Departamento de Física Experimental

Distribuição de Probabilidade

Distribuição Gaussiana, Lorentziana e Exercícios
(*Lagarta*)

08-09 de abril de 2014

Paulo R. Pascholati

Lagarta – Ibiuna

Sumário

Resumo sobre Distribuições
Propriedades - Distribuição Binomial

- *Distribuição Binomial*
  Descreve a proibabilidade de observar n sucessos de N tentativas quando a probabilidade de cada sucesso é p.

$$P_{Np}(n) = \frac{N!}{(N-n)!n!} \; p^n(1-p)^{N-n} \tag{1}$$

com média $\mu = Np$ e variância $\sigma^2 = Np(1-p)$.

Resumo sobre Distribuições

Propriedades - Distribuição de Poisson

- *Distribuição de Poisson*
  Caso limite da distribuição binomial para grandes n e média μ constante. Apropriada para descrever pequenas amostras de grandes populações.

$$P_\mu(n) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} \tag{2}$$

com variância $\sigma^2 = \mu$.

Resumo sobre Distribuições
Propriedades - Distribuição Gaussiana

- *Distribuição Gaussiana*
  Caso limite da distribuição binomial para grandes *n* e probabilidade *p* finita.
  Apropriada para descrever distribuições simétricas suaves.

$$P_{\mu\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]} \tag{3}$$

com média μ e variância σ^2, e largura a meia altura, *FWHM*, $\Gamma = 2,354\sigma$.

Gaussiana Padrão

$$P_{\mu\sigma}(z) = P_{01}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{z}{2}\right)^2} \tag{4}$$

Resumo sobre Distribuições

Propriedades - Distribuição Lorentziana ou de Breit-Wigner

- *Distribuição Lorentziana*
  Apropriada para descrever comportamento ressonante.

$$P_{\mu\Gamma}(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma/2}{(x-\mu)^2 + (\Gamma/2)^2} \tag{5}$$

  com média μ e largura a meia altura, *FWHM*, Γ.

- Seção de choque de espalhamento nuclear

$$\sigma(E) = \frac{\Gamma}{(2\pi)\left[(E-E_0)^2 + (\Gamma/2)^2\right]} \tag{6}$$

  onde E_0 é o centro da ressonância e $\tau = \frac{1}{\Gamma}$ é a largura da ressonância.

Resumo sobre Distribuições
Comparação entre as distribuições Gaussiana e Lorentziana

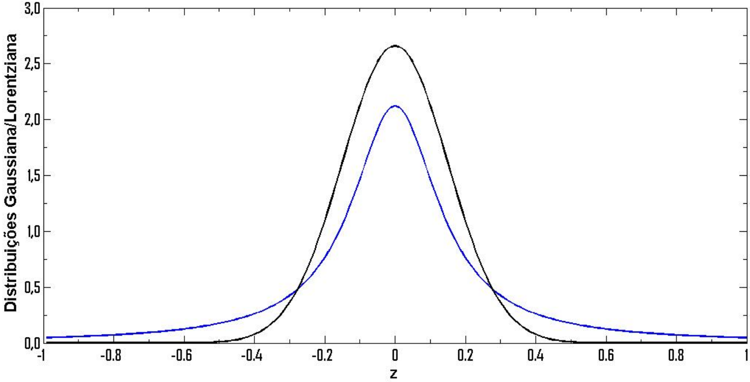

Figura : A curva na cor preta é a distribuição gaussiana e a azul a distribuição Lorentziana.

Resumo sobre Distribuições
Distribuição Lorentziana em Circuito Elétrico

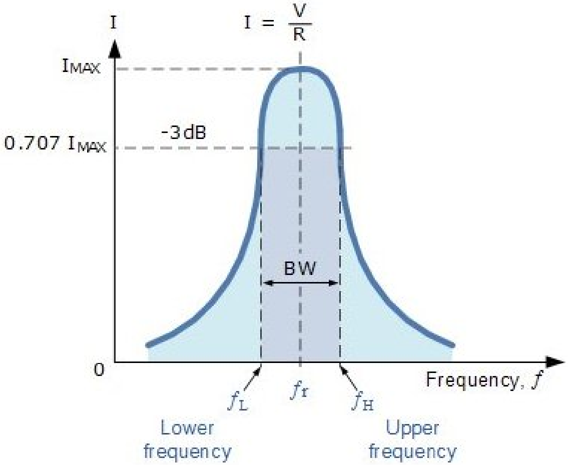

Figura : Distribuição de corrente de um circuito ressonante.

