

## Retorno e Risco: Modelo de Precificação de Ativos (CAPM)

O capítulo anterior cumpriu três finalidades. Em primeiro lugar, familiarizamos o leitor com a história dos mercados de capitais dos Estados Unidos. Em segundo lugar, apresentamos estatísticas tais como retorno esperado, variância, desvio-padrão e beta. Em terceiro lugar, discutimos um modelo simplificado da taxa de desconto de um projeto com risco.

Entretanto, assinalamos no capítulo anterior que esse modelo era de natureza arbitrária. Apresentamos agora um enfoque cuidadosamente desenvolvido ao cálculo da taxa de desconto de um projeto com risco. O Capítulo 10 examina o risco e o retorno de títulos isolados quando esses títulos fazem parte de uma carteira ampla. Embora essa investigação seja um primeiro passo necessário para a avaliação de projetos, o capítulo não analisa o estudo de projetos. Em lugar disso, reservamos um tratamento da taxa de desconto apropriada para orçamento de capital para o Capítulo 12.

A idéia central do presente capítulo pode ser assim sintetizada: um indivíduo que possui apenas um título deve usar o retorno esperado como medida da rentabilidade desse título. O desvio-padrão ou a variância são as medidas adequadas do risco do título. Um indivíduo que possui uma carteira diversificada preocupa-se com a *contribuição* de cada título ao retorno esperado e ao risco da carteira. No final das contas, o retorno esperado de um título é a medida correta da contribuição desse título ao retorno esperado da carteira. Entretanto, nem a variância, nem o desvio-padrão do retorno desse título são medidas apropriadas da contribuição do título ao risco de uma carteira. A contribuição de um título ao risco de uma carteira é medida mais corretamente por seu beta.

### 10.1 TÍTULOS ISOLADOS

Na primeira parte do Capítulo 10, examinaremos as características de títulos isolados. Em particular, discutiremos:

1. *Retorno esperado.* Esse é o retorno que um indivíduo espera de uma ação no próximo período. Evidentemente, como se trata apenas de uma expectativa, o retorno efetivo poderá ser mais alto ou mais baixo do que o esperado. A expectativa de um indivíduo pode simplesmente ser o retorno médio por período que um título tenha obtido no passado. Alternativamente, pode basear-se numa análise detalhada das perspectivas de uma empresa, em algum modelo desenvolvido em computador, ou em informação especial (privilegiada).

2. *Variância e desvio-padrão.* Há muitas maneiras distintas de medir a volatilidade do retorno de um título. Uma das maneiras mais comuns é a variância, que usa os quadrados das diferenças do retorno de um título em relação a seu retorno esperado. O desvio-padrão é a raiz quadrada da variância.

3. *Covariância e correlação.* Os retornos de títulos individuais estão relacionados uns aos outros. A covariância é uma estatística que mede a associação entre os retornos de dois títulos. Alternativamente, essa associação pode ser expressa em termos da correlação entre os dois títulos. A covariância e a correlação são elementos fundamentais para o entendimento do coeficiente beta.

### 10.2 RETORNO ESPERADO, VARIÂNCIA E COVARIÂNCIA

#### *Retorno esperado e variância*

Suponhamos que os analistas financeiros julguem ser possíveis quatro estados igualmente prováveis para o comportamento da economia: depressão, recessão, normal e expansão. Os retornos da Supertech Company devem acompanhar de perto o comportamento da economia, enquanto os retornos da Slowpoke Company não o farão. As predições de retorno são fornecidas a seguir:

|           | Retornos da<br>Supertech $R_{At}$ | Retornos da<br>Slowpoke $R_{Bt}$ |
|-----------|-----------------------------------|----------------------------------|
| Depressão | -20%                              | 5%                               |
| Recessão  | 10                                | 20                               |
| Normal    | 30                                | -12                              |
| Expansão  | 50                                | 9                                |

A variância pode ser calculada em quatro etapas. Uma etapa adicional é necessária para calcular o desvio-padrão. (Os cálculos são apresentados na Tabela 10.1.) As etapas são as seguintes:

1. Calcular o retorno esperado:

#### Supertech:

$$\frac{-0,20 + 0,10 + 0,30 + 0,50}{4} = 0,175 = 17,5\% = \bar{R}_A$$

#### Slowpoke:

$$\frac{0,05 + 0,20 - 0,12 + 0,09}{4} = 0,055 = 5,5\% = \bar{R}_B$$

2. Para cada empresa, calcular a diferença entre cada retorno possível e o retorno esperado, anteriormente obtido. Isso é apresentado na terceira coluna da Tabela 10.1.
3. As diferenças calculadas são indicações da dispersão dos retornos. Entretanto, como algumas são positivas e outras são negativas, é difícil trabalhar com elas nesse formato. Por exemplo, se simplesmente somássemos todas as diferenças para uma empresa, o resultado da soma seria igual a zero. Para tornar as diferenças mais relevantes, multiplicamos cada uma delas por si mesma. Com isso, todos os números passam a ser positivos, o que quer dizer que sua soma também deve ser positiva. Os quadrados das diferenças são apresentados na última coluna da Tabela 10.1.
4. Para cada empresa, calcula-se a média dos quadrados das diferenças, ou seja, a variância:<sup>1</sup>

#### Supertech:

$$\frac{0,140625 + 0,005625 + 0,015625 + 0,105625}{4} = 0,066875$$

<sup>1</sup>. Neste exemplo, os quatro estados correspondem a quatro resultados possíveis para cada ação. Se tivéssemos usado dados passados, os resultados teriam realmente ocorrido. Nesse caso, os estatísticos argumentam que o divisor correto é  $N - 1$ , onde  $N$  é o número de observações. Portanto, o denominador seria 3 ( $= 4 - 1$ ), no caso de dados passados, e não 4. Note-se que o exemplo da Seção 9.5 envolvia dados passados e utilizamos um divisor igual a  $N - 1$ . Embora essa diferença incomode tanto alunos quanto autores de livros-textos, na prática é uma questão de importância pequena. Na realidade, as amostras são geralmente tão grandes que o uso de  $N$  ou  $N - 1$  no denominador não exerce praticamente efeito algum sobre o cálculo da variância.

#### Slowpoke:

$$\frac{0,000025 + 0,021025 + 0,030625 + 0,001225}{4} = 0,013225$$

Portanto, a variância de Supertech é 0,066875, e a variância de Slowpoke é 0,013225.

5. Calcular o desvio-padrão tirando a raiz quadrada da variância:

#### Supertech:

$$\sqrt{0,066875} = 0,2586 = 25,86\%$$

#### Slowpoke:

$$\sqrt{0,013225} = 0,1150 = 11,50\%$$

Algebricamente, a fórmula da variância pode ser assim enunciada:

$$\text{Var}(R) = \text{Valor esperado de } (R - \bar{R})^2$$

onde  $\bar{R}$  é o retorno esperado do título e  $R$  é o retorno efetivo.

Um exame do cálculo da variância realizado em quatro etapas deixa claro por que se trata de uma medida da dispersão dos retornos. Para cada observação, eleva-se o quadrado da diferença entre o retorno efetivo e o retorno esperado. A seguir, tira-se a média desses quadrados de diferenças. O cálculo dos quadrados torna todas as diferenças positivas. Se usássemos as diferenças entre cada retorno e o retorno esperado, e aí calculássemos a média dessas diferenças, obteríamos resultado igual a zero, porque os retornos superiores à média cancelariam os retornos inferiores à média.

Entretanto, como a variância ainda é medida em quadrados, sua interpretação torna-se difícil. O desvio-padrão possui uma interpretação muito mais simples, apresentada na Seção 9.5. O desvio-padrão é simplesmente a raiz quadrada da variância. A fórmula geral do desvio-padrão é

$$\text{DP}(R) = \sqrt{\text{Var}(R)}$$

## Covariância e correlação

A variância e o desvio-padrão medem a variabilidade de ações individuais. Desejamos agora medir a relação entre a taxa de retorno de uma ação e a taxa de retorno de outra ação. Para tornar nossa discussão mais precisa, necessitamos de uma medida estatística da associação entre duas variáveis. É aqui que entram em cena a **covariância** e a **correlação**.

A covariância e a correlação medem a intensidade com a qual duas variáveis estão associadas. Explicamos

■ **TABELA 10.1** Cálculo de variância e desvio-padrão.

| (1)<br>Estado da<br>economia                 | (2)<br>Taxa de<br>retorno | (3)<br>Diferença em relação<br>ao retorno esperado | (4)<br>Quadrado da<br>diferença     |
|----------------------------------------------|---------------------------|----------------------------------------------------|-------------------------------------|
| <b>Supertech* (Retorno esperado = 0,175)</b> |                           |                                                    |                                     |
|                                              | $R_{At}$                  | $(R_{At} - \bar{R}_A)$                             | $(R_{At} - \bar{R}_A)^2$            |
| Depressão                                    | -0,20                     | -0,375 (= -0,20 - 0,175)                           | 0,140625 [= (-0,375) <sup>2</sup> ] |
| Recessão                                     | 0,10                      | -0,075                                             | 0,005625                            |
| Normal                                       | 0,30                      | 0,125                                              | 0,015625                            |
| Expansão                                     | 0,50                      | 0,325                                              | 0,105625                            |
|                                              |                           |                                                    | 0,267500                            |
| <b>Slowpoke** (Retorno esperado = 0,055)</b> |                           |                                                    |                                     |
|                                              | $R_{Bt}$                  | $(R_{Bt} - \bar{R}_B)$                             | $(R_{Bt} - \bar{R}_B)^2$            |
| Depressão                                    | 0,05                      | -0,005 (= 0,05 - 0,055)                            | 0,000025 [= (-0,005) <sup>2</sup> ] |
| Recessão                                     | 0,20                      | 0,145                                              | 0,021025                            |
| Normal                                       | -0,12                     | -0,175                                             | 0,030625                            |
| Expansão                                     | 0,09                      | 0,035                                              | 0,001225                            |
|                                              |                           |                                                    | 0,052900                            |

$$* \bar{R}_A = \frac{-0,20 + 0,10 + 0,30 + 0,50}{4} = 0,175 = 17,5\%$$

$$\text{Var}(R_A) = \sigma_A^2 = \frac{0,2675}{4} = 0,066875$$

$$\text{DP}(R_A) = \sigma_A = \sqrt{0,066875} = 0,2586 = 25,86\%$$

$$** \bar{R}_B = \frac{0,05 + 0,20 - 0,12 + 0,09}{4} = 0,055 = 5,5\%$$

$$\text{Var}(R_B) = \sigma_B^2 = \frac{0,0529}{4} = 0,013225$$

$$\text{DP}(R_B) = \sigma_B = \sqrt{0,013225} = 0,1150 = 11,50\%$$

os dois termos estendendo o exemplo da Supertech e da Slowpoke, apresentado anteriormente neste capítulo.

#### ■ EXEMPLO

Já determinamos os retornos esperados e os desvios-padrão das ações da Supertech e da Slowpoke. (Os retornos esperados são iguais a 0,175 e 0,055 para a Supertech e a Slowpoke, respectivamente. Os desvios-padrão são iguais a 0,2586 e 0,1150, respectivamente.) Além disso, calculamos a diferença entre cada retorno possível e o retorno esperado de cada empresa. A partir desses dados, a covariância pode ser determinada em duas etapas. Uma etapa adicional se faz necessária para o cálculo da correlação.

1. Para cada estado da economia, multiplicamos a diferença obtida em relação ao retorno esperado da Supertech pela diferença

correspondente no caso da Slowpoke. Por exemplo, em caso de depressão, o retorno da Supertech seria igual a -0,20, ou seja, está a -0,375 (-0,20 - 0,175) de seu retorno esperado. A taxa de retorno da Slowpoke, em caso de depressão, é igual a 0,05, o que está a -0,005 (0,05 - 0,055) de seu retorno esperado. Multiplicando as duas diferenças, obtemos 0,001875 [(-0,375) × (-0,005)]. Os cálculos completos são apresentados na última coluna da Tabela 10.2. Esse procedimento pode ser algebricamente representado do seguinte modo:

$$(R_{At} - \bar{R}_A) \times (R_{Bt} - \bar{R}_B) \quad (10.1)$$

onde  $R_{At}$  e  $R_{Bt}$  são os retornos de Supertech e Slowpoke no estado  $t$ , e  $\bar{R}_A$  e  $\bar{R}_B$  são os retornos esperados dos dois títulos.

■ **TABELA 10.2** Cálculo de covariância e correlação.

| Estado da economia | Taxa de retorno da Supertech<br>$R_{At}$ | Diferença em relação ao retorno esperado<br>$(R_{At} - \bar{R}_A)$ | Taxa de retorno da Slowpoke<br>$R_{Bt}$ | Diferença em relação ao retorno esperado<br>$(R_{Bt} - \bar{R}_B)$ | Produto das diferenças<br>$(R_{At} - \bar{R}_A) \times (R_{Bt} - \bar{R}_B)$ |
|--------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
|                    |                                          | (Retorno esperado = 0,175)                                         |                                         | (Retorno esperado = 0,055)                                         |                                                                              |
| Depressão          | -0,20                                    | -0,375 (= -0,20 - 0,175)                                           | 0,05                                    | -0,005 (= 0,05 - 0,055)                                            | 0,001875<br>(= -0,375 × -0,005)                                              |
| Recessão           | 0,10                                     | -0,075                                                             | 0,20                                    | 0,145                                                              | -0,010875<br>(= -0,075 × 0,145)                                              |
| Normal             | 0,30                                     | 0,125                                                              | -0,12                                   | -0,175                                                             | -0,021875<br>(= 0,125 × -0,175)                                              |
| Expansão           | 0,50                                     | 0,325                                                              | 0,09                                    | 0,035                                                              | 0,011375<br>(= 0,325 × 0,035)                                                |
|                    | 0,70                                     |                                                                    | 0,22                                    |                                                                    | -0,0195                                                                      |

$$\sigma_{AB} = \text{Cov}(R_A, R_B) = \frac{-0,0195}{4} = -0,004875$$

$$\rho_{AB} = \text{Corr}(R_A, R_B) = \frac{\text{Cov}(R_A, R_B)}{\text{DP}(R_A) \times \text{DP}(R_B)} = \frac{-0,004875}{0,2586 \times 0,1150} = -0,1639$$

2. Calculamos a média para os quatro estados na última coluna. Essa média nada mais é do que a covariância. Ou seja,<sup>2</sup>

$$\sigma_{AB} = \text{Cov}(R_A, R_B) = \frac{-0,0195}{4} = -0,004875$$

Note que representamos a covariância entre Supertech e Slowpoke como  $\text{Cov}(R_A, R_B)$  ou  $\sigma_{AB}$ . A equação (10.1) mostra qual é a intuição por trás da covariância. Suponhamos que a taxa de retorno da Supertech geralmente seja superior a sua média quando a da Slowpoke também é superior a sua média, e que o retorno da Supertech esteja abaixo de sua média quando o da Slowpoke também está abaixo de sua média. Isso indicaria uma dependência positiva ou associação positiva entre os retornos das duas ações. Note que a expressão apresentada na equação (10.1) será *positiva* em qualquer estado no qual ambos os termos estiverem *acima* de suas médias. Além disso, (10.1) será *positiva* em qualquer estado no qual ambos os termos estejam *abaixo* de suas médias. Portanto, uma relação positiva entre os dois retornos dará origem a um valor positivo para a covariância.

Inversamente, suponhamos que a taxa de retorno de Supertech esteja geralmente acima de sua média quando a taxa de retorno de Slowpoke está abaixo de sua

média, e que a taxa de retorno de Supertech está geralmente abaixo de sua média quando a de Slowpoke está acima de sua média. Isso denuncia uma dependência ou relação negativa entre as duas taxas de retorno. Note que a expressão da equação (10.1) será *negativa* em qualquer estado no qual um retorno está acima de sua média e o outro está abaixo de sua média. Portanto, uma relação negativa entre os dois retornos dará origem a um valor negativo para a covariância.

Finalmente, suponhamos que não haja relação entre as duas taxas de retorno. Nesse caso, saber se o retorno de Supertech está acima ou abaixo de seu valor esperado nada nos diz a respeito do retorno de Slowpoke. Na fórmula da covariância, portanto, não haverá tendência para que os termos sejam positivos ou negativos, e em média tenderão a se contrabalançar e anular. Isso fará com que a covariância seja igual a zero.

Evidentemente, mesmo que os dois retornos não tenham qualquer relação um com o outro, a fórmula da covariância não produzirá resultado exatamente igual a zero em qualquer série histórica específica. Isso deve-se a erro de amostragem; o mero caráter aleatório da série fará com que o resultado seja positivo ou negativo. No entanto, numa amostra histórica suficientemente longa, se os dois retornos não estiverem relacionados, devemos esperar que o resultado seja próximo de zero.

A fórmula da covariância parece captar o que estamos buscando. Se houver relação direta entre os dois retornos, sua covariância será positiva, e se houver relação inversa, a covariância será negativa. Por último, também é importante notar que, se não houver relação entre eles, a covariância deverá ser nula.

<sup>2</sup> Tal como no caso da variância, dividimos por  $N$  (4, neste exemplo) porque os quatro estados dão origem a quatro resultados possíveis. Entretanto, se tivéssemos usados dados passados, o divisor correto seria  $N - 1$  (3, neste exemplo).

A fórmula da covariância pode ser apresentada algebricamente:

$$\sigma_{AB} = \text{Cov}(R_A, R_B) = \text{Valor esperado de } [(R_A - \bar{R}_A) \times (R_B - \bar{R}_B)]$$

onde  $\bar{R}_A$  e  $\bar{R}_B$  são os retornos esperados dos dois títulos e  $R_A$  e  $R_B$  são os retornos efetivos. A ordem das duas variáveis não é importante. Ou seja, a covariância de A com B é igual à covariância de B com A. Isso pode ser expresso mais formalmente, ou seja:  $\text{Cov}(R_A, R_B) = \text{Cov}(R_B, R_A)$ , ou  $\sigma_{AB} = \sigma_{BA}$ .

A covariância que calculamos é igual a -0,004875. Um número negativo como esse pressupõe que o retorno de uma ação tende a estar acima de sua média quando o retorno da outra ação está abaixo de sua média, e vice-versa. Entretanto, é difícil interpretar o valor numérico. Tal como o valor da variância, a covariância é medida em quadrados de diferenças. A menos que possamos colocá-la em alguma perspectiva, não saberemos o que fazer com ela.

Esse problema é resolvido com o cálculo da correlação:

3. Para calcular a correlação, divide-se a covariância pelos desvios-padrão dos retornos dos dois títulos. Em nosso exemplo, temos:

$$\begin{aligned} \rho_{AB} = \text{Corr}(R_A, R_B) &= \frac{\text{Cov}(R_A, R_B)}{\sigma_A \times \sigma_B} \\ &= \frac{-0,004875}{0,2586 \times 0,1150} = -0,1639 \end{aligned} \quad (10.2)$$

onde  $\sigma_A$  e  $\sigma_B$  são os desvios-padrão dos retornos de Supertech e Slowpoke, respectivamente. Note que representamos a correlação entre Supertech e Slowpoke com os símbolos  $\text{Corr}(R_A, R_B)$  ou  $\rho_{AB}$ . Tal como no caso da covariância, a ordem das duas variáveis é irrelevante. Ou seja, a correlação de A com B é igual à correlação entre B e A. Mais formalmente,  $\text{Corr}(R_A, R_B) = \text{Corr}(R_B, R_A)$ , ou  $\rho_{AB} = \rho_{BA}$ .

Como o desvio-padrão é sempre positivo, o sinal da correlação entre duas variáveis deve sempre ser o mesmo da covariância entre as duas variáveis. Se a correlação for positiva, dizemos que as variáveis são *positivamente correlacionadas*; se for negativa, dizemos que são *negativamente correlacionadas*; e se for igual a zero, dizemos que são *não correlacionadas*. Além disso, pode ser demonstrado que a correlação sempre está entre +1 e -1. Isso se deve ao procedimento de padronização, ou seja, à divisão pelos dois desvios-padrão.

