Apêndice F

Guenther Carlos Krieger Filho

PME 2360 Transferência de Calor

Solução Integral da Camada Limite Laminar sobre Placa Plana

Setembro th 2015

Contents

Simplificações para solução aproximada ou analítica

Simplificações:

- Escoamento laminar;
- Massa específica constante;
- propriedades constantes;
- Dissipação viscosa desprezível

Equações de Conservação aproximadas para Camada Limite

- Continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

- Momento em x

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

- Energia (Temperatura)

$$u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{3}$$

Soluções

- Solução analítica exata - von Blasius
- Solução Integral Aproximada - fornece principais parâmetros da C.L., tais como δ, δ_t, C_f, h

Integração da Equação da Continuidade

Integrando-se a Equação da Continuidade na direção y da altura da C.L. tem-se:

$$\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\delta \frac{\partial v}{\partial y} dy = 0, \tag{4}$$

mas com $v = 0$ em $y = 0$, tem-se

$$v(y = \delta) = -\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy, \tag{5}$$

Integração da Equação de Momento em x

Analogamente, para a Equação de Momento na direção x tem-se:

$$\int_0^\delta u\frac{\partial u}{\partial x}dy + \int_0^\delta v\frac{\partial u}{\partial y}dy = \nu\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy, \tag{6}$$

Integração da Equação de Momento em x

integrando por partes a segunda parcela do lado direito da equação anterior tem-se:

$$\int_0^\delta u\frac{\partial u}{\partial x}dy + uv|_0^\delta - \int_0^\delta u\frac{\partial v}{\partial y}dy = \nu\frac{\partial u}{\partial y}|_0^\delta, \tag{7}$$

usando as velocidades no limite da camada limite, $u = u_\infty$ e v dada pela equação 5 e ainda com a equação da continuidade (Eq. 1) para o terceiro termo do LHS tem-se

$$\int_0^\delta u\frac{\partial u}{\partial x}dy + u_\infty\int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x}dy + \int_0^\delta u\frac{\partial u}{\partial x}dy = -\nu\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} \tag{8}$$

Integração da Equação de Momento em x

ou ainda

$$u_\infty \int_0^\delta \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^\delta 2u \frac{\partial u}{\partial x} dy = \nu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} \tag{9}$$

e consequentemente

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x} \left(u_\infty u - uu \right) dy = \nu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} \tag{10}$$

re-arranjando os termos, tem-se a forma integral da equação de momento da camada limite

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^\delta (u_\infty - u) u dy \right] = \nu \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} \tag{11}$$

Integração da Equação da Energia (Temperatura)

Analogamente à forma integral da equação de momento, pode-se escrever a Equação da Energia:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{\delta}(T_\infty - T)u dy\right] = \alpha\frac{\partial T}{\partial y}|_{y=0} \tag{12}$$

as equações de momento e energia na forma integral satisfazem a conservação de momento e energia de forma média sobre toda a camada limite. As equações de conservação originais (Eqs. 1, 2 e 3) satisfazem as exigências de conservação localmente, ou seja, em cada ponto dentro da camada limite.

Soluções Aproximadas

- suposição de formas funcionais para u e T;
- condições de contorno apropriadas em $y = 0$ e $y = \delta$

Camada limite hidrodinâmica, C.C.

$$u(y=0) = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\delta} = 0 \tag{13}$$

$$u(y=\delta) = u_\infty \tag{14}$$

Soluções Aproximadas

A Equação de Momento em x (Eq. 2) aplicada em $y = 0$ e portanto com $u = v = 0$, resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = 0 \qquad (15)$$

para satisfazer estas condições de contorno, pode-se supor um polinômio de 3^o grau para a velocidade u como

$$\frac{u}{u_\infty} = a_1 + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_4\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad (16)$$

aplicando-se as quatro condições de contorno, obtém-se os coeficientes: $a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = 3/2$ e $a_4 = -1/2$.

Soluções Aproximadas

então o polinômio da velocidade é determinado por

$$\frac{u}{u_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3, \tag{17}$$

mas a espessura da camada limite δ não é conhecida. Assim, substitui-se Eq.17 na Eq. 11 e após integração tem-se

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{39}{280}{u_\infty}^2\delta\right) = \frac{3}{2}\frac{\nu u_\infty}{\delta} \tag{18}$$

Soluções Aproximadas

separando-se as variáveis e integrando-se em x tem-se:

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{140}{13}\frac{\nu x}{u_\infty} + C \tag{19}$$

como em $x = 0$ a altura da camada limite é nula, $\delta = 0$, a constante C tem que ser nula e assim

$$\delta = 4,64\left(\frac{\nu x}{u_\infty}\right)^{1/2} = \frac{4,64x}{{Re_x}^{1/2}} \tag{20}$$

Soluções Aproximadas

substituindo-se a Eq. 20 na Eq.17 e avaliando-se a tensão de atrito $\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) |_{y=0}$ tem-se o Coeficiente de Atrito

$$C_{f,x} = \frac{\tau}{\rho u_\infty^2/2} = \frac{0,646}{{Re_x}^{1/2}} \tag{21}$$

compare este resultado com o da solução analítica de Blasius

Solução aproximada para equação da temperatura na camada limite

Analogamente ao procedimento da equação da velocidade, pode-se propor um polinômio para a temperatura na forma

$$T^* = \frac{T - T_s}{T_\infty - T_s} = b_1 + b_2\left(\frac{y}{\delta_t}\right) + b_3\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^2 + b_4\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \qquad (22)$$

com os coeficientes determinados a partir das condições de contorno:

$$T^*(y = 0) = \frac{\partial T^*}{\partial y}\Big|_{y=\delta_t} = 0 \qquad (23)$$

$$T^*(y = \delta_t) = 1 \qquad (24)$$

Solução aproximada para equação da temperatura na camada limite

e ainda, com uso da Eq. da Energia 3,

$$\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2}\Big|_{y=0} \tag{25}$$

Solução aproximada para equação da temperatura na camada limite

Obtém-se então a equação da temperatura adimensional dentro da camada limite

$$T^* = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_t}\right)^3 \qquad (26)$$

substituindo as Eq.17 e Eq. 26 na Eq.12 e após algum algebrismo, assumindo a hipótese de $Pr \geq 1$, tem-se

$$\frac{\delta_t}{\delta} = \frac{Pr^{-1/3}}{1,026} \qquad (27)$$

compare este resultado com o solução analítica de Blasius.

Solução aproximada para equação da temperatura na camada limite

O coeficiente de transferência de calor pode então ser calculado por

$$h = \frac{-k_f \left(\partial T/\partial y\right)|_{y=0}}{T_s - T_\infty} = \frac{3}{2}\frac{k_f}{\delta_t} \tag{28}$$

Substituindo as Eq. 20 e Eq. 27 na equação acima tem-se a expressão para o Número de Nusselt local sobre a placa plana laminar

$$Nu_x = \frac{hx}{k_f} = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \tag{29}$$

compare este resultado com o da solução analítica de Blasius