Aula 16

Integração por partes

Há essencialmente dois métodos empregados no cálculo de integrais indefinidas (primitivas) de funções elementares. Um deles é a integração por substituição, explorada na aula 15, que retomaremos adiante, em novos casos. O outro método é chamado de *integração por partes*, que exploraremos nesta aula.

Suponhamos que $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são duas funções deriváveis em um certo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Então, para cada x em I, temos

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Assim sendo,

$$\int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\, dx = u(x)v(x) + C$$

ou seja,

$$\int v(x)u'(x)\, dx + \int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) + C$$

Podemos escrever ainda

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\, dx} \tag{16.1}$$

aqui considerando que a constante genérica C já está implícita na última integral.

Sendo $u = u(x)$ e $v = v(x)$, temos

$du = u'(x)\, dx$ e $dv = v'(x)\, dx$, e passamos a fórmula 16.1 à forma abreviada

$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du} \tag{16.2}$$

As fórmulas 16.1 e 16.2 são chamadas fórmulas de integração por partes.

Exemplo 16.1 *Calcular* $\int x \operatorname{sen} x \, dx$.

Solução. Tomaremos $u = x$, e $dv = \operatorname{sen} x \, dx$.

Teremos $du = 1 \, dx = dx$, e $v = \int \operatorname{sen} x \, dx$.

Para os propósitos da integração por partes, basta tomar $v = -\cos x$, menosprezando a constante arbitrária da integral $v = \int \operatorname{sen} x \, dx$, pois uma tal escolha da função v é suficiente para validar a fórmula 16.2.

Temos então

$$\begin{aligned}
\int x \operatorname{sen} x \, dx &= \int u \cdot dv \\
&= u \cdot v - \int v \cdot du \\
&= x \cdot (-\cos x) - \int (-\cos x) \, dx \\
&= -x \cos x + \int \cos x \, dx \\
&= -x \cos x + \operatorname{sen} x + C
\end{aligned}$$

Exemplo 16.2 *Calcular* $\int x \ln x \, dx$.

Solução. Tomamos $u = \ln x$, e $dv = x \, dx$.

Teremos $du = \frac{1}{x} \, dx$, e $v = \int x \, dx$. Tomamos $v = \frac{x^2}{2}$.

Temos então

$$\begin{aligned}
\int x \ln x \, dx &= \int u \cdot dv \\
&= u \cdot v - \int v \cdot du \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C
\end{aligned}$$

Exemplo 16.3 *Calcular* $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx$.

Solução. Faremos $u = \operatorname{arc\,tg} x$, e $dv = dx$.

E então $du = \frac{1}{1 + x^2} dx$, $v = x$. Daí,

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \int u \, dv = uv - \int v \, du$$
$$= x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

Para calcular a integral $J = \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$, procedemos a uma mudança de variável:

Fazendo $w = 1 + x^2$, temos $dw = 2x\,dx$, e então $x\,dx = \frac{1}{2}dw$. Daí,

$J = \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{w}\, dw = \ln|w| + C = \ln(1+x^2) + C.$

Portanto, $\int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \cdot \operatorname{arc\,tg} x - \ln(1+x^2) + C$.

16.1 Um estratégia para integrar por partes

Poderíamos dizer que o propósito da integração por partes é transferir o cálculo de uma integral $\int u \cdot dv$ para o cálculo de uma integral $\int v \cdot du$ (a qual espera-se que saibamos calcular), pela fórmula de integração por partes, $\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

Ao integrar por partes, uma integral da forma $\int f(x)g(x)\, dx$, devemos sempre escolher, dentre as duas funções da expressão $f(x)g(x)\, dx$, uma delas como sendo o fator u e a outra como parte de uma diferencial dv.

Em outras palavras, podemos fazer $u = f(x)$ e $dv = g(x)\, dx$, ou $u = g(x)$ e $dv = f(x)\, dx$ (ou ainda $u = f(x)g(x)$ e $dv = 1\, dx$!). Mas esta escolha não pode ser feita de modo aleatório. Temos que ser espertos em nossa escolha para que, ao passarmos da integral $\int u\, dv$ para a integral $\int v\, du$, passemos a uma integral tecnicamente mais simples de ser calculada.

Uma sugestão que funciona bem na grande maioria das vezes é escolher as funções u e v segundo o critério que descreveremos abaixo. Ele foi publicado como uma pequena nota em uma edição antiga da revista *American Mathematical Monthly*.