Podemos comparar as correlações entre *pares* distintos de títulos. Por exemplo, a correlação entre os retornos de General Motors e Ford é muito mais alta do que a correlação entre os retornos de General Motors e IBM. Portanto, podemos afirmar que o primeiro par de títulos apresenta associação mais forte do que o segundo par.

A Figura 10.1 mostra os três casos básicos para dois ativos, A e B. A figura apresenta dois ativos cujos retornos têm correlações iguais a +1, -1 e 0. Isso quer dizer o mesmo que correlação positiva perfeita, correlação negativa perfeita e inexistência de correlação, respectivamente. Os gráficos na figura mostram a evolução separada dos retornos dos dois títulos no tempo.

### 10.3 RETORNO E RISCO DE CARTEIRAS

Suponhamos que um investidor possua estimativas dos retornos esperados e desvios-padrão de títulos isolados e das correlações entre os retornos dos títulos. De que maneira o investidor seleciona a melhor combinação ou **carteira** de títulos para fins de aplicação? Obviamente, o investidor gostaria de escolher uma carteira com um retorno esperado alto e um desvio-padrão baixo. Portanto, vale a pena considerar:

1. A relação entre o retorno esperado de títulos isolados e o retorno esperado de uma carteira formada por esses títulos.
2. A relação entre os desvios-padrão dos retornos de títulos isolados, as correlações entre os retornos desses títulos e o desvio-padrão do retorno de uma carteira formada por esses títulos.

#### Exemplo de Supertech e Slowpoke

Para analisar as duas relações anteriores usaremos o mesmo exemplo de Supertech e Slowpoke que foi apresentado anteriormente. Os cálculos relevantes são os seguintes.

#### Retorno esperado de uma carteira

A fórmula do retorno esperado de uma carteira é bastante simples:

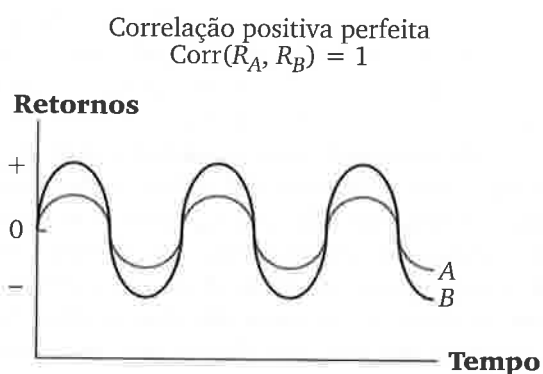
O retorno esperado de uma carteira é simplesmente uma média ponderada dos retornos esperados dos títulos que a compõem.

#### ■ EXEMPLO

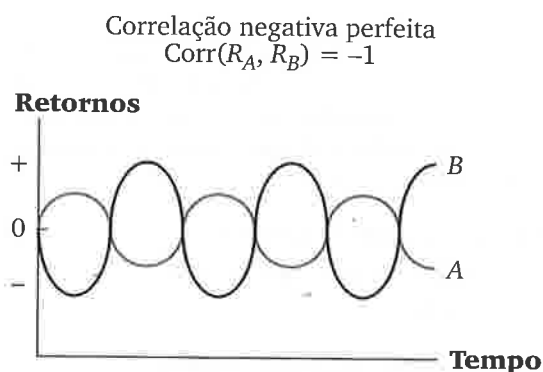
Consideremos o caso da Supertech e da Slowpoke. Com base no quadro anterior, vemos que os retornos esperados desses dois títulos são 17,5% e 5,5%, respectivamente.

O retorno esperado de uma carteira formada apenas por esses dois títulos pode ser assim representado:

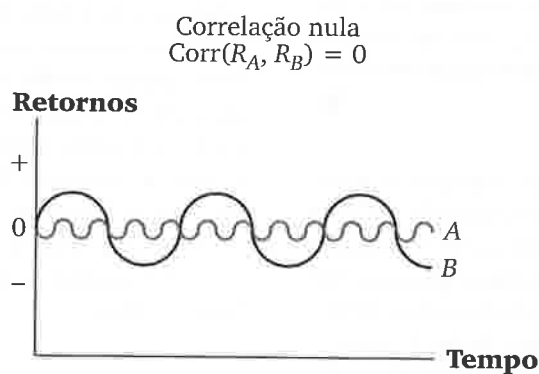
■ **FIGURA 10.1** Exemplos de coeficientes de correlação diferentes – os gráficos na figura mostram separadamente a evolução dos retornos dos dois títulos no tempo.



Os retornos dos títulos A e B são superiores à média ao mesmo tempo. Ambos são inferiores à média ao mesmo tempo.



O título A possui retorno superior à média quando o título B possui retorno inferior à média, e vice-versa.



O retorno do título A é completamente independente do retorno do título B.

### Dados relevantes do exemplo da Supertech e da Slowpoke

| Item                                   | Símbolo                      | Valor           |
|----------------------------------------|------------------------------|-----------------|
| Retorno esperado de Supertech          | $\bar{R}_{\text{Super}}$     | 0,175 = 17,5%   |
| Retorno esperado de Slowpoke           | $\bar{R}_{\text{Slow}}$      | 0,055 = 5,5%    |
| Variância de Supertech                 | $\sigma_{\text{Super}}^2$    | 0,066875        |
| Variância de Slowpoke                  | $\sigma_{\text{Slow}}^2$     | 0,013225        |
| Desvio-padrão de Supertech             | $\sigma_{\text{Super}}$      | 0,2586 = 25,86% |
| Desvio-padrão de Slowpoke              | $\sigma_{\text{Slow}}$       | 0,1150 = 11,50% |
| Covariância entre Supertech e Slowpoke | $\sigma_{\text{Super,Slow}}$ | -0,004875       |
| Correlação entre Supertech e Slowpoke  | $\rho_{\text{Super,Slow}}$   | -0,1639         |

$$\begin{aligned}\text{Retorno esperado da carteira} &= \\ &= X_{\text{Super}} (17,5\%) + X_{\text{Slow}} (5,5\%) \\ &= \bar{R}_p\end{aligned}$$

onde  $X_{\text{Super}}$  é a porcentagem da carteira aplicada em Supertech e  $X_{\text{Slow}}$  é a porcentagem aplicada em Slowpoke. Se um investidor que possuir \$ 100 aplicar \$ 60 em Supertech e \$ 40 em Slowpoke, o retorno esperado da carteira será

$$\begin{aligned}\text{Retorno esperado da carteira} &= \\ &= 0,6 \times 17,5\% + 0,4 \times 5,5\% \\ &= 12,7\%\end{aligned}$$

Algebricamente, podemos escrever

$$\text{Retorno esperado da carteira} = X_A \bar{R}_A + X_B \bar{R}_B = \bar{R}_p \quad (10.3)$$

onde  $X_A$  e  $X_B$  são as proporções dos ativos A e B na carteira, respectivamente. (Como nosso investidor só pode aplicar em dois títulos,  $X_A + X_B$  deve ser igual a 1, ou 100%.)  $\bar{R}_A$  e  $\bar{R}_B$  são os retornos esperados dos dois títulos. ■

Consideremos agora duas ações, ambas com retorno esperado igual a 10%. O retorno esperado de uma carteira composta por essas duas ações deve ser igual a 10%, independentemente das proporções aplicadas nas ações. Esse resultado pode parecer óbvio a esta altura, mas se tornará muito importante mais tarde. O resultado significa que não se reduz ou *dissipa* o retorno esperado aplicando-se numa série de títulos. Ao contrário, o retorno esperado de sua carteira é simplesmente uma média ponderada dos retornos esperados dos títulos que fazem parte da carteira.

### Variância e desvio-padrão de uma carteira

**Variância.** A fórmula da variância de uma carteira formada por dois títulos, A e B, é

**Variância da carteira:**

$$\text{Var}(\text{carteira}) = X_A^2 \sigma_A^2 + 2X_A X_B \sigma_{A,B} + X_B^2 \sigma_B^2$$

Note que há três termos no lado direito da equação. O primeiro termo envolve a variância de A ( $\sigma_A^2$ ), o segundo termo envolve a covariância entre os dois títulos ( $\sigma_{A,B}$ ), e o terceiro contém a variância de B ( $\sigma_B^2$ ). (Deve ser lembrado que  $\sigma_{A,B} = \sigma_{B,A}$ . Ou seja, que a ordem das variáveis não é relevante ao se expressar a covariância entre os retornos de dois títulos.)

A fórmula indica um ponto importante. A variância de uma carteira depende das variâncias dos retornos dos títulos individuais e da covariância entre os retornos dos dois títulos. A variância de um título mede a variabilidade dos retornos desse título. A covariância mede a associação entre os retornos dos dois títulos. Dadas as variâncias dos retornos dos títulos, uma relação ou covariância positiva entre os retornos dos dois títulos aumenta a variância de toda a carteira. Uma relação ou covariância negativa entre os retornos dos dois títulos reduz a variância da carteira. Esse resultado importante parece ser confirmado pelo senso comum. Se um de seus títulos tende a valorizar-se quando o outro se desvaloriza, ou vice-versa, os desempenhos de seus dois títulos estão compensando um ao outro. Você estará conseguindo o que se chama de *hedge* em finanças, e o risco de sua carteira tenderá a ser pequeno. Entretanto, se ambos os títulos se valorizarem ou desvalorizarem em conjunto, não estará havendo essa redução de risco. Portanto, o risco de sua carteira será mais alto.

A fórmula da variância para nossos dois títulos, Super e Slow, é

$$\text{Var}(\text{carteira}) = X_{\text{Super}}^2 \sigma_{\text{Super}}^2 + 2X_{\text{Super}} X_{\text{Slow}} \sigma_{\text{Super,Slow}} + X_{\text{Slow}}^2 \sigma_{\text{Slow}}^2 \quad (10.4)$$

Dada nossa suposição anterior de que um indivíduo com \$ 100 disponíveis investe \$ 60 em Supertech e \$ 40 em Slowpoke,  $X_{\text{Super}} = 0,6$  e  $X_{\text{Slow}} = 0,4$ . Usando essa suposição e os dados relevantes contidos no quadro anterior, a variância do retorno da carteira é

$$\begin{aligned}0,023851 &= 0,36 \times 0,066875 + 2 \times [0,6 \times 0,4 \times \\ &\quad (-0,004875)] + 0,16 \times 0,013225 \quad (10.4')\end{aligned}$$

**Enfoque matricial.** Alternativamente, a equação (10.4) pode ser escrita no seguinte formato matricial:

|           | Supertech                                                                                                       | Slowpoke                                                                                                        |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Supertech | $X_{\text{Super}}^2 \sigma_{\text{Super}}^2$<br>$0,024075 = 0,36 \times 0,066875$                               | $X_{\text{Super}} X_{\text{Slow}} \sigma_{\text{Super,Slow}}$<br>$-0,00117 = 0,6 \times 0,4 \times (-0,004875)$ |
| Slowpoke  | $X_{\text{Super}} X_{\text{Slow}} \sigma_{\text{Super,Slow}}$<br>$-0,00117 = 0,6 \times 0,4 \times (-0,004875)$ | $X_{\text{Slow}}^2 \sigma_{\text{Slow}}^2$<br>$0,002116 = 0,16 \times 0,013225$                                 |

Há quatro células na matriz. Podemos somar os termos contidos nas células, obtendo a equação (10.4), ou seja, a variância de uma carteira de dois títulos. O termo no canto superior esquerdo envolve a variância de Supertech. O termo no canto inferior direito envolve a variância de Slowpoke. As outras duas células contêm o termo envolvendo a covariância. Essas duas células são idênticas, indicando por que a covariância é multiplicada por 2 na equação (10.4).

A esta altura, os alunos costumam achar o enfoque matricial mais confuso do que a equação (10.4). Entretanto, esse enfoque pode ser facilmente generalizado para mais de dois títulos, uma tarefa que cumprimos mais adiante neste capítulo.

**Desvio-padrão de uma carteira.** Dada a expressão (10.4), podemos agora determinar o desvio-padrão do retorno da carteira, ou seja

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \text{DP}(\text{carteira}) = \sqrt{\text{Var}(\text{carteira})} \quad (10.5) \\ &= \sqrt{0,023851} = 0,1544 \\ &= 15,44\%\end{aligned}$$

A interpretação do desvio-padrão da carteira é idêntica à interpretação do desvio-padrão do retorno de um título isolado. O retorno esperado de nossa carteira é 12,7%. Um retorno de -2,74% (12,7% - 15,44%) está um desvio-padrão abaixo da média, e um retorno de 28,14% (12,7% + 15,44%) está um desvio-padrão acima da média. Se a taxa de retorno da carteira tiver distribuição normal, um retorno entre -2,74% e +28,14% ocorrerá cerca de 68% das vezes.<sup>3</sup>

**Efeito diversificação.** É instrutivo comparar o desvio-padrão do retorno da carteira ao desvio-padrão dos retornos dos títulos individuais. A média ponderada dos desvios dos títulos individuais é

$$\begin{aligned}\text{Média ponderada} \\ \text{dos desvios-padrão} &= X_{\text{Super}} \sigma_{\text{Super}} + X_{\text{Slow}} \sigma_{\text{Slow}} \quad (10.6) \\ 0,2012 &= 0,6 \times 0,2586 + 0,4 \times 0,115\end{aligned}$$

<sup>3</sup> Existem apenas quatro retornos igualmente prováveis para a Supertech e a Slowpoke, de modo que nenhum dos títulos tem retornos com distribuição normal. Portanto, as probabilidades seriam um pouco diferentes em nosso exemplo.

Um dos resultados mais importantes deste capítulo está relacionado à diferença entre (10.5) e (10.6). Em nosso exemplo, o desvio-padrão do retorno da carteira é *menor* do que a média ponderada dos desvios dos títulos isolados.

Assinalamos anteriormente que o retorno esperado de uma carteira é uma média ponderada dos retornos esperados dos títulos individuais. Portanto, obtemos um tipo diferente de resultado, no caso do desvio-padrão de uma carteira, do que foi conseguido para o retorno esperado de uma carteira.

É argumentado, em geral, que nosso resultado para o desvio-padrão é devido à diversificação. Por exemplo, a correlação entre Supertech e Slowpoke é ligeiramente negativa ( $\rho = -0,1639$ ). O retorno de Supertech tende a ficar um pouco abaixo da média, quando o de Slowpoke está acima de sua média. De maneira análoga, o retorno de Supertech tende a ficar um pouco acima da média, quando o de Slowpoke fica abaixo de sua média. Portanto, o desvio-padrão do retorno de uma carteira formada por dois títulos é inferior à média ponderada dos desvios-padrão dos retornos dos dois títulos.

No exemplo anterior, a correlação é negativa. Claramente, o benefício resultante da diversificação será menor se houver correlação positiva entre os retornos dos títulos. Quão elevada precisaria ser a correlação positiva para que os benefícios da diversificação desaparecessem completamente?

Para responder a essa pergunta, iremos reescrever a equação (10.4) em termos de correlação, e não de covariância. A covariância pode ser representada do seguinte modo:<sup>4</sup>

$$\sigma_{\text{Super,Slow}} = \rho_{\text{Super,Slow}} \sigma_{\text{Super}} \sigma_{\text{Slow}} \quad (10.7)$$

A fórmula diz que a covariância entre os retornos de dois títulos é simplesmente a correlação multiplicada pelos desvios-padrão dos dois títulos. Em outras palavras, a covariância incorpora tanto (1) a correlação entre os dois ativos quanto (2) a variabilidade de cada um dos títulos, tal como medida pelo desvio-padrão.

<sup>4</sup> Tal como ocorre com a covariância, a ordem dos dois títulos não é relevante quando tratamos da correlação entre os retornos dos dois títulos. Ou seja,  $\rho_{\text{Super,Slow}} = \rho_{\text{Slow,Super}}$ .

Em vista de nossos cálculos anteriores neste capítulo, sabemos que o coeficiente de correlação entre os dois títulos é igual a  $-0,1639$ . Dadas as variâncias utilizadas na equação (10.4'), os desvios são iguais a  $0,2586$  e  $0,115$  para Supertech e Slowpoke, respectivamente. Portanto, a variância do retorno de uma carteira pode ser escrita do seguinte modo:

#### Variância do retorno da carteira

$$= X_{\text{Super}}^2 \sigma_{\text{Super}}^2 + 2X_{\text{Super}}X_{\text{Slow}}\rho_{\text{Super,Slow}}\sigma_{\text{Super}}\sigma_{\text{Slow}} + X_{\text{Slow}}^2 \sigma_{\text{Slow}}^2 \quad (10.8)$$

$$0,023851 = 0,36 \times 0,066875 + 2 \times 0,6 \times 0,4 \times (-0,1639) \times 0,2586 \times 0,115 + 0,16 \times 0,013225$$

O termo do meio, no lado direito, é agora escrito em termos da correlação,  $\rho$ , e não mais da covariância.

Suponhamos  $\rho_{\text{Super,Slow}} = 1$ , o mais alto valor possível para o coeficiente de correlação. Imaginemos que todos os demais parâmetros no exemplo sejam os mesmos. A variância da carteira passará a ser

$$\begin{aligned} \text{Variância} \\ \text{do retorno} &= 0,040466 \\ \text{da carteira} \end{aligned}$$

$$= 0,36 \times 0,066875 + 2 \times (0,6 \times 0,4 \times 1 \times 0,2586 \times 0,115) + 0,16 \times 0,013225$$

O desvio-padrão é

$$\begin{aligned} \text{Desvio-padrão} \\ \text{do retorno} &= \sqrt{0,040466} = 0,2012 \quad (10.9) \\ \text{da carteira} &= 20,12\% \end{aligned}$$

Note que (10.9) e (10.6) são iguais. Ou seja, o desvio-padrão do retorno de uma carteira é igual à média ponderada dos desvios dos retornos individuais quando  $\rho = 1$ . Uma análise de (10.8) indica que a variância e, portanto, o desvio-padrão da carteira devem diminuir à medida que a correlação cai abaixo de 1. Isso nos leva a:

Desde que  $\rho < 1$ , o desvio-padrão do retorno de uma carteira de dois títulos será *menor* do que a média ponderada dos desvios-padrão dos retornos dos títulos individuais.

Em outras palavras, o efeito de diversificação atua desde que haja correlação menos do que perfeita (desde que  $\rho < 1$ ). Portanto, nosso exemplo Supertech-Slowpoke é, na verdade, uma situação exagerada. Ilustramos a diversificação por meio de um exemplo com correlação negativa. Poderíamos ter feito a mesma ilustração usan-

■ **TABELA 10.3** Desvios-padrão do índice Standard & Poor's 500 e de algumas ações componentes do índice.

| Ativo                       | Desvio-padrão (%) |
|-----------------------------|-------------------|
| Índice S&P 500              | 15,02             |
| Bell Atlantic               | 18,73             |
| Chrysler Corp.              | 37,70             |
| Coca-Cola Co.               | 20,02             |
| Walt Disney Co.             | 28,33             |
| General-Electric            | 21,21             |
| IBM                         | 25,00             |
| McDonald's Corp.            | 21,78             |
| Sears, Roebuck & Co.        | 26,88             |
| Toys "R" Us Inc.            | 28,48             |
| Westinghouse Electric Corp. | 28,83             |

Desde que a correlação entre pares de títulos seja menor do que 1, o desvio-padrão de um índice é menor do que a média ponderada dos desvios-padrão dos retornos dos títulos que o compõem.

do um exemplo de correlação positiva – desde que não fosse positiva e perfeita.

