SEM 536 - Sistemas de Controle I
Aula 6 - Lugar das Raízes

Adriano A. G. Siqueira

Universidade de São Paulo

- Função de Transferência de Malha Aberta

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)}$$

$$G(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}$$

z_i: zeros de $G(s)$

p_i: polos de $G(s)$

- Função de Transferência de Malha Fechada (Ganho Proporcional)

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$

- Equação característica

$$1 + KG(s) = 0$$

- Definição:

Lugar geométrico no plano complexo das raízes da equação característica $1 + KG(s) = 0$ quando se varia o ganho K de 0 a ∞.

- Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

- Equação característica

$$1 + KG(s) = 0$$
$$s^2 + s + K = 0$$
$$p_i = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

- Equação característica

$$1+KG(s) = 0$$
$$1+K\frac{b(s)}{a(s)} = 0$$
$$a(s)+Kb(s) = 0$$

- Outra forma

$$G(s) = -\frac{1}{K}$$

$$G(s) = -\frac{1}{K}$$

- K real positivo $\Rightarrow$ $G(s)$ real negativo:

$$\text{fase de } \; G(s) = 180^\circ \Rightarrow \angle G(s) = 180^\circ$$

- K real negativo $\Rightarrow \angle G(s) = 0^\circ$

- Nova definição:

Lugar geométrico no plano complexo onde a fase de $G(s)$ é 180° ($\angle G(s) = 180^\circ$).

- Exemplo para a construção do Lugar das Raízes (LR)

$$G(s) = \frac{1}{s[(s+4)^2+16]} = \frac{1}{s(s+4+4j)(s+4-4j)}$$

- Passo 1: Plotar no plano complexo os pólos ($\times$) e zeros ($\circ$) de $G(s)$

- Passo 2: Determinar o LR sobre o eixo real

Se o número de pólos e zeros à direita de s_0 é ímpar, então s_0 pertence ao LR

- Passo 3: Desenhar as assíntotas do LR para $K \to \infty$

$$G(s) = -\frac{1}{K} \Rightarrow G(s) = 0$$

- Primeiro caso: o LR tende para os zeros

$$b(s) = 0$$

- Segundo caso: o LR tende para o infinito
- Quando $n > m$ e $s \to \infty$

$$1 + K\frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} = 0$$

- Aproximado por

$$1 + K\frac{1}{(s+\alpha)^{n-m}} = 0$$

- Ângulo das assíntotas

$$\phi_l = \frac{180^\circ + 360^\circ(l-1)}{n-m}, \quad l = 1, 2, \cdots, n-m$$

- Ponto de cruzamento das assíntotas, α

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n-m}$$

- Passo 4: Determinar ângulo de partida do pólo k

$$\phi_k = \sum_{j=1}^{m} \psi_j - \sum_{i=1, i \neq k}^{n} \phi_i - 180^\circ$$

ψ_j = ângulo entre o zero j e o pólo k
ϕ_i = ângulo entre o pólo i e o pólo k

- Passo 4: Determinar ângulo de chegada do zero k

$$\psi_k = \sum_{i=1}^{n} \phi_i - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} \psi_j + 180^\circ$$

ψ_j = ângulo entre o zero j e o pólo k
ϕ_i = ângulo entre o pólo i e o pólo k

- Passo 5: Determinar os pontos de cruzamanto com o eixo imaginário

  1) Critério de Routh

  2) Substitua $s_0 = \omega_0 j$ na eq. característica e determina-se K e ω_0

- Passo 6: Determinar os pontos de separação de partida e de chegada

$$f(s) = a(s) + Kb(s) = 0$$

- Múltiplas raízes

$$\frac{f(s)}{ds} = \frac{da(s)}{ds} + K\frac{db(s)}{ds} = 0$$

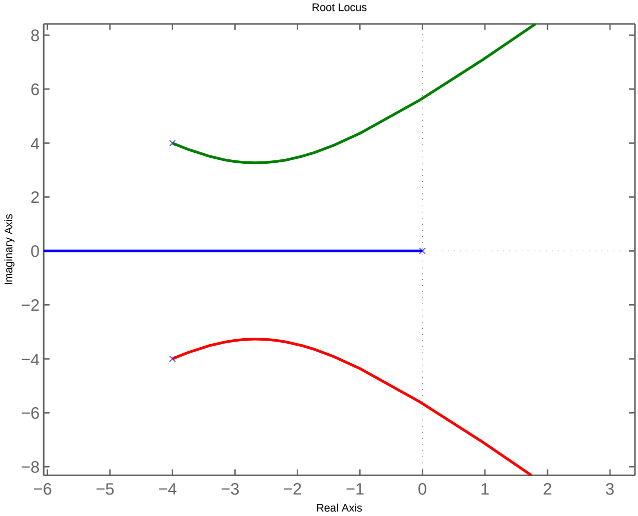
$$K = -\frac{a'(s)}{b'(s)}$$

- Condição necessária

$$a(s)b'(s) - a'(s)b(s) = 0$$

- Dois segmentos se separam em $\pm 90^\circ$
- Três segmentos se aproximam com ângulo relativo de 120° e se separam com rotação de 60°.

- Passo 7: Desenhar o Lugar das Raízes



Determinação de K pelo Lugar das Raízes

- Da equação característica

$$K = -\frac{1}{G(s)}$$

- Condição $\angle G(s) = 180^\circ$

$$K = \frac{1}{|G(s)|}$$

Determinação de K pelo Lugar das Raízes

- Exemplo: $\zeta = 0,5 \Rightarrow s_0 = -2 + 3,4j$

$$
\begin{aligned}
|G(s_0)| &= \frac{1}{|s_0(s_0 - p_2)(s_0 - p_3)|} \\
&= \frac{1}{|s_0||s_0 - p_2||s_0 - p_3|}
\end{aligned}
$$

- Portanto

$$K = |s_0||s_0 - p_2||s_0 - p_3| = 4 \times 2,1 \times 7,7 = 65$$

Determinação de K pelo Lugar das Raízes

- Fórmula geral

$$K = \frac{\prod_{i=1}^{n} |s_0 - p_i|}{\prod_{j=1}^{m} |s_0 - z_j|}$$