Resumo sobre Distribuições
Distribuição Lorentziana em Circuito Elétrico

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{Z} = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}} \tag{7}$$

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C}\right)^2}} \tag{8}$$

Na condição de ressonância tem-se que:

$$\omega_r L - \frac{1}{\omega_r C} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_r^2 = \frac{1}{LC} \tag{9}$$

e

$$I_{max} = \frac{V_{max}}{R} \tag{10}$$

Resumo sobre Distribuições

Distribuição Lorentziana - Ressonância de infra vermelho em compostos químicos.

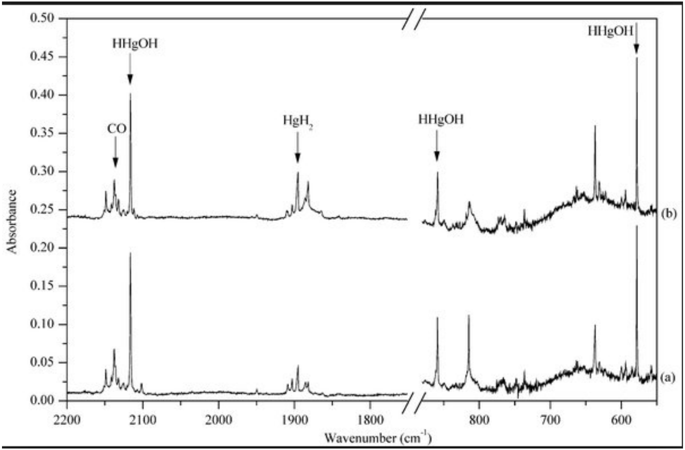

Figura : Exemplo de uso do fenômeno de ressonância.

Sumário

Exercício

Shakespeareum

Suponha que se tenha 10^{20} átomos de *Shakespeareum*, Sh, um elemento radioativo fictício cujo núcleo emite partículas alfa. A massa atômica do Sh é em torno de 150, neste caso 10^{20} átomos correspondem a aproximadamente 25mg do elemento. Suponha ainda que a constante de decaimento seja $2 \cdot 10^{-20}$ por segundo, o que significa que a probabilidade de qualquer núcleo decair em 1 segundo é $2 \cdot 10^{-20}$. Isto corresponde a uma meia vida da ordem de 12 anos. Agora, suponha que esta amostra de material é observada em muitos intervalos de 1 segundo. Pergunta-se:

1. Que distribuição descreve o comportamento do decaimento dessa amostra?
2. Qual é a média da distribuição?
3. Qual é a probabilidade da distribuição?
4. Qual a probabilidade de observar nenhum decaimento alfa em 1 s?

Exercício

Shakespeareum

1. Que distribuição descreve o comportamento do decaimento dessa amostra?

   Parâmetro:
   - população grande, n;
   - média constante e a probabilidade muito menor que um.

   A situação é bem descrita pela Distribuição de Poisson.
2. Qual é a média da distribuição?
   A média é $10^{20} \times 2 \cdot 10^{-20} = 2$
3. Qual é a probalidade da distribuição?
   A probabilidade é $2 \cdot 10^{-20}$.
4. Qual a probabilidade de observar nenhum decaimento alfa em 1 s?

$$P_2(0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = e^{-2} = 0,1353 \tag{11}$$

Exercício

Tempo Morto

Tempo morto é o intervalo de tempo em que um sistema de detecção de partículas fica saturado após a detecção de uma partícula e não consegue registrar outras partículas que atingem o detector. (Adaptado de Bevington, pág. 35.)

- Suponha que um sistema detector tem um *tempo morto* de 200 ns e que está exposto a um feixe de $1 \cdot 10^6$ partículas por segundo. Obtenha a eficiência desse sistema detector. A eficiência é a razão entre o número de partículas registradas pelo sistema detector e o número de partículas que atingem o detector no período de 200 ns.
- Calcule essa eficiência para as seguintes intensidades de feixe, em partículas por segundo: $2{\cdot}10^6$, $4{\cdot}10^6$, $6{\cdot}10^6$, $8{\cdot}10^6$ e $10 \cdot 10^6$.
- Faça um gráfico da eficiência em relação a intensidade do feixe de partículas.