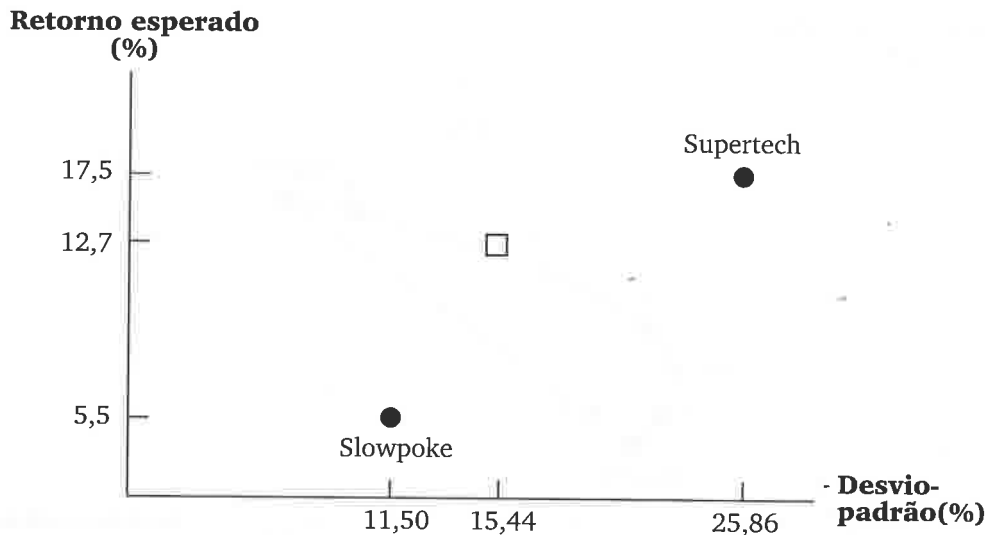
**Extensão a muitos ativos.** A constatação anterior pode ser estendida ao caso de vários ativos. Ou seja, desde que as correlações entre pares de títulos sejam inferiores a 1, o desvio-padrão do retorno de uma carteira formada por muitos ativos será menor do que a média ponderada dos desvios dos títulos individuais.

Consideremos agora a Tabela 10.3, que mostra o desvio-padrão do retorno do Índice Standard & Poor's 500 e os desvios de alguns dos títulos que o compõem, medidos num período recente de 10 anos. Note que todos os títulos individuais na tabela possuem desvio-padrão superior ao do índice. Em geral, os desvios-padrão dos retornos da maioria dos títulos que compõem o índice estarão acima do desvio-padrão do índice propriamente dito, embora alguns títulos possam ter desvios menores do que o do índice.

#### ? QUESTÕES CONCEITUAIS

- Quais são as fórmulas do retorno esperado, da variância e do desvio-padrão do retorno de uma carteira de dois ativos?
- Que é o efeito de diversificação?
- Quais são os valores máximo e mínimo possíveis do coeficiente de correlação?

■ **FIGURA 10.2** Retorno esperado e desvio-padrão de Supertech, Slowpoke e uma carteira formada por 60% de Supertech e 40% de Slowpoke.



#### 10.4 CONJUNTO EFICIENTE DE DOIS ATIVOS

Nossos resultados a respeito de retornos esperados e desvios-padrão são representados na Figura 10.2. Na figura, vemos um ponto com o rótulo Slowpoke e um outro ponto com o nome Supertech. Cada ponto representa o retorno esperado e o desvio-padrão de um título isolado. Como pode ser visto, a Supertech possui, ao mesmo tempo, maior retorno esperado e maior desvio-padrão.

O quadro ("□") no gráfico indica uma carteira com 60% aplicados na Supertech e 40% aplicados na Slowpoke. Recorde que calculamos anteriormente o retorno esperado e o desvio-padrão da taxa de retorno dessa carteira.

A opção de aplicar 60% em Supertech e 40% em Slowpoke é apenas uma de muitas carteiras que podem ser criadas. O conjunto de carteiras é indicado pela linha curva na Figura 10.3.

Consideremos a carteira 1. Essa é uma carteira com 90% aplicados em Slowpoke e 10% em Supertech. Como sua composição é tão pesada em termos de Slowpoke, o ponto correspondente está bastante próximo dessa ação no gráfico. A carteira 2 situa-se num ponto mais alto da curva porque é composta por 50% de Supertech e 50% de Slowpoke. A carteira 3 está próxima do ponto que representa Supertech, no gráfico, porque é composta por 90% de Supertech e 10% de Slowpoke.

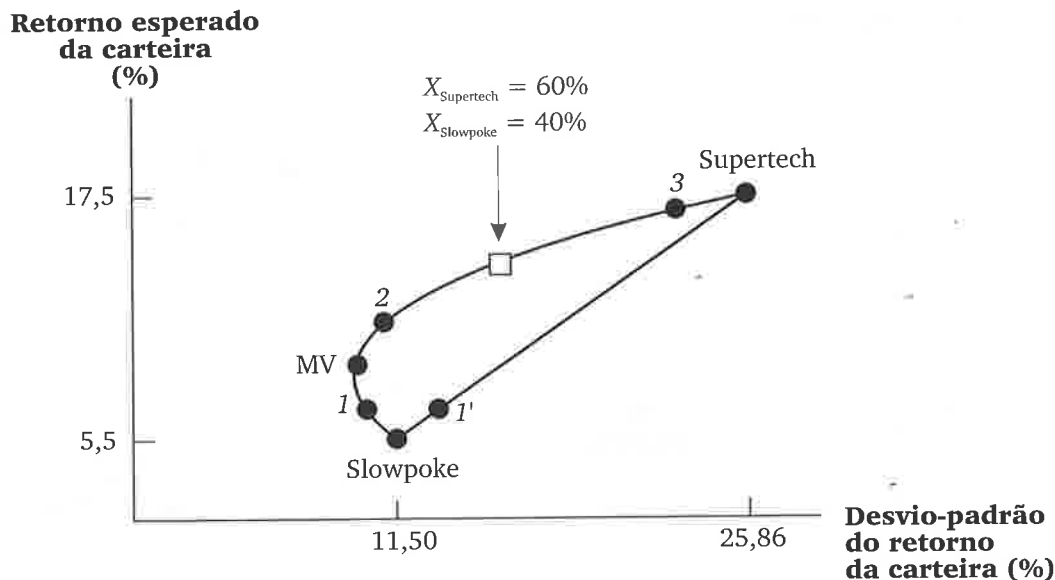
Algumas observações importantes devem ser feitas a propósito desse gráfico.

1. Argumentamos que o efeito de diversificação surge sempre que a correlação entre os retornos dos dois títulos é menor do que 1. A correlação entre Supertech e Slowpoke é igual a  $-0,1639$ . O efeito de diversificação pode ser ilustrado mediante uma comparação com a linha reta ligando os pontos que representam Supertech e Slowpoke. A linha reta representa o conjunto de pontos que seriam gerados caso o coeficiente de correlação entre os dois títulos fosse igual a 1. O efeito de diversificação é mostrado na figura, pois a linha curva está sempre à esquerda da linha reta. Considere-se o ponto 1'. Esse ponto representaria uma carteira formada com 90% de Slowpoke e 10% de Supertech, se a correlação entre os retornos das duas ações fosse igual a 1. Dissemos que não há efeito de diversificação quando  $\rho = 1$ . Entretanto, o efeito de diversificação está na linha curva, porque o ponto 1 possui o mesmo retorno esperado que o ponto 1', mas também um desvio-padrão mais baixo. (Os pontos 2' e 3' são omitidos para reduzir a quantidade de informação presente na Figura 10.3.)

Embora a linha reta e a linha curva estejam presentes na Figura 10.3, elas não existem simultaneamente na prática. Ou  $\rho = -0,1639$ , e a curva existe, ou  $\rho = 1$  e o que vale é a linha reta. Em outras palavras, embora uma investidora possa optar entre pontos distintos da curva, caso  $\rho = -0,1639$ , ela não pode escolher entre pontos da curva e pontos situados na linha reta.

2. O ponto MV representa a carteira de mínima variância. Essa é a carteira com a menor variância possível. Por definição, ela também deve apresentar o menor desvio-padrão possível. (O termo *carteira de mínima variância* é comum na literatura, e também o usaremos neste livro. Talvez fosse melhor usar carteira de mínimo

■ **FIGURA 10.3** Conjunto de carteiras compostas por combinações de Supertech e Slowpoke (o coeficiente de correlação entre os retornos dos dois títulos é igual a  $-0,1639$ ).



A carteira 1 é formada por 90% de Slowpoke e 10% de Supertech ( $\rho = -0,1639$ ).  
 A carteira 2 é formada por 50% de Slowpoke e 50% de Supertech ( $\rho = -0,1639$ ).  
 A carteira 3 é formada por 10% de Slowpoke e 90% de Supertech ( $\rho = -0,1639$ ).  
 A carteira 1' é formada por 90% de Slowpoke e 10% de Supertech ( $\rho = 1$ ).  
 O ponto MV representa a carteira de mínima variância. Essa é a carteira com a menor variância possível. Por definição, essa carteira também deve apresentar o menor desvio-padrão possível.

desvio-padrão, porque medimos o desvio-padrão, e não a variância, no eixo horizontal da Figura 10.3.)

3. Um indivíduo que estiver considerando a possibilidade de aplicar numa carteira formada por Slowpoke e Supertech defronta-se com um **conjunto de oportunidades** ou **conjunto viável**, representado pela linha curva na Figura 10.3. Ou seja, ele pode atingir qualquer ponto da curva selecionando a combinação apropriada dos dois títulos. Não é capaz de alcançar qualquer ponto acima da curva, pois não pode aumentar as taxas de retorno dos títulos isolados, reduzir seus desvios-padrão ou diminuir o coeficiente de correlação entre os dois títulos. Tampouco pode alcançar pontos abaixo da curva, pois não pode reduzir os retornos dos títulos individuais, aumentar seus desvios-padrão ou aumentar o coeficiente de correlação. (Evidentemente, não desejaria alcançar pontos abaixo da curva, mesmo que pudesse fazê-lo.)

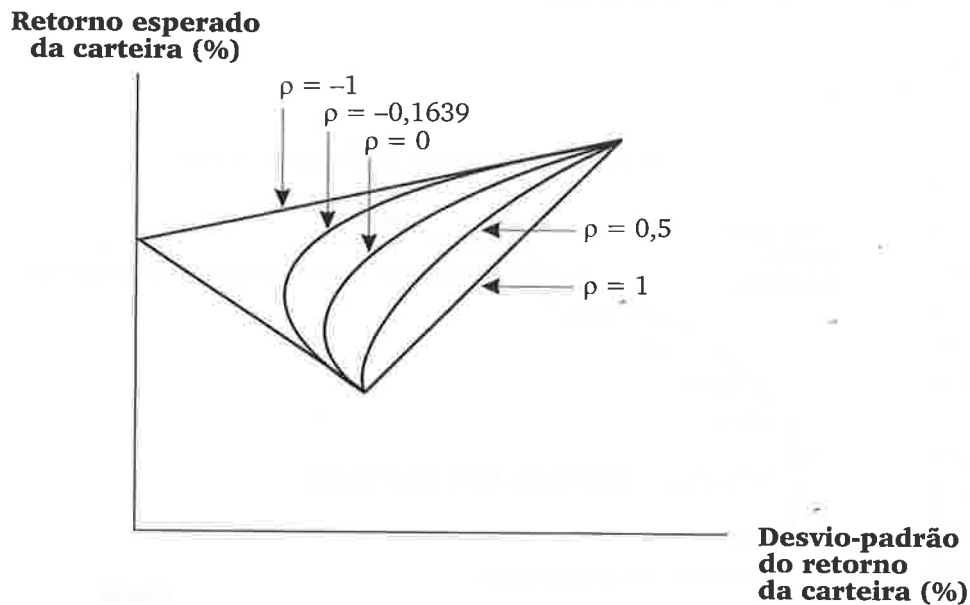
Se o investidor fosse relativamente tolerante em relação a risco, ele poderia escolher a carteira 3. (Na realidade, ele até poderia escolher o extremo superior, aplicando todo seu dinheiro em Supertech.) Um investidor com menor tolerância a risco poderia optar pelo ponto 2. Um investidor que desejasse minimizar risco escolheria MV, a carteira com mínima variância ou mínimo desvio-padrão.

4. Note que a curva tem um trecho inclinado para trás, entre Slowpoke e MV. Isso indica que, numa parte do conjunto viável, o desvio-padrão realmente diminui ao mesmo tempo em que se aumenta o retorno esperado. Os alunos freqüentemente perguntam: “como pode um aumento da proporção do ativo com mais risco, Supertech, levar a uma redução do risco da carteira?”

Esse resultado surpreendente é atribuível ao efeito de diversificação. Os retornos dos dois títulos são negativamente correlacionados. Um título tende a valorizar-se quando o outro cai, e vice-versa. Portanto, um pequeno acréscimo de Supertech atua como proteção contra o risco numa carteira composta apenas por Slowpoke. O risco da carteira diminui, gerando esse trecho da curva. Na verdade, tal comportamento sempre acontece quando  $\rho \leq 0$ . Pode acontecer ou não quando  $\sigma > 0$ . Evidentemente, a curva tem esse comportamento somente num pequeno trecho. À medida que aumentamos a proporção de Supertech na carteira, o maior desvio-padrão dessa ação eventualmente faz com que o desvio-padrão do retorno da carteira aumente.

5. Nenhum investidor desejaria possuir uma carteira com um retorno esperado inferior ao da carteira de mínima variância. Por exemplo, ninguém escolheria a carteira 1. Essa carteira possui retorno esperado menor e desvio-padrão maior do que a carteira de mínima

■ FIGURA 10.4 Conjuntos de oportunidades compostas por aplicações em Supertech e Slowpoke.



Cada curva corresponde a uma correlação diferente. Quanto menor a correlação, mais acentuada a curva

variância. Dizemos que carteiras como a carteira 1 são *dominadas* pela de mínima variância. Embora a curva inteira, de Slowpoke a Supertech, seja chamada de *conjunto viável*, os investidores consideram apenas a curva de MV a Supertech. Portanto, chamamos a curva de MV a Supertech de **conjunto eficiente** ou **fronteira eficiente**.

A Figura 10.3 representa o conjunto de oportunidades quando  $\rho = -0,1639$ . Vale a pena examinar a Figura 10.4, que mostra curvas diferentes em função de valores diversos do coeficiente de correlação. Como pode ser percebido, quanto menor o coeficiente de correlação, mais curvatura há na linha que representa o conjunto de carteiras. Isso indica que o efeito de diversificação acentua-se à medida que  $\rho$  diminui. A curvatura mais acentuada ocorre no caso extremo no qual  $\rho = -1$ . Esse é o caso de correlação negativa perfeita. Embora esse caso extremo no qual  $\rho = -1$  seja fascinante para os alunos, ele não tem quase nenhuma importância prática. Na maioria dos casos, há correlação positiva entre retornos de pares de títulos. É muito raro haver correlação negativa elevada, o que dirá correlação negativa perfeita.<sup>5</sup>

Note que há apenas um coeficiente de correlação para um par de títulos. Afirmamos anteriormente que a correlação entre Slowpoke e Supertech era igual a

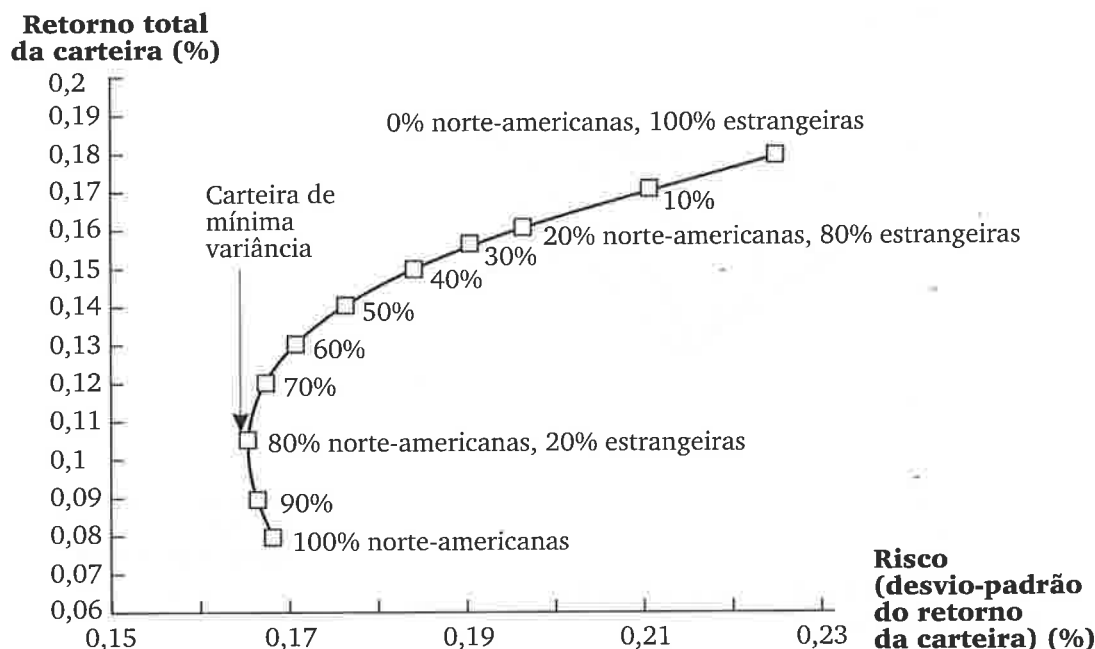
$-0,1639$ . Portanto, a curva que representa esse caso, na Figura 10.4, é a curva correta, e todas as outras devem ser vistas como simplesmente hipotéticas.

Os gráficos que examinamos não são meras curiosidades intelectuais. Ao contrário, conjuntos eficientes podem ser facilmente calculados na prática. Como foi mencionado anteriormente, dados de retornos, desvios-padrão e correlações são geralmente obtidos a partir de observações passadas, muito embora alguma subjetividade também possa ser usada para calcular os valores dessas estatísticas. Uma vez determinados os valores, há uma grande variedade de aplicativos que podem ser adquiridos para gerar um conjunto eficiente. Entretanto, a escolha da carteira preferida dentro do conjunto eficiente cabe ao investidor. Tal como no caso de outras decisões importantes, como o emprego a ser escolhido, a casa ou o carro a comprar, e quanto tempo gastar com esse curso, não há programa de computador que faça a escolha da melhor carteira.

Um conjunto eficiente pode ser gerado quando os próprios ativos individuais são eles mesmos carteiras. Por exemplo, na Figura 10.5, os dois ativos são uma carteira diversificada de ações de empresas norte-americanas e uma carteira diversificada de ações de empresas estrangeiras. Os retornos esperados, desvios-padrão e coeficientes de correlação foram calculados com base em dados históricos recentes. Nenhuma subjetividade foi utilizada na análise. A carteira de ações norte-americanas, com desvio-padrão de 0,173, é menos arriscada do que a carteira de ações estrangeiras, cujo desvio-padrão é

<sup>5</sup> Uma exceção importante ocorre no caso de derivativos. Por exemplo, a correlação entre uma ação e uma opção de venda dessa ação é fortemente negativa, em geral. As opções de venda serão analisadas mais adiante neste livro.

■ **FIGURA 10.5** Relação entre retorno e risco de ações no mercado internacional: carteiras de ações de empresas norte-americanas e estrangeiras.



aproximadamente igual a 0,222. Entretanto, combinando-se uma pequena proporção de investimentos estrangeiros com a carteira de ações norte-americanas, produz-se uma redução de risco, como pode ser visto no trecho ascendente à esquerda. Em outras palavras, os benefícios de diversificação, combinando-se as duas carteiras, mais do que compensam a introdução de um conjunto de ações com maior risco. A carteira de mínima variância ocorre quando temos cerca de 80% em ações de empresas norte-americanas e cerca de 20% em ações de empresas estrangeiras. O acréscimo de ações de empresas estrangeiras, a partir deste ponto, eleva o risco de toda a carteira.

A curva com o formato que vemos na Figura 10.5 representa uma informação importante que não tem sido ignorada pelos administradores de fundos nos Estados Unidos. Nos últimos anos, os administradores de fundos de pensão e fundos de investimento nos Estados Unidos têm saído à busca de oportunidades de investimento no exterior. Um outro aspecto que vale a pena salientar diz respeito aos perigos associados ao uso somente de dados passados para estimar retornos futuros. Os mercados de ações de muitos países estrangeiros têm apresentado crescimento fenomenal nos últimos 25 anos. Portanto, um gráfico como o da Figura 10.5 faz parecer que um investimento elevado nesses mercados seria uma estratégia atraente. Entretanto, como retornos extraordinariamente elevados não podem ser mantidos para sempre, alguma subjetividade precisa ser usada ao se fazerem previsões de retornos futuros esperados.



