 1
- denG = [1 51 550 0]
- G =tf(numG,denG)
- sisotool(G)

Matlab

- Erro de regime:

$$K_v = lim_{s \to 0} sKC(s)G(s) = K\frac{z}{p * 550} > 10$$

- Considere o sistema sem atraso

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- E o sistema com atraso no tempo de λ segundos

$$G'(s) = \frac{e^{-\lambda s}}{s(s+1)}$$

- Aproximação do atraso no tempo

$$e^{-\lambda s} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{s+\frac{1}{\lambda}}$$

- Matlab: sisotool

Matlab

- Exemplo: Auto-piloto

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{\delta_e(s)} = \frac{160(s+2,5)(s+0,7)}{(s^2+5s+40)(s^2+0,03s+0,06)}$$

- Especificações
  - Tempo de subida: $t_r < 1$ s ($\omega_n > 1.8$ rad/s)
  - Sobresinal menor que 10% ($\zeta > 0.6$)

Matlab

- numG = 160*conv([1 2.5],[1 0.7])
- denG = conv([1 5 40],[1 0.03 0.06])
- G =tf(numG,denG)
- sisotool(G)
- $$C(s) = \frac{s+3}{s+30}$$