Exercício

Tempo Morto - O que é?

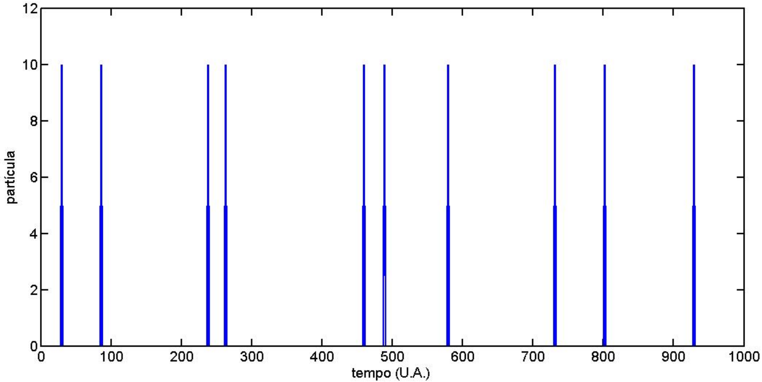

Figura : Partículas que atingem o detector em função do tempo, em unidades arbitrárias.

Exercício

Tempo Morto - O que é?

O slide 16 apresenta o sinal produzido pelo detector quando decteta 10 partículas por 1000 unidades de tempo, enquanto o slide 18 mostra o mesmo sinal e o intervalo de tempo morto de 100 unidades de tempo para que o sistema de aquisição faça o registro do sinal processado.
Os sinais que estão em até 100 unidades de tempo em seguida a um sinal não são registrados devido ao *tempo morto* do sistema de aquisição.

Exercício

Tempo Morto - O que é?

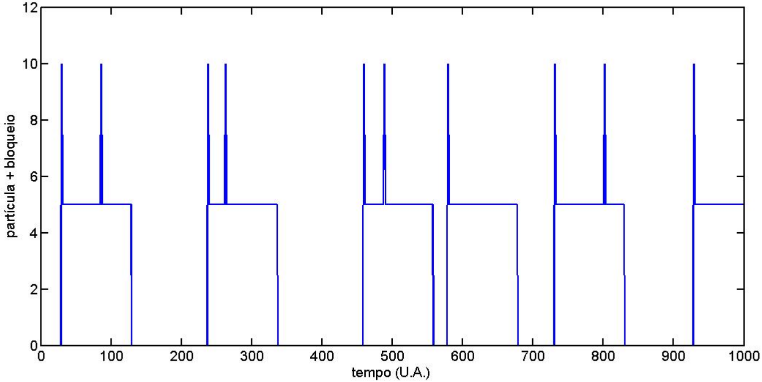

Figura : Sinal das partículas detectadas em função do tempo, em unidades arbitrárias, e o *tempo morto* do sistema de aquisição para registrá-lo.

Exercício
Tempo Morto

O sistema de aquisição vai registrar uma partícula de qualquer grupo de um ou mais partículas que foram detectadas em 200 ns, assim o número de partículas registradas, N_{reg}, é

$$N_{reg} = \sum_{i=1}^{\infty} P_{0,2}(i) \tag{12}$$

ou

$$= 1 - P_{0,2}(0) = 1 - e^{-\mu} \tag{13}$$

onde a média, μ, em cada 200 ns é o produto entre o número de partículas incidentes multiplicado por esse intervalo de tempo: $\mu = 200 \cdot 10^{-9} s \times 10^{6} partículas/segundo = 0,2 \ partículas$.