Considere o seguinte esquema de funções elementares:

L	I	A	T	E
Logarítmicas	**I**nversas de trigonométricas	**A**lgébricas	**T**rigonométricas	**E**xponenciais

No esquema acima, as letras do anagrama LIATE são iniciais de diferentes tipos de funções.

Uma estratégia que funciona bem é: ao realizar uma integração por partes, escolher, dentre as duas funções que aparecem sob o sinal de integral,

- como função u: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à esquerda no anagrama;
- como formando a diferencial dv: a função cuja letra inicial de caracterização posiciona-se mais à direita no anagrama.

Sumarizando, u deve caracterizar-se pela letra mais próxima de L, e dv pela letra mais próxima de E.

Esta estratégia já foi adotada nos exemplos desenvolvidos anteriormente!

1. Na integral $\int x \operatorname{sen} x\, dx$, exemplo 16.1, fizemos
   $u = x$ (Algébrica) e $dv = \operatorname{sen} x\, dx$ (Trigonométrica).
   No anagrama LIATE, A precede T.
2. Na integral $\int x \ln x\, dx$, exemplo 16.2, fizemos
   $u = \ln x$ (Logarítmica) e $dv = x\, dx$ (Algébrica).
   No anagrama LIATE, L precede precede A.
3. Na integral $\int \operatorname{arc\,tg} x\, dx$, exemplo 16.3, fizemos
   $u = \operatorname{arc\,tg} x$ (Inversa de trigonométrica), e $dv = 1\, dx$ (Algébrica).
   No anagrama LIATE, I precede A.

Passaremos agora a um exemplo interessante e imprescindível.

Exemplo 16.4 *Calcular* $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$.

Solução. Seguindo a sugestão dada acima, faremos

$u = \operatorname{sen} x$ (trigonométrica), $dv = e^x\, dx$ (exponencial). T vem antes de E no anagrama LIATE.

Temos então $du = (\operatorname{sen} x)' dx = \cos x\, dx$, e tomamos $v = e^x$. Daí,

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} x\, dx &= \int u\, dv = uv - \int v\, du \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x\, dx\end{aligned}$$

Parece que voltamos ao ponto de partida, não é mesmo? Passamos da integral $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$ à integral $\int e^x \cos x\, dx$, equivalente à primeira em nível de dificuldade.

Continuaremos, no entanto, a seguir a receita do anagrama.

Na integral $J = \int e^x \cos x\, dx$ faremos

$u = \cos x$, $dv = e^x\, dx$. (Estas funções u e v são definidas em um novo contexto. Referem-se à esta segunda integral.)

Teremos $du = (\cos x)'dx = -\operatorname{sen} x\, dx$, e $v = e^x$, e então

$$\begin{aligned} J = \int e^x \cos x\, dx = \int u\, dv &= uv - \int v\, du \\ &= e^x \cos x - \int (-\operatorname{sen} x) e^x\, dx \\ &= e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx \end{aligned}$$

O resultado final é interessante. Chamando $I = \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$,

$$\begin{aligned} I = \int e^x \operatorname{sen} x\, dx &= e^x \operatorname{sen} x - J \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \left(e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x\, dx\right) \\ &= e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I \end{aligned}$$

Portanto,

$$I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - I$$

ou seja,

$$2I = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x + C$$

e então obtemos

$$I = \frac{1}{2}(e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x) + C$$

Exemplo 16.5 *Calcular* $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad (a > 0)$.

Aqui podemos integrar por partes, mas o anagrama LIATE não nos é de serventia, já que a integral involve apenas expressões algébricas.

Faremos $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$.

Então $du = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$, e tomamos $v = x$. Daí,

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int u\, dv \\ &= uv - \int v\, du \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \end{aligned}$$

Agora fazemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx &= \int \frac{-(a^2-x^2)+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\
&= -\int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\
&= -\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\
&= -I + a^2\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \\
&= -I + a^2\cdot \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C
\end{aligned}$$

Portanto,

$$I = x\sqrt{a^2-x^2} - I + a^2\cdot \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C$$

de onde então

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C$$

Um modo mais apropriado de abordar integrais com expressões da forma $x^2 \pm a^2$, ou $a^2 - x^2$, será retomado adiante, quando fizermos um estudo de *substituições trigonométricas*.

16.2 Problemas

1. Repetindo procedimento análogo ao usado no exemplo 16.5, mostre que

$$\int \sqrt{x^2+\lambda}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\lambda} + \frac{\lambda}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}| + C$$

2. Calcule as seguintes integrais.

   (a) $\int xe^x\,dx$. *Resposta.* $e^x(x-1)+C$.