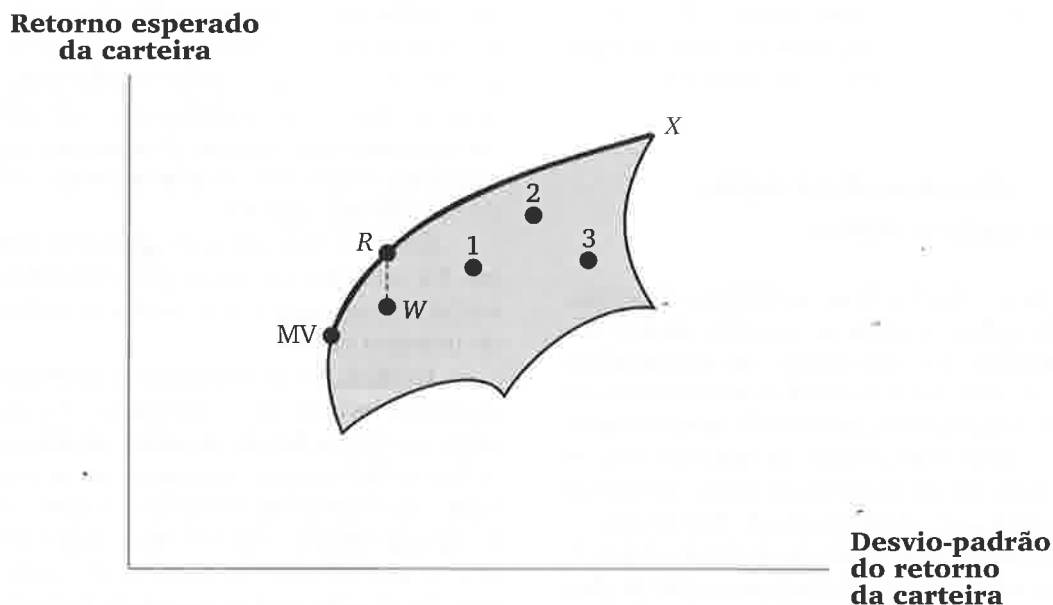
#### QUESTÃO CONCEITUAL

- Qual é a relação entre a forma do conjunto eficiente com dois ativos e o coeficiente de correlação entre os retornos desses ativos?

## 10.5 CONJUNTO EFICIENTE COM MUITOS ATIVOS

A discussão anterior envolvia dois títulos. Constatamos que uma curva simples representava todas as carteiras possíveis. Como os investidores geralmente aplicam em mais de dois títulos, precisamos considerar a mesma curva quando há mais de dois títulos numa carteira. A área sombreada na Figura 10.6 representa o conjunto de oportunidades ou conjunto viável quando consideramos a existência de vários títulos. Essa área corresponde a todas as combinações possíveis de retorno esperado e desvio-padrão para uma carteira. Por exemplo, num universo de 100 títulos, o ponto 1 poderia representar uma carteira de 40 títulos, digamos. O ponto 2 poderia ser uma carteira contendo 80 títulos. O ponto 3 poderia representar um conjunto diferente de 80 títulos, ou os mesmos 80 títulos combinados em proporções diferentes, ou ainda outra coisa. Obviamente, a quantidade de combinações é virtualmente infinita. Entretanto, é importante observar que todas as combinações

■ FIGURA 10.6 Conjunto viável de carteiras construídas com muitos títulos.



possíveis situam-se numa região limitada. Nenhum título ou combinação de títulos pode ficar fora da região sombreada. Ou seja, ninguém pode escolher uma carteira com retorno esperado acima daquele dado pela região sombreada, pois os retornos esperados dos títulos individuais não podem ser alterados. Além disso, ninguém pode escolher uma carteira com desvio-padrão abaixo daquele dado pela região sombreada. Talvez o que seja mais surpreendente, porém, é salientar que ninguém deveria escolher um retorno esperado abaixo daquele indicado pela curva. Em outras palavras, os mercados de capitais protegem uma pessoa autodestrutiva contra uma perda certa.<sup>6</sup>

Até este momento, vemos que a Figura 10.6 é diferente dos gráficos apresentados anteriormente. Quando há somente dois títulos envolvidos, todas as combinações situam-se sobre numa única curva. Ao contrário, quando há muitos títulos a considerar, as combinações ocupam toda uma região. Entretanto, deve ser notado que um indivíduo desejará estar em algum ponto do limite superior dessa região, entre MV e X. O limite superior, que indicamos na Figura 10.6 por uma linha mais grossa, é o chamado *conjunto eficiente*. Qualquer ponto abaixo do conjunto eficiente produziria retorno esperado menor e teria o mesmo desvio-padrão de um ponto situado no conjunto eficiente. Por exemplo, consideremos o ponto R, situado no conjunto eficiente, e o ponto W, di-

retamente abaixo de R. Se W possuir o risco que o investidor deseja, ele ainda assim deverá escolher o ponto R, para que possa conseguir um retorno esperado mais alto.

Em última análise, a Figura 10.6 é muito semelhante à Figura 10.3. O conjunto eficiente, na Figura 10.3, vai de MV até Supertech. Contém diversas combinações dos títulos Supertech e Slowpoke. O conjunto eficiente, na Figura 10.6, vai de MV até X. Contém diversas combinações de muitos títulos. O fato de que toda uma área sombreada aparece na Figura 10.6, mas não na Figura 10.3, não é uma diferença importante; de qualquer maneira, nenhum investidor escolheria algum ponto abaixo do conjunto eficiente na Figura 10.6.

Mencionamos anteriormente que um conjunto eficiente de dois títulos pode ser traçado facilmente na prática. A tarefa é mais difícil quando são incluídos títulos adicionais, porque o número de observações aumenta. Por exemplo, o uso de análise subjetiva para estimar os retornos esperados e desvios-padrão, digamos, de 100 ou 500 títulos, pode muito bem transformar-se num trabalho avassalador, e as dificuldades com os coeficientes de correlação são ainda piores. Há quase 5.000 correlações entre pares de títulos, num universo de 100 títulos.

Embora a maior parte da matemática de cálculo de conjuntos eficientes tenha sido desenvolvida na década de 50,<sup>7</sup> o alto custo do tempo de computação limitou a aplicação de seus princípios. Nos últimos anos, esse cus-

<sup>6</sup> Evidentemente, alguém que estiver decidido a desfazer-se de todo o seu dinheiro sempre poderia fazê-lo. Por exemplo, poderá negociar freqüentemente e a esmo, para que as despesas de corretagem mais do que compensem os retornos esperados positivos da carteira.

<sup>7</sup> O tratado clássico foi escrito por MARKOWITZ, Harry. *Portfolio selection*. New York: John Wiley, 1959. Markowitz recebeu o Prêmio Nobel de Economia em 1990, por seu trabalho na moderna teoria de carteiras.

to diminuiu drasticamente. Vários aplicativos permitem o cálculo de um conjunto eficiente envolvendo carteiras de tamanho moderado. Consta que esses aplicativos são vendidos em grande quantidade, o que parece indicar que nossa discussão anterior é importante na prática.

### Variância e desvio-padrão numa carteira de muitos ativos

Apresentamos anteriormente as fórmulas da variância e do desvio-padrão no caso de carteiras de dois ativos. Como consideramos uma carteira de muitos ativos na Figura 10.6, vale a pena montar as fórmulas da variância e do desvio-padrão no caso de muitos ativos. A fórmula da variância do retorno de uma carteira de muitos ativos pode ser encarada como uma extensão da fórmula da variância de uma carteira de dois ativos.

Para desenvolver a fórmula apropriada, empregamos o mesmo tipo de matriz que usamos no caso de dois ativos. Tal matriz é apresentada na Tabela 10.4. Supondo que existam  $N$  ativos, escrevemos os números 1 a  $N$  no eixo horizontal e no eixo vertical. Isso cria uma matriz de  $N \times N = N^2$  células.

Consideremos, por exemplo, a célula no cruzamento da segunda linha com a terceira coluna. O termo que aparece na célula é  $X_2X_3\text{Cov}(R_2, R_3)$ .  $X_2$  e  $X_3$  são as proporções aplicadas no segundo e no terceiro ativos da carteira, respectivamente. Por exemplo, se um indivíduo com uma carteira no valor total de \$ 1.000 aplicasse \$ 100 no segundo ativo,  $X_2 = 10\%$  (\$100/\$1.000).

$\text{Cov}(R_3, R_2)$  é a covariância entre os retornos do terceiro ativo e do segundo ativo. A seguir, examine-se a célula na terceira linha e na segunda coluna. O termo dentro dessa célula é  $X_3X_2\text{Cov}(R_3, R_2)$ . Como  $\text{Cov}(R_3, R_2) = \text{Cov}(R_2, R_3)$ , ambas as células contêm o mesmo valor. O segundo título e o terceiro título formam um par de ações. Na realidade, qualquer par de ações aparece duas vezes na tabela, sendo uma no lado esquerdo inferior e outra no lado direito superior.

Consideremos agora as células na diagonal principal. Por exemplo, o termo na primeira célula da diagonal é  $X_1^2\sigma_1^2$ . Nesse caso,  $\sigma_1^2$  é a variância da taxa de retorno do primeiro título.

Portanto, os termos contidos na diagonal principal da matriz incluem as variâncias dos retornos das várias ações. Os termos fora da diagonal contêm as covariâncias. A Tabela 10.5 associa os números de termos na diagonal e fora da diagonal ao tamanho da matriz. O número de termos na diagonal (número de termos contendo variâncias) é sempre igual ao número de ações incluídas na carteira. O número de termos fora da diagonal principal (termos contendo covariâncias) cresce muito mais rapidamente do que o número de termos na diagonal. Por exemplo, uma carteira de 100 ações envolve 9.900 covariâncias. Como a variância do retorno de uma carteira é dada pela soma dos valores em todas as células, temos:

A variância da taxa de retorno de uma carteira composta por muitos títulos depende mais das covariâncias entre os retornos dos títulos individuais do que das variâncias desses títulos.

■ **TABELA 10.4** Matriz usada para calcular a variância do retorno de uma carteira.

| Ação | 1                            | 2                            | 3                            | ... | N                            |
|------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|-----|------------------------------|
| 1    | $X_1^2\sigma_1^2$            | $X_1X_2\text{Cov}(R_1, R_2)$ | $X_1X_3\text{Cov}(R_1, R_3)$ |     | $X_1X_N\text{Cov}(R_1, R_N)$ |
| 2    | $X_2X_1\text{Cov}(R_2, R_1)$ | $X_2^2\sigma_2^2$            | $X_2X_3\text{Cov}(R_2, R_3)$ |     | $X_2X_N\text{Cov}(R_2, R_N)$ |
| 3    | $X_3X_1\text{Cov}(R_3, R_1)$ | $X_3X_2\text{Cov}(R_3, R_2)$ | $X_3^2\sigma_3^2$            |     | $X_3X_N\text{Cov}(R_3, R_N)$ |
| ...  |                              |                              |                              |     |                              |
| N    | $X_NX_1\text{Cov}(R_N, R_1)$ | $X_NX_2\text{Cov}(R_N, R_2)$ | $X_NX_3\text{Cov}(R_N, R_3)$ |     | $X_N^2\sigma_N^2$            |

$\sigma_i$  é o desvio-padrão dos retornos da ação  $i$ .

$\text{Cov}(R_i, R_j)$  é a covariância entre os retornos da ação  $i$  e da ação  $j$ .

Os termos envolvendo o desvio-padrão de um único título aparecem na diagonal principal. Os termos envolvendo covariâncias entre os retornos de dois títulos estão situados fora da diagonal.

■ **TABELA 10.5** Número de variâncias e covariâncias em função do número de ações na carteira.

| Número de ações na carteira | Número total de termos | Número de variâncias (termos na diagonal principal) | Número de covariâncias (termos fora da diagonal) |
|-----------------------------|------------------------|-----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1                           | 1                      | 1                                                   | 0                                                |
| 2                           | 4                      | 2                                                   | 2                                                |
| 3                           | 9                      | 3                                                   | 6                                                |
| 10                          | 100                    | 10                                                  | 90                                               |
| 100                         | 10.000                 | 100                                                 | 9.900                                            |
| $\vdots$                    | $\vdots$               | $\vdots$                                            | $\vdots$                                         |
| $N$                         | $N^2$                  | $N$                                                 | $N^2 - N$                                        |

Numa carteira ampla, o número de termos envolvendo a covariância entre os retornos de dois títulos é muito maior do que o número de termos envolvendo a variância dos retornos de um único título.



#### QUESTÕES CONCEITUAIS

- Qual é a fórmula da variância do retorno de uma carteira com muitos ativos?
- Como podemos expressar a fórmula em termos de um quadro ou uma matriz?

## 10.6 DIVERSIFICAÇÃO: UM EXEMPLO

A idéia anterior pode ser ilustrada alterando-se ligeiramente a matriz contida na Tabela 10.4. Suponhamos o seguinte:

1. Todos os títulos têm a mesma variância, que representaremos por  $\overline{\text{var}}$ . Em outras palavras,  $\sigma_i^2 = \overline{\text{var}}$  para cada título.
2. Todas as covariâncias na Tabela 10.4 são iguais. Representaremos essa covariância uniforme por  $\overline{\text{cov}}$ . Em outras palavras,  $\text{Cov}(R_i, R_j) = \overline{\text{cov}}$  para cada par de títulos. Pode ser facilmente demonstrado que  $\overline{\text{var}} > \overline{\text{cov}}$ .
3. Todos os títulos têm o mesmo peso na carteira. Como há  $N$  ativos, o peso de cada ativo é igual a  $1/N$ . Em outras palavras,  $X_i = 1/N$  para cada ativo  $i$ .

A Tabela 10.6 é a matriz de variâncias e covariâncias de acordo com essas três hipóteses simplificadoras. Note-se que todos os termos na diagonal principal são iguais. De maneira análoga, os termos fora da diagonal são idênticos. Tal como ocorreu na Tabela 10.4, a variância do retorno da carteira é igual à soma dos termos contidos nas células da Tabela 10.6. Sabemos que os  $N$  termos da diagonal principal envolvem variâncias. De maneira semelhante, há  $N \times (N - 1)$  termos fora da diagonal envolvendo covariâncias. Somando todas as células da Ta-

bela 10.6, podemos expressar a variância do retorno da carteira do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \text{Variância da carteira} &= N \times (1/N^2)\overline{\text{var}} + N(N-1) \times (1/N^2)\overline{\text{cov}} \\ &= (1/N)\overline{\text{var}} + [(N^2 - N)/N]\overline{\text{cov}} \\ &= (1/N)\overline{\text{var}} + (1 - 1/N)\overline{\text{cov}} \end{aligned} \quad (10.10)$$

A equação (10.10) expressa a variância dos retornos de nossa carteira especial como uma soma ponderada da variância média e da covariância média.<sup>8</sup> Essa intuição é confirmada quando aumentamos sem limite o número de títulos na carteira. A variância do retorno da carteira passa a ser:

$$\text{Variância da carteira (quando } N \rightarrow \infty) = \overline{\text{cov}} \quad (10.11)$$

Isto ocorre porque (1) o peso do termo da variância,  $1/N$ , tende a 0 quando  $N$  vai para infinito, e (2) o peso do termo da covariância,  $1 - 1/N$ , tende a 1 quando  $N$  vai para infinito.

A fórmula (10.11) oferece um resultado interessante e importante. Em nossa carteira especial, as variâncias dos títulos individuais desaparecem completamente, à medida em que o número de títulos se eleva. Entretanto, os termos com as covariâncias permanecem. Na realidade, a variância da carteira iguala-se à covariância média,  $\overline{\text{cov}}$ . Ouve-se freqüentemente a recomendação de que devemos diversificar nossos investimentos. Em outras palavras, que não devemos colocar todos os ovos numa única cesta. O efeito da diversificação sobre o ris-

<sup>8</sup> Na realidade, a equação (10.10) é uma média ponderada dos termos com variâncias e covariâncias, porque a soma dos pesos,  $1/N$  e  $1 - 1/N$ , é igual a 1.

■ TABELA 10.6

Matriz usada para calcular a variância do retorno de uma carteira quando (a) todos os títulos possuem a mesma variância ( $\overline{\text{var}}$ ); (b) todos os pares de títulos possuem a mesma covariância ( $\overline{\text{cov}}$ ); (c) os pesos de todos os títulos são iguais ( $1/N$ ).

| Ação | 1                              | 2                              | 3                              | ... | N                              |
|------|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-----|--------------------------------|
| 1    | $(1/N^2)\overline{\text{var}}$ | $(1/N^2)\overline{\text{cov}}$ | $(1/N^2)\overline{\text{cov}}$ |     | $(1/N^2)\overline{\text{cov}}$ |
| 2    | $(1/N^2)\overline{\text{cov}}$ | $(1/N^2)\overline{\text{var}}$ | $(1/N^2)\overline{\text{cov}}$ |     | $(1/N^2)\overline{\text{cov}}$ |
| 3    | $(1/N^2)\overline{\text{cov}}$ | $(1/N^2)\overline{\text{cov}}$ | $(1/N^2)\overline{\text{var}}$ |     | $(1/N^2)\overline{\text{cov}}$ |
| .    |                                |                                |                                |     |                                |
| .    |                                |                                |                                |     |                                |
| .    |                                |                                |                                |     |                                |
| N    | $(1/N^2)\overline{\text{cov}}$ | $(1/N^2)\overline{\text{cov}}$ | $(1/N^2)\overline{\text{cov}}$ |     | $(1/N^2)\overline{\text{var}}$ |

co de uma carteira pode ser ilustrado graças a esse exemplo. As variâncias dos títulos individuais são eliminadas com a diversificação, mas o mesmo não acontece com as covariâncias.

Devemos explorar mais um pouco o fato de que parte do risco, mas não todo, pode ser eliminada com a diversificação. Consideremos o caso do Sr. Smith, que pretende apostar \$ 1.000 na roleta de um cassino. Ele correria um risco muito grande se apostasse todo seu dinheiro num giro da roleta. Por exemplo, imaginemos que ele apostasse os \$ 1.000 no vermelho. Se a roleta parasse no vermelho, ele ganharia \$ 2.000, mas se parasse no preto, perderia tudo. Imaginemos, porém, que ele dividisse suas apostas em 1.000 rodadas diferentes, apostando \$ 1 no vermelho a cada rodada. A teoria de probabilidade diz-nos que ele poderia esperar ganhar cerca de 50% das vezes. Isso significa que poderia contar com ficar com seus \$ 1.000 originais.<sup>9</sup> Em outras palavras, o risco é basicamente eliminado, com 1.000 rodadas diferentes.