Solução do Exercício da Lista

O que é *Tempo Morto*

A eficiência, ϵ, é dada pela razão entre número de partículas registradas, N_{reg}, e o número de partículas chegam ao detector, μ,

$$\epsilon = \frac{N_{reg}}{\mu} = \frac{1 - e^{-\mu}}{\mu} \tag{14}$$

Substituindo o valor de $\mu = 0,2$

$$\epsilon = \frac{1 - e^{-0,2}}{0,2} = \frac{1 - 0,8187}{0,2} = 0,9063 \tag{15}$$

Distribuição Gaussiana Padrão

Probabilidade a partir da Gaussiana Padrão

A expressão da distribuição gaussiana padrão é:

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{16}$$

onde os parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ são, respectivamente, a média e o desvio padrão.
A probabilidade de se encontrar um valor entre z_{menor}, $z \leq 0$, e z_{maior}, $z \geq 0$ é:

$$P(z_{menor} \leq z \leq z_{maior}) = \int_{z_{menor}}^{z_{maior}} g(z)dz \tag{17}$$

Veja a representação gráfica apresentada no quadro 22.

Distribuição Gaussiana Padrão

Probabilidade entre z_{menor} e z_{maior} a partir da Gaussiana Padrão

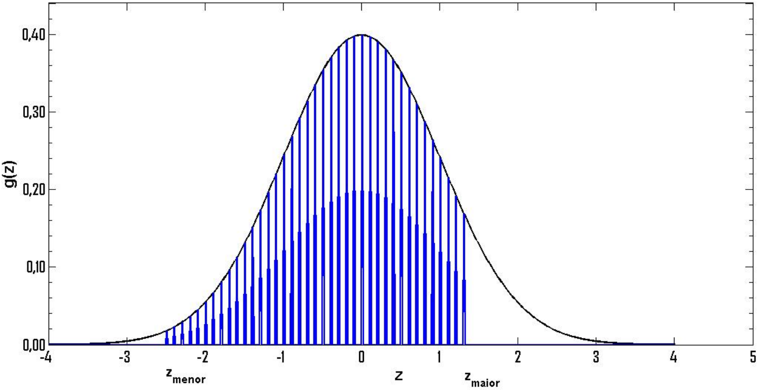

Figura : A probabilidade de um dado valor z ser encontrado entre z_{menor} e z_{maior} corresponde a área hachurada em azul.

Distribuição Gaussiana Padrão

Probabilidade entre z_{menor} e z_{maior} a partir da Gaussiana Padrão

Pela propriedade de simetria da distribuição gaussiana pode-se fazer o cálculo da probabilidade utilizando apenas o semieixo positivo de z fazendo em seguida a operação de adição adequada. Assim, vai ser utilizada a expressão:

$$P(0 \leq z \leq z_0) = \int_0^{z_0} g(z)dz \qquad (18)$$

A tabela do quadro 24 apresenta os valores da área corresponde ao intervalo entre 0 e o valor de z combinado: a coluna um contem os valores de z intervalos de 0,10 e o valor da área aparece na coluna dois caso para valores de décimo de z, a coluna três contem o valor da área para valor de z lido na coluna um acrescido do valor em centésimos que aparece na primeira linha.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4196	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,49865	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,2	0,49931									
3,5	0,49977									
4,0	0,499968									

Distribuição Gaussiana Padrão

Probabilidade a partir da Gaussiana Padrão – Exercício

Se a duração de um componente eletrônico tem em média 700 dias e desvio padrão de 50 dias. Obtenha a probabilidade desse componente ter duração de:

- maior que 600 dias;
- entre 150 e 900 dias;
- menos de $65+ +0$ dias;

Distribuição Gaussiana Padrão

Probabilidade a partir da Gaussiana Padrão – Exercício

Se a duração de um componente eletrônico tem em média 700 dias e desvio padrão de 50 dias. Obtenha a probabilidade desse componente ter duração de:

- maior que 600 dias;

$$P(600 \leq z \leq \infty) = \int_{600}^{\infty} g(z)dz \tag{19}$$

O quadro 28 apresenta a área correspondente a probabilidade do tempo de duração maior que 600 dias.
Para usar a tabela do quadro 24 é preciso transformar em duas integrais:

$$P(700 \leq z \leq \infty) = \int_{700}^{\infty} g(z)dz \tag{20}$$

representação gráfica no quadro 29.

Distribuição Gaussiana Padrão

Probabilidade a partir da Gaussiana Padrão – Exercício

$$P(700 \leq z \leq 800) = \int_{700}^{800} g(z)dz \qquad (21)$$

representação gráfica no quadro 30.