   (b) $\int \ln x\,dx$. *Resposta.* $x(\ln x - 1) + C$.

   (c) $\int x^n \ln x\,dx$ $(n \neq -1)$. *Resposta.* $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C$.

   (d) $\int \ln(1+x^2)\,dx$. *Resposta.* $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arc\,tg} x + C$.

   (e) $\int x \operatorname{arc\,tg} x\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}[(x^2+1)\operatorname{arc\,tg} x - x] + C$.

   (f) $\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx$. *Resposta.* $x\operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + C$.

   (g) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + C$.
   Sugestão. Imite os procedimentos usados no exemplo 16.5.

(h) $\int x \operatorname{arc\,sen} x\, dx$. *Resposta.* $\frac{1}{4}[(2x^2-1)\operatorname{arc\,sen} x + x\sqrt{1-x^2}] + C$.

(i) $\int e^{\sqrt{x}}\, dx$. *Resposta.* $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$.

(j) $\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}\, dx$. *Resposta.* $(x+1)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C$.
Sugestão. Ao deparar-se com $\int \frac{x}{2\sqrt{x}(1+x)}dx$, faça $z = \sqrt{x}$.

(k) $\int \frac{\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. *Resposta.* $2\sqrt{x}\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x} + C$.

(l) $\int \operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{x}{x+1}}\, dx$. *Resposta.* $x \operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{x}{x+1}} - \sqrt{x} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} + C$.
Sugestão. Não se deixe intimidar. Comece fazendo $u = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{\frac{x}{x+1}}$, $dv = dx$.

(m) $\int x\cos^2 x\, dx$. *Resposta.* $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\cos 2x + C$.
Sugestão. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

(n) $\int (x^2+7x-5)\cos 2x\, dx$.
Resposta. $(x^2+7x-5)\frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + (2x+7)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + C$.

(o) $\int e^{ax}\cos bx\, dx$. *Resposta.* $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(b\operatorname{sen} bx + a\cos bx) + C$.

(p) $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\, dx$. *Resposta.* $\frac{1}{a^2+b^2}e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx) + C$.

(q) $\int \frac{x\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$. *Resposta.* $x - \sqrt{1-x^2}\operatorname{arc\,sen} x + C$.

(r) $\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x^2}dx$.
Resposta. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| - \frac{1}{x}\operatorname{arc\,sen} x + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| - \frac{1}{x}\operatorname{arc\,sen} x + C$.
Sugestão. Faça $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$, quando necessário, e então $z = \sqrt{1-x^2}$.

(s) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\, dx$. *Resposta.* $x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$.

(t) $\int \frac{x\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + C$.

3. Ao calcular a integral $\int \frac{1}{x}dx$, Joãozinho procedeu da seguinte maneira.
Fazendo $u = \frac{1}{x}$, *e* $dv = dx$, *podemos tomar* $v = x$, *e teremos* $du = -\frac{1}{x^2}dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x}dx &= \int u\, dv = uv - \int v\, du \\ &= \frac{1}{x}\cdot x - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx\end{aligned}$$

Sendo $J = \int \frac{1}{x}dx$, *temos então* $J = 1 + J$, *logo* $0 = 1$.
Onde está o erro no argumento de Joãozinho?

4. Mostre que $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+\lambda)^2}dx = \frac{-x}{2(x^2+\lambda)} + \int \frac{dx}{x^2+\lambda}$.
Sugestão. Faça $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+\lambda)^2}dx = \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{x}{(x^2+\lambda)^2}dx}_{dv}$.

5. Usando o resultado do problema 4, calcule (considere $a > 0$)

   (a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$. (b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(a^2-x^2)^2}dx$.

   Respostas. (a) $\frac{-x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C$. (b) $\frac{x}{2(a^2-x^2)} - \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

6. Mostre que

$$\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^2} = \frac{x}{2\lambda(x^2+\lambda)} + \frac{1}{2\lambda}\int \frac{dx}{x^2+\lambda}$$

   Sugestão. $\int \frac{dx}{(x^2+\lambda)^2} = \int \frac{(x^2+\lambda)-x^2}{(x^2+\lambda)^2}dx$.

7. Usando a redução mostrada no problema 6, calcule as integrais (considere $a > 0$).

   (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$. (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2}$.

   Respostas. (a) $\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C$. (b) $\frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

8. Calcule $\int \frac{x\operatorname{arc\,tg}x}{(x^2+1)^2}dx$. *Resposta.* $\frac{x}{4(x^2+1)} + \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}x - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arc\,tg}x}{1+x^2} + C$.