Contrastemos esse caso com nosso exemplo do mercado de ações, que ilustramos na Figura 10.7. A variância do retorno da carteira com um único título é, evidentemente, igual a  $\overline{\text{var}}$ , porque a variância do retorno de uma carteira com apenas um título é exatamente a variância do retorno desse título. A variância da carteira cai com a inclusão de cada vez mais títulos, o que evidencia o efeito de diversificação. Entretanto, ao contrário do que ocorre no exemplo da roleta, a variância do retorno da carteira nunca pode cair a zero. Na verdade, seu piso é igual a  $\overline{\text{cov}}$ , a covariância entre os retornos de cada par de títulos.<sup>10</sup>

Como a variância do retorno da carteira converge assintoticamente para  $\overline{\text{cov}}$ , cada título adicional ajuda a reduzir o risco. Portanto, se não houvesse despesas de corretagem ou outros tipos de custo de transação, poderia ser argumentado que a diversificação nunca deveria terminar. Entretanto, na prática esse processo de diversificação possui um custo. As despesas de corretagem por dólar aplicado caem à medida que se fazem compras maiores de uma única ação. Infelizmente, isso significa que se devem comprar menos unidades de um único título quando se adquire um número cada vez maior de títulos diferentes. Comparando os custos e os benefícios da diversificação, Meir Statman conclui que é necessária uma carteira de 30 ações para otimizar a diversificação.<sup>11</sup>

Mencionamos anteriormente que  $\overline{\text{var}}$  deve ser maior do que  $\overline{\text{cov}}$ . Assim, a variância da taxa de retorno de um título pode ser decomposta do seguinte modo:

$$\begin{array}{lcl} \text{Risco total de} & & \text{Risco não siste-} \\ \text{um título} & = & \text{Risco na} & + & \text{mático ou risco} \\ \text{individual} & & \text{carteira} & & \text{diversificável} \\ (\overline{\text{var}}) & & (\overline{\text{cov}}) & & (\overline{\text{var}} - \overline{\text{cov}}) \end{array}$$

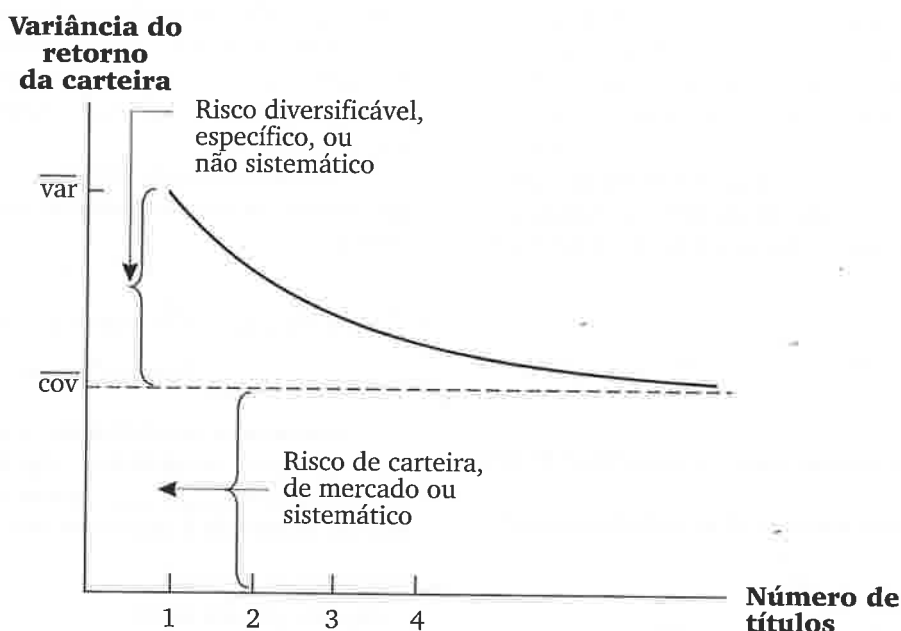
O *risco total*, dado por  $\overline{\text{var}}$  em nosso exemplo, é o risco que se assume quando se aplica em apenas um título. O *risco na carteira* é o risco que se assume mesmo depois de conseguir diversificação integral, representado por  $\overline{\text{cov}}$  em nosso exemplo. O risco na carteira também é freqüentemente chamado de **risco sistemático** ou **risco de mercado**. O **risco diversificável**, **específico** ou **não sistemático**, é o risco que pode ser eliminado por meio de diversificação numa carteira

<sup>9</sup>. Ignorando a participação do cassino.

<sup>10</sup>. Embora seja mais difícil demonstrar, esse efeito de redução de risco também ocorre no caso geral em que as variâncias e covariâncias não são iguais.

<sup>11</sup>. STATMAN, Meir. How many stocks make a diversified portfolio? *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Sept. 1987.

■ FIGURA 10.7 Relação entre a variância do retorno de uma carteira e o número de títulos na carteira.\*



\* Este gráfico pressupõe que:

- Todos os títulos têm a mesma variância,  $\text{var}$ .
- Todos os títulos têm a mesma covariância,  $\text{cov}$ .
- Todos os títulos possuem o mesmo peso na carteira.

A variância do retorno de uma carteira cai à medida que aumenta o número de títulos presentes na carteira. Entretanto, não cai a zero. Na verdade, o piso é representado pela média das covariâncias.

ampla, o qual deve ser igual a  $(\overline{\text{var}} - \overline{\text{cov}})$ , de acordo com nossas definições.

Para um indivíduo que opta por uma carteira diversificada, o risco total de um título individual não é importante. Ao considerar a adição de um título a uma carteira diversificada, o indivíduo preocupa-se com a parte do risco de um título que não pode ser eliminada por meio da diversificação. Esse risco pode ser encarado, alternativamente, como a *contribuição* de um título ao risco de toda uma carteira. Trataremos mais adiante do caso no qual os títulos fazem contribuições diferentes ao risco de uma carteira.

### Risco e investidor sensato

Já que nos demos a todo esse trabalho para mostrar que o risco não sistemático desaparece numa carteira bem diversificada, como sabemos que os investidores chegam a desejar tais carteiras? E se eles gostassem de risco e não quisessem que ele desaparecesse?

Somos obrigados a admitir, pelo menos teoricamente, que isso é possível, mas argumentaremos que não

descreve o que julgamos ser o investidor típico. Nosso investidor típico é uma pessoa com **aversão a risco**. O comportamento de aversão a risco pode ser definido de várias maneiras, mas preferimos o seguinte exemplo: uma aposta justa é a que tem retorno esperado igual a zero; um investidor com aversão a risco preferiria evitar tal tipo de aposta.

Por que os investidores escolhem carteiras bem diversificadas? Nossa resposta é a de que são pessoas com aversão a risco, e pessoas com aversão a risco evitam riscos desnecessários, tal como o risco não sistemático de uma ação. Se você não acha que esta é uma boa explicação do motivo pelo qual os investidores optam por carteiras bem diversificadas e evitam risco não sistemático, pergunte-se se você correria tal tipo de risco. Por exemplo, suponha que você tenha trabalhado durante todo o verão e tenha economizado \$ 5.000, que pretende usar para cobrir suas despesas na universidade. Suponha agora que alguém entrasse em contato com você e propusesse apostar esse dinheiro num cara-ou-coroa: se der cara, você dobra seu dinheiro, e se der coroa você perde todo o seu dinheiro.

Você aceitaria essa aposta? Talvez sim, mas a maioria das pessoas não a aceitaria. Deixando de lado qual-

quer questão moral relacionada ao jogo, e reconhecendo que algumas pessoas aceitariam essa aposta, nossa opinião é a de que a maioria das pessoas não o faria.

Para induzir o investidor típico, com aversão a risco, a participar de uma aposta justa, a premiação deve ser melhorada. Por exemplo, talvez fosse preciso mudar as chances de ganho de 50-50 para 70-30, ou mais. O investidor com aversão a risco pode ser induzido a participar de apostas justas somente quando a premiação é melhorada, de modo que se tornam injustas, a favor do investidor.



#### QUESTÕES CONCEITUAIS

- Quais são os dois componentes do risco total de um título?
- Por que a diversificação não elimina todo o risco?

## 10.7 CAPTAÇÃO E APLICAÇÃO SEM RISCO

A Figura 10.6 pressupõe que todos os títulos incluídos no conjunto eficiente possuem risco. Alternativamente, um investidor facilmente poderia combinar um investimento com risco com um título livre de risco, tal como uma aplicação em letras do tesouro dos Estados Unidos. Isso é ilustrado por meio do seguinte exemplo.

### EXEMPLO

A Srta. Bagwell está pensando em aplicar em ações ordinárias da Merville Enterprises. Além disso, a Srta. Bagwell poderá captar ou aplicar à taxa de juros livre de risco. Os parâmetros relevantes são:

|                  | Ação ordinária<br>da Merville | Ativo livre<br>de risco |
|------------------|-------------------------------|-------------------------|
| Retorno esperado | 14%                           | 10%                     |
| Desvio-padrão    | 0,20                          | 0                       |

Suponha que a Srta. Bagwell opte por aplicar um total de \$ 1.000, \$ 350 dos quais na Merville Enterprises e \$ 650 no ativo livre de risco. O retorno esperado de sua aplicação total é simplesmente uma média ponderada dos dois retornos:

$$\begin{aligned} \text{Retorno esperado de uma} \\ \text{carteira composta por um} \\ \text{ativo sem risco e um ativo} \\ \text{com risco} &= 0,114 \\ &= (0,35 \times 0,14) + (0,65 \times 0,10) \quad (10.12) \end{aligned}$$

Como o retorno esperado da carteira é uma média ponderada do retorno esperado do ativo com risco (Merville Enterprises) e do retorno livre de risco, o cálculo é análogo ao procedimento adotado para analisar carteiras de dois ativos com risco. Em outras palavras, podemos utilizar a equação (10.3) neste caso.

Usando a equação (10.4), a fórmula da variância do retorno da carteira pode ser escrita do seguinte modo:

$$X_{\text{Merville}}^2 \sigma_{\text{Merville}}^2 + 2X_{\text{Merville}}X_{\text{Sem risco}}\sigma_{\text{Merville, Sem risco}} + X_{\text{Sem risco}}^2 \sigma_{\text{Sem risco}}^2$$

Entretanto, por definição, o ativo livre de risco não apresenta variabilidade alguma. Consequentemente, tanto  $\sigma_{\text{Merville, Sem risco}}$  quanto  $\sigma_{\text{Sem risco}}^2$  são iguais a zero, reduzindo a expressão anterior a

$$\begin{aligned} \text{Variância de carteira} \\ \text{composta por um ativo} \\ \text{sem risco e um ativo} \\ \text{com risco} &= X_{\text{Merville}}^2 \sigma_{\text{Merville}}^2 = (0,35)^2 \times (0,20)^2 \\ &= 0,0049 \quad (10.13) \end{aligned}$$

O desvio-padrão do retorno da carteira é

$$\begin{aligned} \text{Desvio-padrão de} \\ \text{carteira composta} \\ \text{por um ativo sem} \\ \text{risco e um ativo} \\ \text{com risco} &= X_{\text{Merville}} \sigma_{\text{Merville}} \\ &= 0,35 \times 0,20 = 0,07 \quad (10.14) \end{aligned}$$

A relação entre risco e retorno esperado numa carteira contendo um ativo com risco e outro sem risco pode ser visualizada na Figura 10.8. A composição escolhida pela Srta. Bagwell (35-65) é representada numa linha *reta* ligando a taxa livre de risco e um investimento puro em ações da Merville. Note que, diferentemente do caso de dois ativos com risco, o conjunto de oportunidades é uma linha reta, e não uma curva.

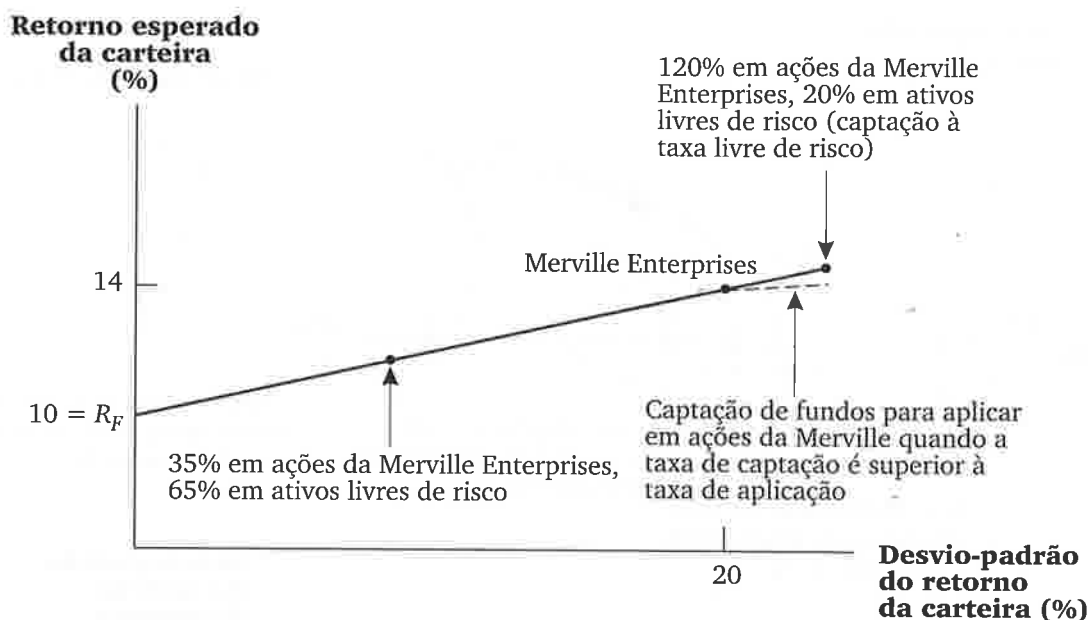
Suponhamos que, alternativamente, a Srta. Bagwell tome \$ 200 emprestados à taxa livre de risco. Combinando essa operação à quantia original de \$ 1.000, ela aplica um total de \$ 1.200 nas ações da Merville. Seu retorno esperado seria

$$\begin{aligned} \text{Retorno esperado de} \\ \text{uma carteira formada} \\ \text{por captação para} \\ \text{aplicar em ativo} \\ \text{com risco} &= 14,8\% = 1,20 \times 0,14 + (-0,2 \times 0,10) \end{aligned}$$

Nesse caso, ela aplica 120% de sua quantia original de \$ 1.000 mediante a obtenção de um emprés-

■ FIGURA 10.8

Relação entre o retorno esperado e o risco de uma carteira contendo um ativo com risco e um ativo sem risco.



timo correspondente a 20% de seu patrimônio inicial. Note que o retorno de 14,8% é superior ao retorno esperado de 14% das ações da Merville Enterprises. Isso ocorre porque ela está captando a 10% para aplicar num título cujo retorno esperado é superior a 10%.

O desvio-padrão é

Desvio-padrão de uma carteira formada por captação para aplicar em ativo com risco =  $0,24 = 1,20 \times 0,2$

O desvio-padrão de 0,24 é superior a 0,20, que era o desvio-padrão da taxa de retorno das ações da Merville, porque a captação de um empréstimo eleva a variabilidade do valor do investimento. Essa alternativa de investimento também é representada na Figura 10.8.

Até o momento, supusemos que a Srta. Bagwell é capaz de tomar emprestado à mesma taxa à qual pode aplicar.<sup>12</sup> Consideremos agora o caso no qual a taxa de captação é superior à taxa de aplicação. A linha tracejada, na Figura 10.8, mostra o conjunto de oportunidades à taxa de captação. A linha tracejada está abaixo da linha cheia porque uma taxa de captação mais alta reduz o retorno esperado do investimento.

### Carteira ótima

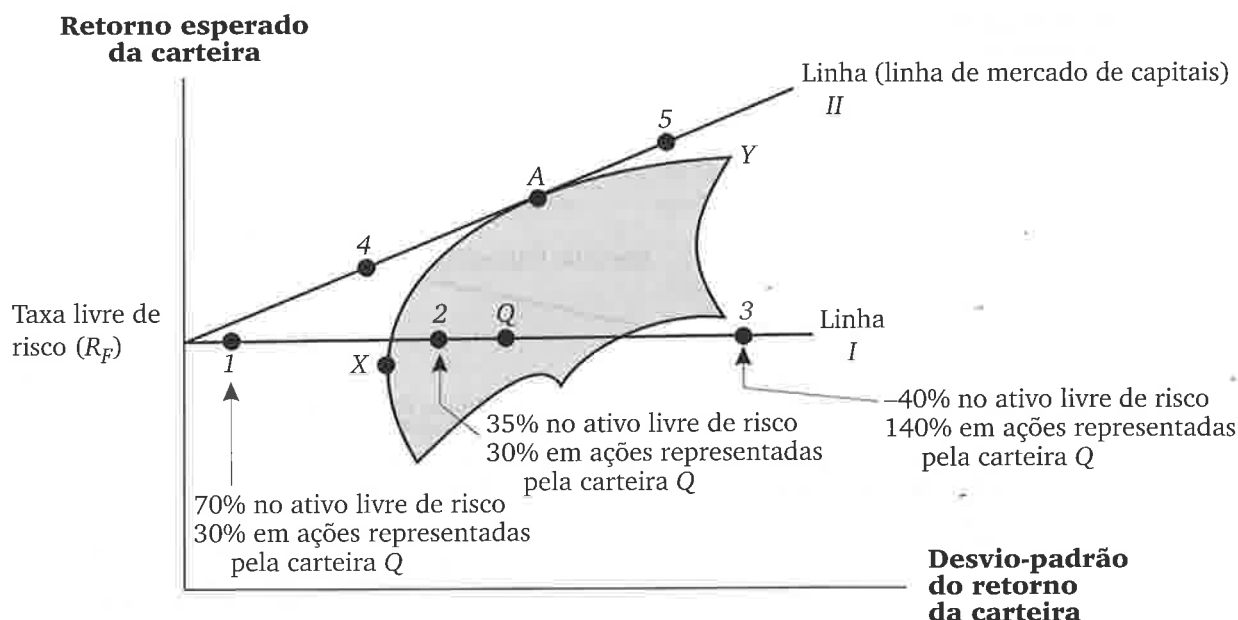
A seção precedente preocupou-se com uma carteira formada por um ativo sem risco e um ativo com risco. Na realidade, um investidor tende a combinar uma aplicação no ativo sem risco a uma carteira de ativos com risco. Isso é ilustrado na Figura 10.9.

Consideremos o ponto Q, representando uma carteira de títulos. O ponto Q está situado no interior do conjunto viável de títulos com risco. Suponhamos que esse ponto represente uma carteira formada por 30% de AT&T, 45% de General Motors (GM) e 25% de IBM. Os indivíduos que combinassem aplicações em Q com aplicações no ativo sem risco atingiriam pontos situados na linha reta que vai de  $R_F$  até Q. Chamaremos essa linha de I. Por exemplo, o ponto 1 representa uma carteira contendo 70% de ativo sem risco e 30% das ações incluídas em Q. Um investidor que dispusesse de \$ 100 e escolhesse o ponto 1 como sua carteira colocaria \$ 70 no ativo livre de risco e \$ 30 em Q. Alternativamente, podemos dizer que estaria aplicando \$ 70 no ativo sem risco, \$ 9 ( $0,3 \times \$ 30$ ) em AT&T, \$ 13,50 ( $0,45 \times \$ 30$ ) em GM, e \$ 7,50 ( $0,25 \times \$ 30$ ) em IBM. O ponto 2 também representa uma combinação do ativo livre de risco com Q, na qual uma proporção maior (65%) é aplicada em Q.

chamadas operações de *conta-margem*), para fins de aquisição de ações. A taxa de juros de captação, nessa operação, é muito próxima da taxa de juros livre de risco, particularmente no caso de investidores de grande porte. Diremos mais a esse respeito em um capítulo posterior.

<sup>12</sup> Surpreendentemente, esta parece ser uma boa aproximação, pois há um número razoavelmente grande de investidores que são capazes de tomar dinheiro emprestado de uma corretora (por meio das

■ **FIGURA 10.9** Relação entre retorno esperado e desvio-padrão do retorno de um investimento numa combinação de títulos com risco com o ativo sem risco.



A carteira Q é formada por 30% de AT&T, 45% de GM e 25% de IBM.

O ponto 3 é obtido mediante captação de empréstimo para investir em Q. Por exemplo, um investidor que possuísse recursos próprios no valor de \$ 100 tomaria \$ 40 emprestados do banco ou da corretora para aplicar \$ 140 em Q. Isso pode ser enunciado do seguinte modo: tomar \$ 40 emprestados e aplicar dinheiro próprio no valor de \$ 100 para investir \$ 42 ( $0,3 \times \$ 140$ ) em AT&T, \$ 63 ( $0,45 \times \$ 140$ ) em GM, e \$ 35 ( $0,25 \times \$ 140$ ) em IBM.

Os investimentos anteriores podem ser resumidos do seguinte modo:

|                      | Ponto Q | Ponto 1<br>(emprestar<br>\$ 70) | Ponto 2<br>(captar<br>\$ 40) |
|----------------------|---------|---------------------------------|------------------------------|
| AT&T                 | \$ 30   | \$ 9                            | \$ 42                        |
| GM                   | 45      | 13,50                           | 63                           |
| IBM                  | 25      | 7,50                            | 35                           |
| Ativo livre de risco | 0       | 70,00                           | -40                          |
| Investimento total   | \$ 100  | \$ 100                          | \$ 100                       |

Embora qualquer investidor possa alcançar qualquer ponto da linha I, nenhum ponto pertencente a essa linha representa um investimento ótimo. Para que se perceba esse fato, considere-se a linha II, indo de  $R_F$  até A. O ponto A representa uma carteira de títulos com risco. A linha II consiste em carteiras formada por combinações do ativo livre de risco com os títulos contidos em

A. Os pontos entre  $R_F$  e A são carteiras nas quais algum dinheiro é aplicado no ativo livre de risco e o restante é investido em A. Os pontos situados além de A são alcançados tomando-se dinheiro emprestado à taxa livre de risco para comprar mais de A do que seria possível somente com os fundos originais.