A primeira das integrais é a área a gaussiana da média, 700 dias, até o infinito cujo valor é 0,50.
Já a segunda integral é preciso estabelecer quanto 800 dias está em relação a média em unidades de desvio padrão, 50 dias. Isso corresponde a 2 desvios padrão, assim vendo na tabela do quadro 24: na primeira coluna 2,0 e na coluna dois, que corresponde ao centésimo 0,00, obtem-se o valor 0,4772. Portanto, a probabilidade é a soma de 0,5 e 0,4772, 0,977 é a probabilidade de encontrar o valor de duração do componente maior do que 600 dias.

Distribuição Gaussiana Padrão

Probabilidade a partir da Gaussiana Padrão – Exercício

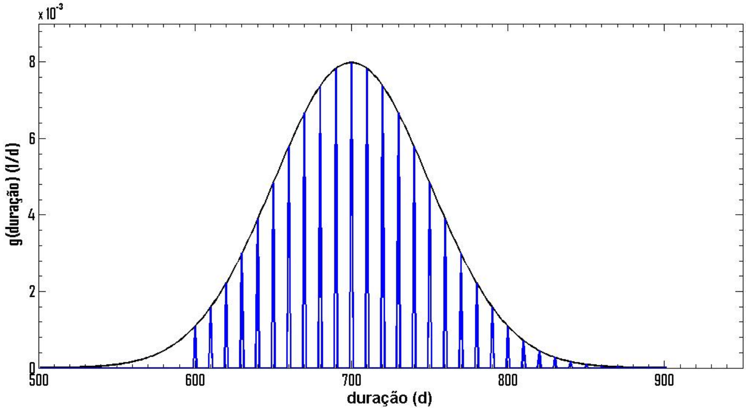

Figura : A probabilidade de um dado valor ser encontrado entre 600 e infinito corresponde a área hachurada em azul.

Distribuição Gaussiana Padrão
Probabilidade a partir da Gaussiana Padrão – Exercício

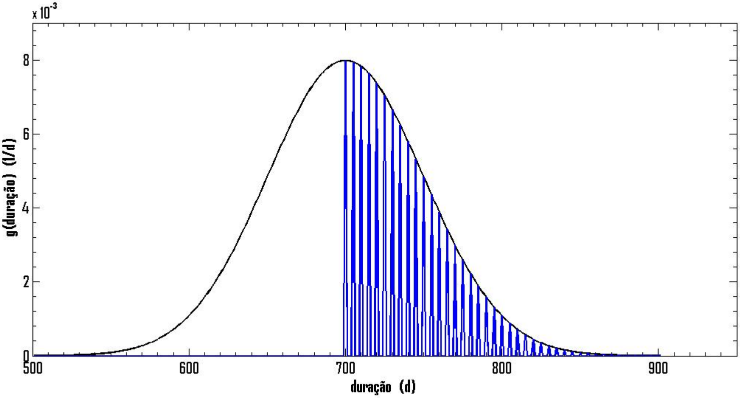

Figura : A probabilidade de um dado valor ser encontrado entre 700 e infinito corresponde a área hachurada em azul.

Distribuição Gaussiana Padrão

Probabilidade a partir da Gaussiana Padrão – Exercício

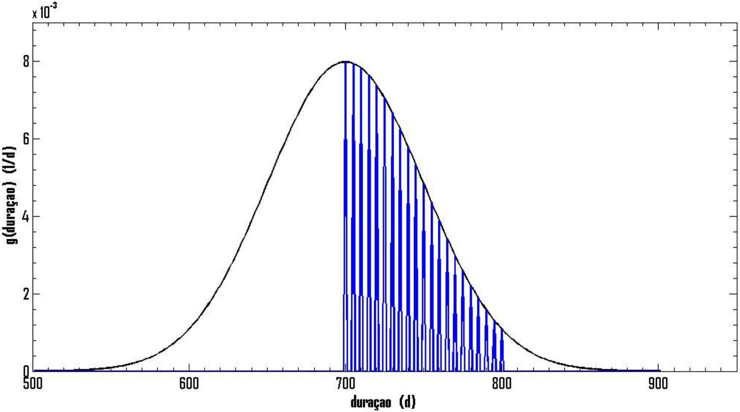

Figura : A probabilidade de um dado valor ser encontrado entre 700 e 800 corresponde a área hachurada em azul.