Tal como está traçada, a linha II é tangente ao conjunto eficiente de títulos com risco. Para qualquer ponto que um indivíduo possa alcançar na linha I, há sempre um ponto com o mesmo desvio-padrão e retorno esperado mais alto na linha II. Na verdade, como a linha II é tangente ao conjunto eficiente, ela oferece ao investidor as melhores oportunidades possíveis. Em outras palavras, a linha II, freqüentemente chamada de **linha de mercado de capitais**, pode ser encarada como o conjunto eficiente de todos os ativos, tanto com risco quanto sem risco. Um investidor com um grau razoável de aversão a risco poderia escolher um ponto entre  $R_F$  e A, talvez o ponto 4. Um indivíduo com aversão menor a risco poderia optar por um ponto mais próximo de A ou até além de A. Por exemplo, o ponto 5 corresponde à situação na qual um indivíduo toma dinheiro emprestado para aplicar mais em A.

O gráfico ilustra um aspecto importante. Se houvesse a possibilidade de tomar dinheiro emprestado e aplicar à taxa livre de risco, a carteira de ativos com risco possuída por qualquer investidor seria sempre o ponto A. Independentemente da tolerância do investidor em relação a risco, ele nunca escolheria qualquer outro ponto do

conjunto eficiente de ativos com risco (representado pela curva  $XAY$ ), tampouco algum ponto no interior da região viável. Em vez disso, ele combinaria os títulos contidos em  $A$  com os ativos sem risco, caso ele possuísse aversão elevada a risco. Ele tomaria emprestado à taxa livre de risco para aplicar mais fundos em  $A$ , se tivesse aversão reduzida a risco.

Esse resultado estabelece o que os economistas financeiros chamam de **princípio de separação**. Ou seja, o investidor toma duas decisões separadas:

1. Após estimar (a) o retorno esperado e as variâncias de títulos individuais, e (b) as covariâncias entre pares de títulos, o investidor determina o conjunto eficiente de ativos com risco, representado pela curva  $XAY$  na Figura 10.9. Ele, a seguir, determina o ponto  $A$ , a saber, o ponto de tangência entre a taxa livre de risco e o conjunto eficiente de ativos com risco (curva  $XAY$ ). O ponto  $A$  representa a carteira de ativos com risco que o investidor escolherá. Esse ponto é determinado exclusivamente com base em suas estimativas de retornos, variâncias e covariâncias. Nenhuma característica pessoal, tal como o grau de aversão a risco, é necessária nessa primeira etapa.

2. O investidor deve agora determinar como ele combinará o ponto  $A$ , sua carteira de ativos com risco, ao ativo livre de risco. Ele poderia aplicar parte de seus fundos no ativo livre de risco e parte na carteira  $A$ . Aca- baria em algum ponto na linha entre  $R_f$  e  $A$ , nesse caso. Alternativamente, poderia tomar emprestado à taxa livre de risco e acrescentar seus próprios recursos, investindo o total na carteira  $A$ . Isso o colocaria num ponto sobre a linha  $II$ , além de  $A$ . Sua posição no ativo livre de risco, ou seja, a escolha do ponto no qual ele deseja ficar, é determinada por suas características internas, como sua capacidade de tolerar risco.

## ? QUESTÕES CONCEITUAIS

- Qual é a fórmula do desvio-padrão de uma carteira composta por um ativo sem risco e um ativo com risco?
- Como se determina a carteira ótima no conjunto eficiente de ativos com risco?

## 10.8 EQUILÍBRIO DE MERCADO

### Definição da carteira de equilíbrio de mercado

A análise anterior envolve apenas um investidor. As estimativas de retornos esperados e variâncias de títulos individuais, bem como covariâncias entre retornos de

títulos, são exclusivamente desse indivíduo. Outros investidores obviamente fariam estimativas distintas dessas variáveis. Entretanto, as estimativas podem não ser tão diferentes assim, porque todos os investidores estariam formando expectativas a partir dos mesmos dados de variações passadas de preços e outras informações publicamente disponíveis.

Os economistas financeiros costumam imaginar uma situação na qual todos os investidores fazem as *mesmas* estimativas de retornos esperados, variâncias e covariâncias. Embora isso nunca seja exatamente verdadeiro, pode ser considerado como uma hipótese simplificadora útil num mercado em que os investidores têm acesso a fontes semelhantes de informação. Essa hipótese é a de **expectativas homogêneas**.<sup>13</sup>

Se todos os investidores tivessem expectativas homogêneas, a Figura 10.9 seria idêntica para todos os indivíduos. Ou seja, todos os investidores desenhariam o mesmo conjunto eficiente de ativos com risco, pois estariam trabalhando com os mesmos dados. Esse conjunto eficiente de ativos com risco é representado pela curva  $XAY$ . Como a mesma taxa livre de risco valeria para todos, os investidores encarariam a carteira  $A$  como a mais desejável de ativos com risco.

Esse ponto  $A$  assume grande importância, porque todos os investidores aplicariam nos títulos com risco que ele representa. Os investidores que tivessem grau elevado de aversão a risco poderiam combinar  $A$  com uma aplicação no ativo sem risco, escolhendo o ponto 4, por exemplo. Outros, com aversão a risco mais baixa, poderiam tomar dinheiro emprestado para chegar ao ponto 5, digamos. Como essa é uma conclusão muito importante, ela é enfatizada:

Num mercado com expectativas homogêneas, todos os investidores aplicariam na carteira de ativos com risco representada pelo ponto  $A$ .

Se todos os investidores escolherem a mesma carteira de ativos com risco, é possível determinar o que deve ser essa carteira. O bom-senso nos diz que é uma carteira formada por todos os títulos existentes, ponderados por seus valores de mercado. É a **carteira de mercado**.

Na prática, os economistas financeiros usam um índice amplo de mercado, tal como o Standard & Poor's (S&P) 500, como representante da carteira de mercado. Evidentemente, nem todos os investidores possuem a mesma carteira na prática. Entretanto, sabemos que muitos investidores possuem carteiras diversificadas, particularmente quando incluímos os fundos mútuos e os fundos de pensão. Um índice amplo de mercado é uma

<sup>13</sup> A hipótese de expectativas homogêneas diz que todos os investidores possuem as mesmas crenças em relação a retornos, variâncias e covariâncias. Não diz que todos os investidores têm a mesma aversão a risco.

boa aproximação das carteiras altamente diversificadas de muitos investidores.

### Definição de risco quando os investidores possuem a carteira de mercado

A seção anterior afirma que muitos investidores detêm carteiras diversificadas semelhantes a índices amplos de mercado. Esse resultado nos permite ser mais precisos a respeito do risco de um título no contexto de uma carteira diversificada.

Os pesquisadores têm demonstrado que a melhor medida do risco de um título numa carteira ampla é o *beta* desse título. Ilustraremos o conceito de *beta* por meio de um exemplo.

#### ■ EXEMPLO

Consideremos os seguintes retornos possíveis da ação da Jelco, Inc. e do mercado:

| Estado | Comportamento do mercado | Retorno da carteira de mercado (%) | Retorno da Jelco, Inc. (%) |
|--------|--------------------------|------------------------------------|----------------------------|
| I      | Alta                     | 15                                 | 25                         |
| II     | Alta                     | 15                                 | 15                         |
| III    | Baixa                    | -5                                 | -5                         |
| IV     | Baixa                    | -5                                 | -15                        |

Embora a taxa de retorno do mercado tenha apenas dois valores possíveis (15% e -5%), a taxa de retorno da Jelco pode ter quatro valores diferentes. É útil considerar o retorno esperado de um título, dado certo retorno do mercado. Supondo que cada estado tenha a mesma probabilidade de ocorrência, temos

| Comportamento do mercado | Retorno da carteira de mercado (%) | Retorno esperado da Jelco, Inc. (%)                            |
|--------------------------|------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Alta                     | 15%                                | $20\% = 25\% \times \frac{1}{2} + 15\% \times \frac{1}{2}$     |
| Baixa                    | -5%                                | $-10\% = -5\% \times \frac{1}{2} + (-15\%) \times \frac{1}{2}$ |

A Jelco, Inc. reage aos movimentos do mercado porque seu retorno esperado é maior em mercados em alta do que em mercados em baixa. Podemos agora calcular exatamente o grau de sensibilidade do valor do título aos movimentos do mercado. A taxa de retorno do mercado, em situações de alta, é 20% [15% - (-5%)] maior do que em situações de baixa. Entretanto, o retorno esperado da Jelco numa economia em alta é 30% [20% - (-10%)] maior do que em situações de baixa. Portanto, a Jelco, Inc. tem um coeficiente de sensibilidade igual a 1,5 (30%/20%).

Essa relação é apresentada na Figura 10.10. As taxas de retorno da Jelco e do mercado em cada situação são indicadas por quatro pontos. Além disso, assinalamos o retorno esperado do título em cada um dos dois estados possíveis do mercado. Esses dois pontos, ambos marcados por X, são unidos por uma reta denominada **linha característica** do título. A inclinação da linha é igual a 1,5, o número calculado no parágrafo anterior. Esse coeficiente de sensibilidade igual a 1,5 é o **beta** da Jelco.

A interpretação de *beta*, na Figura 10.10, é intuitiva. O gráfico diz-nos que os retornos da Jelco são ampliados uma vez e meia em relação aos do mercado. Quando o mercado sobe, espera-se que a ação da Jelco tenha desempenho ainda melhor. Quando o mercado cai, espera-se que a ação da Jelco caia ainda mais. Imagine agora um indivíduo com uma carteira parecida com a do mercado, e que esteja considerando a inclusão da Jelco em sua carteira. Por causa do *fator de ampliação* de 1,5 da Jelco, encararemos essa ação como um título que contribui bastante para o risco da carteira. (Mostraremos em breve que o *beta* do título médio no mercado é igual a 1.) A Jelco contribui mais para o risco de uma carteira ampla e diversificada do que um título médio, pois sua ação é mais sensível a oscilações do mercado. ■

Podemos adquirir conhecimento adicional a respeito da questão examinando o caso de títulos com betas negativos. Devemos encarar esses títulos como instrumentos de cobertura de riscos ou apólices de seguro. Esperamos que o título tenha bom desempenho quando o mercado vai mal, e vice-versa. Por causa dessa característica, a adição de um título com *beta* negativo a uma carteira ampla e diversificada reduz o risco da carteira.<sup>14</sup>

A Tabela 10.7 apresenta estimativas empíricas de betas de alguns títulos. Como pode ser visto, alguns títulos são mais sensíveis ao comportamento do mercado do que outros. Por exemplo, a Travelers, Inc. possui *beta* igual a 1,65. Isso significa que, para 1% de variação do mercado,<sup>15</sup> espera-se que a Travelers varie 1,65% na mesma direção. Inversamente, a Green Mountain Power tem *beta* de apenas 0,55. Isso quer dizer que, para uma variação de 1% do mercado, espera-se que a Green Mountain varie 0,55% na mesma direção.

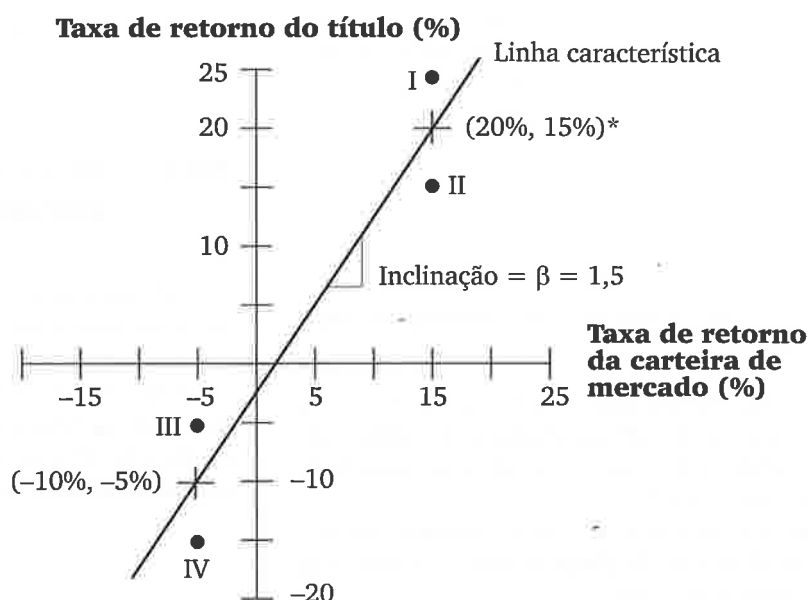
Podemos sintetizar a discussão de *beta* dizendo o seguinte:

**Beta mede a sensibilidade de um título a movimentos da carteira de mercado.**

<sup>14</sup> Infelizmente, as evidências empíricas mostram que praticamente não existem ações com betas negativos.

<sup>15</sup> Na Tabela 10.7, utilizamos o Standard & Poor's 500 como índice representativo da carteira de mercado.

■ FIGURA 10.10 Desempenho de Jelco, Inc. e do mercado.



Os dois pontos assinalados por X representam o retorno esperado da Jelco para cada comportamento possível da carteira de mercado. O retorno esperado de Jelco está diretamente relacionado ao do mercado. Como a inclinação é igual a 1,5, dizemos que o beta de Jelco é 1,5. Beta mede a sensibilidade do retorno do título a oscilações de todo o mercado.

\*  $(20\%, 15\%)$  é o ponto no qual o retorno do título é igual a 20% e o retorno da carteira de mercado é igual a 15%.

■ TABELA 10.7 Estimativas de beta de algumas ações selecionadas.

| Ação                          | Beta |
|-------------------------------|------|
| Ações com beta elevado:       |      |
| Bank of America               | 1,55 |
| Borland International         | 2,35 |
| Travelers, Inc.               | 1,65 |
| Ações com beta intermediário: |      |
| Du Pont                       | 1,00 |
| Kimberly-Clark Corp.          | 0,90 |
| Microsoft                     | 1,05 |
| Ações com beta baixo:         |      |
| Green Mountain Power          | 0,55 |
| Homestake Mining              | 0,20 |
| Oracle, Inc.                  | 0,49 |

O beta é definido por  $\text{Cov}(R_i, R_M) / \text{Var}(R_M)$ , onde  $\text{Cov}(R_i, R_M)$  é a covariância entre o retorno de uma ação individual,  $R_i$ , e o retorno do mercado,  $R_M$ .  $\text{Var}(R_M)$  é a variância da taxa de retorno do mercado,  $R_M$ .

### Fórmula de beta

Até o momento, nossa discussão enfatizou a intuição por trás de beta. A definição de beta é

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)} \quad (10.15)$$

onde  $\text{Cov}(R_i, R_M)$  é a covariância entre os retornos do ativo  $i$  e da carteira de mercado e  $\sigma^2(R_M)$  é a variância do mercado.

Uma propriedade útil é a de que o beta médio de todos os títulos, quando ponderado pela proporção do valor de mercado de cada título em relação ao da carteira de mercado, é igual a 1. Ou seja,

$$\sum_{i=1}^N X_i \beta_i = 1 \quad (10.16)$$

onde  $X_i$  é a proporção entre o valor de mercado do título  $i$  e o do mercado em sua totalidade.

A equação (10.16) é intuitiva, se você pensar um pouco a respeito. Se ponderar todos os títulos por seus valores de mercado, a carteira resultante será a carteira de mercado. Por definição, o beta da carteira de mercado é igual a 1. Ou seja, para cada ponto percentual de variação do mercado, o mercado deve variar um ponto percentual – *por definição*.

### Um teste

Incluimos as seguintes perguntas em exames anteriores de finanças:

1. Que tipo de investidor encara racionalmente a variância (ou o desvio-padrão) do retorno de um título isolado como a medida apropriada de risco desse título?
2. Que tipo de investidor encara racionalmente o beta de um título como a medida apropriada de risco desse título?

Uma resposta apropriada poderia ser a seguinte:

Um investidor racional encara a variância (ou o desvio-padrão) do retorno de sua carteira como a medida apropriada do risco de sua carteira. Se, por algum motivo, o investidor possuir apenas um título, a variância do retorno desse título será a variância do retorno da carteira. Portanto, a variância do retorno do título será a medida apropriada do risco do título.

Se um indivíduo possuir uma carteira diversificada, ainda encarará a variância (ou o desvio-padrão) do retorno da carteira como a medida apropriada do risco de sua carteira. Entretanto, não estará mais interessado na variância do retorno de cada título isolado. Ao contrário, estará interessado em conhecer a contribuição de um título isolado à variância da carteira.

Sob a hipótese de expectativas homogêneas, todos os indivíduos possuem a carteira de mercado. Portanto, medimos o risco pela contribuição de um título isolado à variância da carteira de mercado. Essa contribuição, quando padronizada adequadamente, é o beta do título. Embora muito poucos investidores detenham a carteira de mercado exatamente, muitos possuem carteiras razoavelmente diversificadas. Essas carteiras são suficientemente próximas da carteira de mercado para que o beta de um título tenda a ser uma medida razoável de risco.

- Qual é a fórmula de beta?
- Por que beta é a medida apropriada de risco de um título numa carteira ampla?

## 10.9 RELAÇÃO ENTRE RISCO E RETORNO ESPERADO (CAPM)

É comum argumentar que o retorno esperado de um ativo deve estar positivamente relacionado a seu risco. Ou seja, os indivíduos aplicarão num ativo com risco somente se seu retorno esperado compensar seu risco. Nesta seção, estimamos inicialmente o retorno esperado da carteira de todo o mercado. A seguir, estimamos o retorno esperado de títulos isolados.

### Retorno esperado do mercado

Os economistas financeiros freqüentemente argumentam que o retorno esperado do mercado pode ser representado da seguinte maneira:

$$\bar{R}_M = R_F + \text{Prêmio por risco}$$

Em palavras, o retorno esperado do mercado é igual à taxa livre de risco mais alguma compensação pelo risco inerente à carteira de mercado. Note que a equação refere-se ao retorno *esperado* do mercado, e não o retorno ocorrido num dado mês ou ano. Como as ações têm risco, o retorno ocorrido no mercado num período qualquer pode, evidentemente, ficar abaixo de  $R_F$ , ou até mesmo ser negativo.

Como os investidores exigem compensação por risco, o prêmio por risco é presumivelmente positivo. No entanto, exatamente quão positivo? Em geral, diz-se que a melhor estimativa do prêmio por risco futuro é dada pelo prêmio por risco médio registrado no passado. Como foi indicado na Tabela 9.2, Ibbotson e Sinquefeld constataram que o retorno médio de ações ordinárias foi igual a 13,0% ao ano durante o período de 1926 a 1997. A média da taxa livre de risco no mesmo período foi de 3,8%. Portanto, a diferença média entre os dois retornos foi de 9,2% (13,0% – 3,8%). Os economistas financeiros usam esse resultado como melhor estimativa da diferença a ocorrer no futuro. Nós o utilizaremos freqüentemente neste livro.

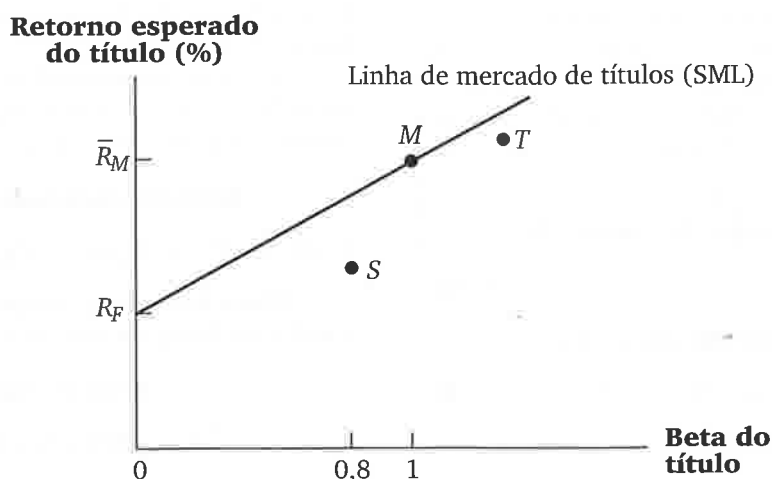
Por exemplo, sendo a taxa livre de risco, geralmente estimada pelo retorno esperado de uma letra do tesouro com prazo de um ano, igual a 4%, o retorno esperado do mercado seria

$$13,2\% = 4\% + 9,2\%$$

### ? QUESTÕES CONCEITUAIS

- Se todos os investidores tiverem expectativas homogêneas, que carteira de ativos com risco possuirão?

■ FIGURA 10.11 Relação entre retorno esperado de um título isolado e seu beta.



### Retorno esperado de um título isolado

Agora que estimamos o retorno esperado de todo o mercado, qual será o retorno esperado de um título isolado? Argumentamos que o beta de um título é a medida apropriada de risco numa carteira ampla e diversificada. Como muitos investidores possuem carteiras diversificadas, o retorno esperado de um título deve estar diretamente associado a seu beta. Isso é ilustrado na Figura 10.11.

Na verdade, os economistas financeiros podem ser mais precisos quanto à relação entre retorno esperado e beta. Dizem que, sob condições plausíveis, a relação entre retorno esperado e beta pode ser representada pela seguinte equação.<sup>16</sup>

#### Modelo de precificação de ativos:

$$\bar{R} = R_F + \beta \times (\bar{R}_M - R_F) \quad (10.17)$$

|                                        |   |                           |   |                   |   |                                                                                      |
|----------------------------------------|---|---------------------------|---|-------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------|
| Retorno<br>esperado<br>de um<br>título | = | Taxa<br>livre de<br>risco | + | Beta do<br>título | × | Diferença<br>entre o retorno<br>esperado do<br>mercado e a<br>taxa livre de<br>risco |
|----------------------------------------|---|---------------------------|---|-------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------|

Essa fórmula, chamada de **modelo de precificação de ativos** (ou CAPM), diz que o retorno esperado de um título está linearmente relacionado a seu beta. Como o retorno médio do mercado tem sido superior à média da taxa livre de risco durante períodos bastante longos, presume-se que  $\bar{R}_M - R_F$  seja positivo. Assim, a fórmula indica que o retorno esperado de um título está

positivamente relacionado a seu beta. A fórmula pode ser ilustrada, considerando-se alguns casos especiais:

- Suponha-se que  $\beta = 0$ . Nesse caso,  $\bar{R} = R_F$ , ou seja, o retorno esperado do título é igual à taxa livre de risco. Como um título com beta igual a zero não possui risco relevante, seu retorno esperado deve ser igual à taxa livre de risco.
- Suponha-se que  $\beta = 1$ . A equação (10.17) reduz-se a  $\bar{R} = \bar{R}_M$ , ou seja, o retorno esperado do título é igual ao retorno esperado do mercado. Isso faz sentido, pois o beta da carteira de mercado é igual a 1.

A fórmula (10.17) pode ser representada graficamente pela reta ascendente na Figura 10.11. Note que a linha parte de  $R_F$  sobe até  $\bar{R}_M$  quando o beta é igual a 1. Essa reta é freqüentemente chamada de **linha de mercado de títulos (SML)**.

Tal como ocorre com qualquer reta, a SML possui um coeficiente de inclinação e um intercepto.  $R_F$ , a taxa livre de risco, é o intercepto. Como o beta de um título é medido no eixo horizontal, o coeficiente de inclinação é igual a  $\bar{R}_M - R_F$ . A reta terá inclinação positiva desde que o retorno esperado da carteira de mercado seja superior à taxa livre de risco. Como a carteira de mercado é um ativo com risco, a teoria indica que seu retorno esperado é superior à taxa livre de risco. Além disso, as evidências empíricas apresentadas no capítulo anterior mostraram que o retorno médio anual da carteira de mercado, nos últimos 72 anos, foi 9,2 pontos percentuais maior do que a taxa livre de risco.

<sup>16</sup> Esta relação foi proposta independentemente por John Lintner e William F. Sharpe.

## ■ EXEMPLO

As ações da Aardvark Enterprises têm beta igual a 1,5, e as ações da Zebra Enterprises têm beta igual a 0,7. A taxa livre de risco é igual a 7% e a diferença entre o retorno esperado do mercado e a taxa livre de risco é de 9,2%. Os retornos esperados dos dois títulos são:

**Retorno esperado da Aardvark:**

$$20,8\% = 7\% + 1,5 \times 9,2\% \quad (10.18)$$

**Retorno esperado da Zebra:**

$$13,44\% = 7\% + 0,7 \times 9,2\%$$

Devem ser mencionados três aspectos adicionais do CAPM:

1. *Linearidade.* A intuição por trás de uma curva positivamente inclinada é clara. Como o beta é a medida apropriada de risco, títulos com beta mais elevado devem ter retorno esperado superior ao de títulos de beta mais baixo. Entretanto, tanto a Figura 10.11 quanto a equação (10.17) mostram algo mais do que uma curva positiva inclinada: a relação entre retorno esperado e beta é uma linha *reta*.

É fácil mostrar que a linha da Figura 10.11 é reta. Para que se perceba isso, considere-se o título *S*, com beta igual a 0,8, digamos. Esse título é representado por um ponto situado abaixo da linha de mercado de títulos que vemos na figura. Qualquer investidor poderia replicar o beta do título *S*, aplicando numa carteira formada com 20% investidos no ativo livre de risco e 80% investidos num título com beta igual a 1. Entretanto, essa carteira assim construída estaria situada na SML. Em outras palavras, a carteira dominaria o título *S*, pois possui maior retorno esperado e o mesmo beta.

Consideremos agora o título *T*, com um beta maior do que 1. Esse título também está abaixo da SML na Figura 10.11. Qualquer investidor poderia replicar o beta do título *T* tomando dinheiro emprestado para investir num título com beta igual a 1. Essa carteira também deverá estar situada na SML, dominando o título *T*, portanto.

Como ninguém aplicaria em *S* ou *T*, seus preços de mercado cairiam. Esse ajuste de preços elevaria os retornos esperados dos dois títulos. O ajuste de preço prosseguiria até que os dois títulos ficassem exatamente sobre a linha de mercado de títulos. O exemplo anterior considerou duas ações superavaliadas e uma SML reta. Os títulos situados acima da SML estão *subavaliados*. Seus preços devem subir até que seus retornos esperados fiquem sobre a linha. Se a SML fosse curva, muitas ações estariam incorretamente precificadas. Em equilíbrio, os títulos só seriam adquiridos quando os preços variassem o suficiente para que a SML se transformasse numa reta. Em outras palavras, quando houvesse linearidade.

2. *Tanto carteiras quanto títulos.* Nossa discussão do CAPM considerou títulos isolados. A relação apresentada na Figura 10.11 e na equação (10.17) também é válida para carteiras?

Sim. Para compreendê-lo, considere uma carteira formada por investimentos iguais em nossos dois títulos, Aardvark e Zebra. O retorno esperado da carteira é

**Retorno esperado da carteira:**

$$17,12\% = 0,5 \times 20,8\% + 0,5 \times 13,44\% \quad (10.19)$$

O beta da carteira é simplesmente uma média ponderada dos betas dos dois títulos. Portanto, temos

**Beta da carteira:**

$$1,1 = 0,5 \times 1,5 + 0,5 \times 0,7$$

De acordo com o CAPM, o retorno esperado da carteira é

$$17,12\% = 7\% + 1,1 \times 9,2\% \quad (10.20)$$

Como o retorno esperado em (10.19) é igual ao retorno esperado em (10.20), o exemplo mostra que o CAPM é válido tanto para carteiras quanto para títulos isolados.

3. *Uma possível confusão.* Os alunos frequentemente confundem a SML, na Figura 10.11, com a linha de mercado de capitais (linha *II* na Figura 10.9). Na verdade, as duas linhas são muito diferentes. A linha de mercado de capitais representa o conjunto eficiente de carteiras formadas tanto com ativos com risco quanto o ativo sem risco. Cada ponto pertencente à linha é uma carteira. O ponto *A* é uma carteira formada completamente por ativos com risco. Todos os demais pontos da linha representam carteiras combinando os títulos contidos em *A* e o ativo livre de risco. Os eixos, na Figura 10.9, são o retorno esperado de uma *carteira* e o desvio-padrão do retorno de uma *carteira*. Não há títulos isolados situados na linha *II*.

A SML, na Figura 10.11, relaciona retorno esperado a beta. A Figura 10.11 difere da Figura 10.9 pelo menos de duas maneiras. Em primeiro lugar, beta está no eixo horizontal da Figura 10.11, e não o desvio-padrão, como na Figura 10.9. Em segundo lugar, a SML, na Figura 10.11, vale tanto para todos os títulos individuais como para todas as carteiras possíveis, ao passo que a linha *II* (a linha de mercado de capitais), na Figura 10.9, vale apenas para carteiras eficientes.

**QUESTÕES  
CONCEITUAIS**

- Por que a SML é uma linha reta?
- Que é modelo de precificação de ativos?
- Quais são as diferenças entre a linha de mercado de capitais e a linha de mercado de títulos?

## 10.10 RESUMO E CONCLUSÕES

Este capítulo enunciou os fundamentos da moderna teoria de carteiras. Os pontos básicos são os seguintes:

1. Este capítulo mostra como calcular o retorno esperado e a variância de retornos de títulos isolados, e a covariância e o coeficiente de correlação entre retornos de pares de títulos. A partir dessas estatísticas, podemos escrever o retorno esperado e a variância do retorno de uma carteira formada pelos títulos *A* e *B* do seguinte modo:

$$\text{Retorno esperado da carteira} = X_A \bar{R}_A + X_B \bar{R}_B$$

$$\text{Var(carteira)} = X_A^2 \sigma_A^2 + 2X_A X_B \sigma_{AB} + X_B^2 \sigma_B^2$$

2. De acordo com nossa notação, *X* representa a proporção de um título numa carteira. Variando-se *X*, pode-se construir o conjunto eficiente de carteiras. Representamos o conjunto eficiente no caso de dois ativos por uma curva, assinalando que o grau de curvatura do gráfico reflete a intensidade do efeito de diversificação: quanto menor a correlação entre os dois títulos, maior a curvatura. Sem demonstrá-lo, dissemos que a forma geral do conjunto eficiente também vale para um universo de vários ativos.
3. Assim como a fórmula da variância, no caso de dois ativos, é calculada a partir de uma matriz  $2 \times 2$ , a fórmula da variância é calculada a partir de uma matriz  $N \times N$ , no caso de *N* ativos. Mostramos que, no caso de grande número de ativos, há muito mais termos envolvendo covariâncias do que variâncias. Na verdade, os termos que envolvem variâncias são enfraquecidos pelo processo de diversificação na formação de uma carteira ampla, mas o mesmo não ocorre com os termos que contêm covariâncias. Assim, uma carteira diversificada pode eliminar parte do risco dos títulos individuais, mas não sua totalidade.
4. O conjunto eficiente de ativos com risco pode ser combinado com operações de empréstimo e aplicação à taxa de juros livre de risco. Nesse caso, um investidor racional sempre optará por aplicar na carteira de ativos com risco representada pelo ponto *A* na Figura 10.9. A seguir, ele poderá captar ou aplicar à taxa livre de risco para atingir qualquer ponto desejado da linha de mercado de capitais.
5. A contribuição de um título ao risco de uma carteira ampla e bem diversificada é proporcional à covariância do retorno do título com o retorno da carteira de mercado. Essa contri-

buição, quando padronizada, é chamada de beta. O beta de um título também pode ser interpretado como a sensibilidade do retorno de um título à taxa de retorno do mercado.

6. O CAPM diz que

$$\bar{R} = R_F + \beta(\bar{R}_M - R_F)$$

Em outras palavras, o retorno esperado de um título varia direta e linearmente com o beta do título.

## TERMOS FUNDAMENTAIS

Aversão a risco, 223  
Beta, 228  
Carteira, 210  
Carteira de mercado, 227  
Conjunto (viável) de oportunidades, 216  
Conjunto eficiente (fronteira eficiente), 217  
Correlação, 207  
Covariância, 207  
Expectativas homogêneas, 227  
Linha característica, 228  
Linha de mercado de capitais, 226  
Linha de mercado de títulos, 231  
Modelo de precificação de ativos, 231  
Princípio de separação, 227  
Risco diversificável (específico) (não sistemático), 222  
Risco sistemático (de mercado), 222

## LEITURAS RECOMENDADAS

*O modelo de precificação de ativos foi originalmente publicado em dois artigos clássicos:*

LINTNER, J. Security prices, risk and maximal gains from diversification. *Journal of Finance*, Dec. 1965.

SHARPE, W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, Sept. 1964. (William F. Sharpe recebeu o Prêmio Nobel de Economia em 1990, em reconhecimento pelo desenvolvimento do CAPM.)

*A influência fundamental de Harry Markowitz é descrita em:*

MARKOWITZ, H. Travels along the efficient frontier. *Dow Jones Asset Management*, May/June 1997.

## QUESTÕES E PROBLEMAS

### Retorno esperado, variância e covariância

- 10.1 A Srta. Sharp acha que a distribuição de taxas de retorno da ação da Q-mart é a seguinte:

| Estado da economia | Probabilidade de ocorrência do estado | Retorno da ação da Q-mart (%) |
|--------------------|---------------------------------------|-------------------------------|
| Depressão          | 0,10                                  | -4,5%                         |
| Recessão           | 0,20                                  | 4,4                           |
| Normal             | 0,50                                  | 12,0                          |
| Expansão           | 0,20                                  | 20,7                          |

a. Qual é o retorno esperado da ação?

b. Qual é o desvio-padrão dos retornos da ação?

- 10.2 Suponhamos que você tenha aplicado em apenas duas ações, A e B. Você acha que os retornos das ações dependem dos três estados seguintes da economia, que têm probabilidades iguais de ocorrência:

| Estado da economia | Retorno da ação A (%) | Retorno da ação B (%) |
|--------------------|-----------------------|-----------------------|
| Baixa              | 6,3                   | -3,7%                 |
| Normal             | 10,5                  | 6,4                   |
| Alta               | 15,6                  | 25,3                  |

a. Calcule o retorno esperado de cada ação.

b. Calcule o desvio-padrão dos retornos de cada ação.

c. Calcule a covariância e a correlação entre os retornos das duas ações.

- 10.3 O Sr. Henry pode investir nas ações da Highbull ou nas ações da Slowbear. Sua projeção dos retornos dessas duas ações é a seguinte:

| Situação da economia | Probabilidade de ocorrência | Retorno da ação da Highbull (%) | Retorno da ação da Slowbear (%) |
|----------------------|-----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Recessão             | 0,25                        | -2,0                            | 5,0                             |
| Normal               | 0,60                        | 9,2                             | 6,2                             |
| Expansão             | 0,15                        | 15,4                            | 7,4                             |

a. Calcule o retorno esperado de cada ação.

b. Calcule o desvio-padrão do retorno de cada ação.

c. Calcule a covariância e a correlação entre os retornos das duas ações.

### Carteiras

- 10.4 Uma carteira é formada por 120 ações da Atlas, negociadas a \$ 50 por ação, e 150 ações da Babcock, cotadas a \$ 20 por ação. Quais são os pesos das duas ações nesta carteira?

- 10.5 O título F tem retorno esperado igual a 12% e seu retorno tem desvio-padrão igual a 9%. O título G tem retorno esperado de 18% e desvio-padrão de 25% ao ano.

a. Qual é o retorno esperado de uma carteira composta por 30% do título F e 70% do título G?

b. Sendo o coeficiente de correlação entre os retornos de F e G igual a 0,2, qual é o desvio-padrão do retorno da carteira?

- 10.6 Suponha que os retornos esperados e os desvios-padrão dos retornos das ações A e B sejam iguais a  $\bar{R}_A = 0,15$ ,  $\bar{R}_B = 0,25$ ,  $\sigma_A = 0,1$  e  $\sigma_B = 0,2$ , respectivamente.

a. Calcule o retorno esperado e o desvio-padrão do retorno de uma carteira composta por 40% de A e 60% de B, sabendo-se que o coeficiente de correlação entre seus retornos é igual a 0,5.

b. Calcule o retorno esperado e o desvio-padrão do retorno de uma carteira composta por 40% de A e 60% de B, sabendo-se que o coeficiente de correlação entre seus retornos é igual a -0,5.

c. De que maneira o coeficiente de correlação afeta o desvio-padrão do retorno da carteira?

- 10.7 Suponha que Jean Smith possua 100 ações da Macrosoft e 300 ações da Intelligence. As ações da Macrosoft estão atualmente cotadas a \$ 80 por unidade, enquanto as ações da Intelligence são negociadas a \$ 40. O retorno esperado da Macrosoft é igual a 15%, enquanto o da Intelligence é de 20%. O desvio-padrão do retorno da Macrosoft é igual a 8%, ao passo que o da Intelligence é igual a 20%. O coeficiente de correlação entre os retornos das duas ações é 0,38.

a. Calcule o retorno esperado e o desvio-padrão de sua carteira.

b. Hoje ela vende 200 ações da Intelligence para pagar a anuidade de sua escola. Calcule o retorno esperado e o desvio-padrão de sua nova carteira.

- 10.8 Considere as taxas de retorno que poderia obter no próximo ano. Você pode aplicar na ação U ou na ação V.

| Estado da economia | Probabilidade de ocorrência do estado | Taxa de retorno da ação U (%) | Taxa de retorno da ação V (%) |
|--------------------|---------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| Recessão           | 0,2                                   | 7%                            | -5%                           |
| Normal             | 0,5                                   | 7                             | 10                            |
| Expansão           | 0,3                                   | 7                             | 25                            |

a. Determine o retorno esperado, a variância e o desvio-padrão dos retornos das ações U e V.

b. Determine a covariância e o coeficiente de correlação entre os retornos das ações U e V.

c. Determine o retorno esperado e o desvio-padrão do retorno de uma carteira formada por U e V com pesos iguais.

- 10.9 Suponha que existam apenas duas ações no mercado: A e B. Os retornos esperados dessas duas ações são iguais a 10% e 20%, enquanto os desvios-padrão dos retornos são 5% e 15%, respectivamente. O coeficiente de correlação entre os retornos das duas ações é igual a zero.

- Calcule o retorno esperado e o desvio-padrão de uma carteira composta por 30% de A e 70% de B.
- Calcule o retorno esperado e o desvio-padrão de uma carteira composta por 90% de A e 10% de B.
- Suponhamos que você tenha aversão a risco. Você aplicaria 100% de seu dinheiro na ação A? Aplicaria 100% na ação B?

10.10 Caso uma carteira tenha um peso positivo de cada ação, pode o retorno esperado da carteira ser maior do que o do ativo com maior retorno? Pode o retorno esperado da carteira ser menor do que o do ativo com menor retorno? Por quê?

10.11 A Srta. Maple está analisando dois títulos, A e B, e as informações relevantes são as seguintes:

| Estado da economia | Probabilidade | Retorno do título A (%) | Retorno do título B (%) |
|--------------------|---------------|-------------------------|-------------------------|
| Alta               | 0,4           | 3,0                     | 6,5                     |
| Baixa              | 0,6           | 15,0                    | 6,5                     |

- Calcule o retorno esperado e o desvio-padrão da taxa de retorno dos dois títulos.
- Suponha que a Srta. Maple tenha investido \$ 2.500 no título A e \$ 3.500 no título B. Calcule o retorno esperado e o desvio-padrão da taxa de retorno de sua carteira.
- Imagine que a Srta. Maple tenha emprestado de uma amiga 40 unidades do título B, atualmente cotado a \$ 50, e tenha vendido todas essas ações. (Prometeu a sua amiga devolver o mesmo número de ações daí a um ano.) A seguir, comprou unidades do título A com o dinheiro obtido com a venda de B, mais os \$ 6.000 que possuía. Calcule o retorno esperado e o desvio-padrão da taxa de retorno da carteira.

10.12 Uma corretora aconselhou-lhe a não investir em ações de empresas petrolíferas, porque, em sua opinião, são excessivamente arriscadas. Ela mostrou-lhe o quanto os preços dessas ações oscilaram no passado recente. Demonstrou que o desvio-padrão das ações de empresas petrolíferas é muito alto, relativamente à maioria das ações. Você acha que o conselho da corretora é apropriado para um investidor com aversão a risco como você? Por quê?

10.13 Há três títulos no mercado. O quadro a seguir mostra seus vários retornos possíveis.

| Cenário | Probabilidade | Retorno do título 1 | Retorno do título 2 | Retorno do título 3 |
|---------|---------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1       | 0,10          | 0,25                | 0,25                | 0,10                |
| 2       | 0,40          | 0,20                | 0,15                | 0,15                |
| 3       | 0,40          | 0,15                | 0,20                | 0,20                |
| 4       | 0,10          | 0,10                | 0,10                | 0,25                |

- Quais são o retorno esperado e o desvio-padrão da taxa de retorno de cada título?
- Quais são as covariâncias e as correlações para cada par de títulos?
- Quais são o retorno esperado e o desvio-padrão da taxa de retorno de uma carteira com metade de seus fundos aplicada no título 1 e metade aplicada no título 2?
- Quais são o retorno esperado e o desvio-padrão da taxa de retorno de uma carteira com metade de seus fundos aplicada no título 1 e metade aplicada no título 3?
- Quais são o retorno esperado e o desvio-padrão da taxa de retorno de uma carteira com metade de seus fundos aplicada no título 2 e metade aplicada no título 3?
- Que indicam suas respostas aos itens (a), (c), (d) e (e) a respeito da diversificação?

10.14 Suponha que haja duas ações, A e B, e que seus retornos sejam independentes. A ação A tem 40% de probabilidade de retorno de 15% e 60% de probabilidade de retorno igual a 10%. A ação B tem 50% de probabilidade de 35% de retorno e 50% de probabilidade de retorno igual a -5%.

- Escreva a lista de todos os resultados possíveis e suas probabilidades.
- Qual é o retorno esperado de uma carteira com 50% aplicados em A e 50% em B?

10.15 Suponha que existam  $N$  títulos no mercado. O retorno esperado de cada título é igual a 10%. Todos os títulos possuem a mesma variância, que é igual a 0,0144. A covariância de cada par de títulos é 0,0064.

- Quais são o retorno esperado e a variância de uma carteira contendo todos os  $N$  títulos com pesos iguais? Observação: o peso de cada título é igual a  $1/N$ .
- O que acontecerá à variância à medida que  $N$  aumentar?
- Que características de um título são mais importantes na determinação da variância do retorno de uma carteira bem diversificada?

10.16 A seguinte afirmação é verdadeira ou falsa? Por quê?

A característica mais importante para a determinação da variância do retorno de uma carteira bem diversificada é a variância das diversas ações que a compõem.

10.17 Explique sucintamente por que a covariância de um título com o restante da carteira é uma medida mais apropriada de risco do que a variância do título.

10.18 Comente a seguinte declaração feita por um importante analista de investimentos.

As ações que acompanham perfeitamente o mercado têm beta igual a 1. Os betas são maiores à medida que a volatilidade aumenta, e menores

quando a volatilidade diminui. Portanto, a Southern Co., uma concessionária de serviços de utilidade pública, cujas ações têm sido negociadas em torno de \$ 12 durante os últimos três anos, possui um beta baixo. No outro extremo, temos a ação da Texas Instruments, que no mesmo período variou entre um máximo de \$ 150 e o mínimo corrente de \$ 75.

- 10.19 Suponha que existam duas ações com as seguintes características. A covariância entre os retornos das duas ações é igual a 0,001.

|   | <i>Retorno esperado</i> | <i>Desvio-padrão</i> |
|---|-------------------------|----------------------|
| A | 0,05                    | 0,1                  |
| B | 0,10                    | 0,2                  |

- Qual é o retorno esperado da carteira de mínima variância? (Sugestão: determine os pesos  $X_A$  e  $X_B$  que fazem com que a variância do retorno da carteira seja mínima. Lembre-se de que a soma dos pesos deve ser igual a 1.)
  - Sendo  $\text{Cov}(R_A, R_B) = -0,02$ , quais serão os pesos que minimizam a variância?
  - Qual é a variância do retorno da carteira quando  $\text{Cov}(R_A, R_B) = -0,02$ ?
- 10.20 Suponha a existência de expectativas homogêneas (ou seja, todos os indivíduos acreditam nos mesmos retornos esperados e desvios-padrão). A carteira de mercado tem retorno esperado igual a 12% e desvio-padrão igual a 10%. A taxa de retorno do ativo livre de risco é de 5%.
- Qual deve ser o retorno esperado de uma carteira com desvio-padrão de 7%?
  - Qual deve ser o desvio-padrão de uma carteira com retorno esperado igual a 20%?
- 10.21 Considere as seguintes informações a respeito dos retornos da carteira de mercado e das ações da Fuji:

| <i>Tipo de mercado</i> | <i>Retorno esperado da carteira de mercado (%)</i> | <i>Retorno esperado da Fuji (%)</i> |
|------------------------|----------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Baixa                  | 2,5%                                               | 3,4%                                |
| Alta                   | 16,3                                               | 12,8                                |

- Calcule o beta da Fuji. Qual é a sensibilidade dos retornos da Fuji a movimentos do mercado?
  - Suponha que o retorno esperado da carteira de mercado seja igual a -4,0% quando o mercado está em baixa. Usando sua resposta no item (a), qual deve ser o retorno esperado da ação da Fuji nesse caso?
- 10.22 O personagem Polônio em *Hamlet* diz: "Não seja devedor, nem credor." De acordo com as hipóte-

ses do CAPM, qual deve ser a composição da carteira de Polônio?

- 10.23 Os títulos A, B e C possuem as seguintes características:

| <i>Título</i> | <i>E(R)%</i> | <i>Beta</i> |
|---------------|--------------|-------------|
| A             | 10%          | 0,7         |
| B             | 14           | 1,2         |
| C             | 20           | 1,8         |

- Qual é o retorno esperado de uma carteira formada com pesos iguais?
- Qual é o beta de uma carteira formada com pesos iguais?
- Os preços dos três títulos estão em equilíbrio?

### CAPM

- 10.24 A empresa Alpha produz equipamento pneumático. Seu beta é igual a 1,2. O prêmio por risco de mercado é 8,5% e a taxa livre de risco atual é 6%. Qual é o retorno esperado da Alpha?
- 10.25 Suponha que o beta da Ross Corporation seja igual a 0,80. A taxa livre de risco é de 6% e o prêmio por risco de mercado é igual a 8,5%. Qual é o retorno esperado da Ross Corporation?
- 10.26 A taxa livre de risco é igual a 8%. O beta da Jordan Company é 1,5 e o retorno esperado do mercado é 15%. Qual é o retorno esperado da Jordan Company?
- 10.27 Suponhamos que o prêmio por risco de mercado seja de 7,5% e a taxa livre de risco seja igual a 3,7%. O retorno esperado da TriStar Textiles é igual a 14,2%. Qual é o beta da empresa?
- 10.28 Considerem-se as seguintes ações:

|                      | <i>Beta</i> | <i>Retorno esperado</i> |
|----------------------|-------------|-------------------------|
| Murck Pharmaceutical | 1,4         | 25%                     |
| Pizer Drug Corp.     | 0,7         | 14%                     |

Suponha que o CAPM seja válido. De acordo com o CAPM, qual é o retorno esperado do mercado? Qual é o valor da taxa livre de risco?

- 10.29 Suponha que seja observada a seguinte situação:

| <i>Estado da economia</i> | <i>Probabilidade</i> | <b>Retorno se estado ocorrer</b> |               |
|---------------------------|----------------------|----------------------------------|---------------|
|                           |                      | <i>Ação A</i>                    | <i>Ação B</i> |
| Recessão                  | 0,25                 | -0,10                            | -0,30         |
| Normal                    | 0,50                 | 0,10                             | 0,05          |
| Expansão                  | 0,25                 | 0,20                             | 0,40          |

- Calcule o retorno esperado de cada ação.
- Supondo que o CAPM seja válido e o beta da ação A seja 0,25 maior do que o beta da ação B, qual é o valor do prêmio por risco?

- 10.30 a. Desenhe a linha de mercado de títulos no caso em que o prêmio por risco de mercado é igual a 5% e a taxa livre de risco é igual a 7%.
- b. Suponha que um ativo tem beta igual a -1 e retorno esperado igual a 4%. Coloque-o no gráfico desenhado no item (a). O ativo está corretamente avaliado? Caso contrário, explique o que ocorrerá nesse mercado.
- c. Suponha que um ativo tem beta igual a 3 e retorno esperado de 20%. Coloque-o no gráfico desenhado no item (a). O ativo está corretamente avaliado? Se não estiver, explique o que ocorrerá nesse mercado.
- 10.31 Uma ação tem beta igual a 1,8. Um analista de títulos especializado nessa ação espera que seu retorno futuro seja de 18%. Imagine que a taxa livre de risco seja de 5% e que o prêmio por risco de mercado seja igual a 8%. Esse analista é pessimista ou otimista em relação a essa ação, em comparação com as expectativas do mercado?
- 10.32 Suponha que o retorno esperado do mercado seja de 13,8% e que a taxa livre de risco seja igual a 6,4%. A ação da Solomon, Inc. tem beta igual a 1,2.
- a. Qual é o retorno esperado da ação da Solomon?
- b. Se a taxa livre de risco diminuir para 3,5%, qual será o retorno esperado da ação da Solomon?
- 10.33 O retorno esperado de uma carteira que combina o ativo livre de risco e o ativo situado no ponto de tangência com o conjunto eficiente é igual a 25%. O retorno esperado foi calculado sob as seguintes condições:
- A taxa livre de risco é igual a 5%.
- O retorno esperado da carteira de mercado de ativos com risco é 20%.
- O desvio-padrão do retorno da carteira eficiente é 4%.
- Nesse ambiente, que retorno esperado teria um título se possuísse correlação igual a 0,5 com o mercado, além de um desvio-padrão igual a 2%?
- 10.34 Suponha que a taxa livre de risco corrente seja igual a 7,6%. A ação da Potpourri, Inc tem beta igual a 1,7 e seu retorno esperado é de 16,7%. (Considere que o CAPM seja válido.)
- a. Qual é o prêmio por risco de mercado?
- b. A ação da Magnolia Industries tem beta de 0,8. Qual é o retorno esperado da ação da Magnolia?
- c. Suponha ter aplicado \$ 10.000 tanto em ações da Potpourri quanto da Magnolia, e que o beta da carteira seja igual a 1,07. Quanto teria aplicado em cada ação? Qual é o retorno esperado da carteira?
- 10.35 Suponha que a taxa livre de risco seja de 6,3% e que a carteira de mercado tenha retorno espera-

do de 14,8%. A carteira de mercado também possui variância de 0,0121. A carteira Z tem um coeficiente de correlação, com o mercado, igual a 0,45, e sua variância é 0,0169. De acordo com o CAPM, qual é a taxa esperada de retorno da carteira Z?

Foram obtidos os seguintes dados para a Durham Company:

Variância do retorno do mercado = 0,04326

Covariância dos retornos da Durham com o mercado = 0,0635

Suponha que o prêmio por risco de mercado seja igual a 9,4% e que o retorno esperado de letras do tesouro seja de 4,9%.

a. Escreva a equação da linha de mercado de títulos.

b. Qual é o retorno exigido para a Durham Company?

- 10.37 A ação da Johnson Paint tem retorno esperado de 19%, com beta igual a 1,7, ao passo que a ação da Williamson Tire tem retorno esperado de 14%, com beta igual a 1,2. Suponha que o CAPM seja válido. Qual é o retorno esperado da carteira de mercado? Qual é o valor da taxa livre de risco?

- 10.38 A afirmação a seguir é verdadeira ou falsa? Por quê?

Um título com risco não pode ter retorno esperado inferior à taxa livre de risco, porque nenhum investidor com aversão a risco estaria disposto a aplicar neste título, em equilíbrio.

- 10.39 Suponha que você tenha aplicado \$ 30.000 nas quatro ações a seguir:

| Título | Montante investido | Beta |
|--------|--------------------|------|
| Ação A | \$ 5.000           | 0,75 |
| Ação B | 10.000             | 1,10 |
| Ação C | 8.000              | 1,36 |
| Ação D | 7.000              | 1,88 |

A taxa livre de risco é igual a 4% e o retorno esperado da carteira de mercado é 15%. Com base no CAPM, qual é o retorno esperado da carteira anterior?

- 10.40 Você recebeu os seguintes dados a respeito dos títulos de três empresas, bem como do mercado:

| Título               | $\bar{R}_i$ | $\sigma_i$ | $\rho_{iM}$ | $\beta_i$ |
|----------------------|-------------|------------|-------------|-----------|
| Empresa A            | 0,13        | 0,12       | (i)         | 0,90      |
| Empresa B            | 0,16        | (ii)       | 0,40        | 1,10      |
| Empresa C            | 0,25        | 0,24       | 0,75        | (iii)     |
| Mercado              | 0,15        | 0,10       | (iv)        | (v)       |
| Ativo livre de risco | 0,05        | (vi)       | (vii)       | (viii)    |

onde:

$\bar{R}_i$  = retorno médio do título i.

$\sigma_i$  = desvio-padrão do retorno de i.

- $\rho_{iM}$  = coeficiente de correlação entre o retorno do ativo  $i$  e o da carteira de mercado.
- $\beta_i$  = coeficiente beta do título  $i$ .

Suponha que o CAPM seja válido.

- Insira os números ausentes da tabela.
- Faça uma avaliação do desempenho de investimentos nas três empresas.
- Qual é sua recomendação para fins de aplicação? Por quê?

10.41 Existem duas ações no mercado, A e B. O preço corrente da ação A é \$ 50. O preço da ação A daqui a um ano será igual a \$ 40 se a economia entrar em recessão, \$ 55 se a economia estiver em situação normal, e \$ 60 se a economia se expandir. As probabilidades correspondentes de recessão, situação normal e expansão são 0,1, 0,8 e 0,1, respectivamente. A ação A não paga dividendos. Suponha que o CAPM seja válido. Outras informações a respeito do mercado incluem:

- $DP(R_M)$  = desvio-padrão do retorno da carteira de mercado = 0,10
- $DP(R_B)$  = desvio-padrão do retorno da ação B = 0,12
- $\bar{R}_B$  = retorno esperado da ação B = 0,09
- $\text{Corr}(R_A, R_M)$  = correlação entre os retornos de A e do mercado = 0,8
- $\text{Corr}(R_B, R_M)$  = correlação entre os retornos de B e do mercado = 0,2
- $\text{Corr}(R_A, R_B)$  = correlação entre os retornos de A e de B = 0,6
- Se você fosse um investidor típico, com aversão a risco, que ação preferiria? Por quê?
  - Quais são o retorno esperado e o desvio-padrão do retorno de uma carteira contendo 70% da ação A e 30% da ação B?
  - Qual é o beta da carteira indicada no item (b)?

## APÊNDICE 10A

### Beta está morto?

O modelo de precificação de ativos representa um dos avanços mais importantes na teoria de finanças. É claramente útil para fins de investimento, porque mostra como o retorno esperado de um ativo está relacionado a seu beta. Além disso, mostraremos no Capítulo 12 que também é útil em finanças de empresas, pois a taxa de desconto de um projeto é uma função do beta do projeto. Entretanto, nunca podemos ignorar que, tal como ocorre com qualquer outro modelo, o CAPM não é uma verdade divina, e sim uma teoria a ser empiricamente testada.

Os primeiros testes empíricos do CAPM foram feitos mais de 20 anos atrás e seus resultados foram muito favoráveis. Usando dados da década de 30 à década de 60, os pesquisadores mostraram que o retorno médio de uma carteira de ações estava positivamente relacionado ao beta da carteira,<sup>17</sup> uma constatação compatível com o CAPM. Embora algumas evidências obtidas nesses estudos fossem menos condizentes com o CAPM,<sup>18</sup> os economistas financeiros rapidamente endossaram o CAPM, em vista desses trabalhos empíricos.

Embora tenha surgido um grande volume de trabalho empírico nas décadas seguintes, geralmente com resultados discrepantes, o CAPM não foi seriamente questionado até recentemente. Dois trabalhos de Fama e French<sup>19</sup> (sim, o mesmo Fama cujo trabalho de 1973, em conjunto com James MacBeth, foi favorável ao CAPM) apresentam evidências incompatíveis com o modelo. Seu trabalho tem recebido muita atenção, tanto nos círculos acadêmicos quanto na imprensa popular, e há artigos de jornal com títulos tais como "Beta Está Morto!" Esses trabalhos apresentam dois fatos correlatos. Em primeiro lugar, concluem que a relação entre retorno médio e beta é fraca, no período de 1963 a 1990. Em segundo lugar, argumentam que o retorno médio de um título está negativamente relacionado tanto ao índice preço/lucro (P/L) da empresa quanto ao quociente entre valor de mercado e valor patrimonial da empresa (VM/VP). Essas conclusões, se confirmadas por pesquisas adicionais, seriam bastante danosas para o CAPM. Afinal de contas, o CAPM diz que os retornos esperados de ações devem estar relacionados somente a beta, e não a outros fatores, tais como P/L e VM/VP.

Entretanto, vários pesquisadores têm criticado os trabalhos de Fama e French. Embora não façamos aqui uma discussão aprofundada dos detalhes desse debate, mencionamos alguns aspectos. Em primeiro lugar, embora Fama e French não rejeitem a hipótese de que os retornos médios não tenham relação com beta, tampouco não é possível rejeitar a hipótese de que os retornos médios estejam relacionados a beta, como diz o CAPM. Em outras palavras, embora 50 anos de dados pareçam muita coisa, podem simplesmente não ser suficientes para testar o CAPM adequadamente. Em segundo lugar, o resultado envolvendo P/L e VM/VP pode ser atribuível a

17. Talvez os dois trabalhos mais conhecidos sejam: BLACK, Fischer; JENSEN, Michael C.; SCHOLES, Myron S. The capital asset pricing model: some empirical tests. Ver JENSEN, M. (Org.). *Studies in the theory of capital markets*. New York: Praeger, 1972; e FAMA, Eugene F.; MacBETH, James. Risk, return and equilibrium: some empirical tests. *Journal of Political Economy* 81, p. 607-636, 1973.

18. Por exemplo, os estudos indicam que o retorno médio de uma carteira com beta igual a zero é superior à taxa livre de risco, o que não é compatível com o CAPM.

19. FAMA, Eugene F.; FRENCH, Kenneth R. The cross-section of expected stock returns. *Journal of Finance* 47, p. 427-466, 1992; FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics* 17, p. 3-56, 1993.

uma falácia estatística denominada viés de seleção.<sup>20</sup> Em terceiro lugar, P/L e VM/VP são apenas dois dentro de um conjunto infinitamente grande de fatores possíveis. Portanto, a relação entre retorno médio e tanto P/L quanto VM/VP pode ser espúria, resultando apenas da utilização de um grande número de variáveis. Em quarto lugar, os retornos médios estão positivamente relacionados a beta no período de 1927 até o presente. Parece não haver razão forte para enfatizar um período mais curto

do que esse. Em quinto lugar, os retornos médios estão positivamente associados a beta em períodos mais curtos, quando são usados dados anuais, e não mensais, para estimar beta.<sup>21</sup> Não parece haver motivo forte para preferir dados mensais a dados anuais, e vice-versa. Portanto, acreditamos que, embora os resultados de Fama e French sejam bastante interessantes, não podem ser considerados como palavra final sobre o assunto.

<sup>20</sup> Por exemplo, ver BREEN, William J.; KORACZYK, Robert A. On selection biases in book-to-market based tests of asset pricing models. Trabalho não publicado, Northwestern University, Nov. 1993; e KOTHARI, S. P.; SHANKEN, Jay; SLOAN, Richard G. Another look at the cross-section of expected stock returns. *Journal of Finance*, Mar. 1995.

<sup>21</sup> O quarto e o quinto aspectos são discutidos no trabalho de Kothari, Shanken e Sloan.