Aula 15

Integrais indefinidas

15.1 Antiderivadas

Sendo $f(x)$ e $F(x)$ definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, dizemos que

F é uma *antiderivada* ou uma *primitiva* de f, em I, se $F'(x) = f(x)$

para todo $x \in I$.

Ou seja, F é antiderivada ou primitiva de f se F é uma função cuja derivada é f.

Como primeiros exemplos, temos

$f(x)$	primitiva de $f(x)$
$3x^2$	x^3
2	$2x$
e^x	e^x
$\operatorname{sen} x$	$-\cos x$

Observação 15.1 *Se F é antiderivada de f em I, e c é uma constante, então $F + c$ também é uma antiderivada de f em I.*

De fato, se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$, então

$[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$, e portanto $F(x) + c$ também é uma antiderivada de $f(x)$ em I.

Assim, por exemplo x^3, $x^3 + 5$ e $x^3 - \sqrt{2}$ são primitivas de $3x^2$.

Veremos agora que, em um intervalo I, duas primitivas de uma mesma função diferem entre si por uma constante.

Proposição 15.1 *Se F_1 e F_2 são antiderivadas de f, em $I \subset \mathbb{R}$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F_1(x) = F_2(x) + c$, para todo $x \in I$.*

Para demonstrar a proposição 15.1, faremos uso do seguinte resultado.

Lema 15.1 *Se f é contínua no intervalo $[a, b]$ e $f'(x) = 0$ para todo $x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$ para todo $x \in [a, b]$.*

Poderíamos aceitar o lema 15.1 como evidente e seguir adiante. No entanto, este lema é conseqüência de um teorema importante sobre funções deriváveis, conhecido como teorema do valor médio. Como tornaremos a fazer uso do teorema do valor médio mais adiante, julgamos oportuno citá-lo agora.

Teorema 15.1 (Teorema do valor médio) *Suponhamos que f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e derivável no intervalo $]a, b[$. Então existe $w \in]a, b[$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(w)$$

Aceitaremos este teorema sem demonstração, e faremos uma interpretação geométrica de seu resultado.

O quociente $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ é a taxa de variação média, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, da função f, no intervalo $[a, b]$, sendo $\Delta x = b - a$ e $\Delta f = f(b) - f(a)$.

Ele é o coeficiente angular da reta passando por $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$. O teorema do valor médio diz que essa taxa de variação média é também a taxa de variação instantânea de f, em relação a x, df/dx, em algum ponto w no interior do intervalo. Em termos geométricos, a inclinação da reta AB coincide com a inclinação de uma reta tangente ao gráfico de f em um ponto $(w, f(w))$, para algum $w \in]a, b[$. A figura 15.1 ilustra o teorema do valor médio.

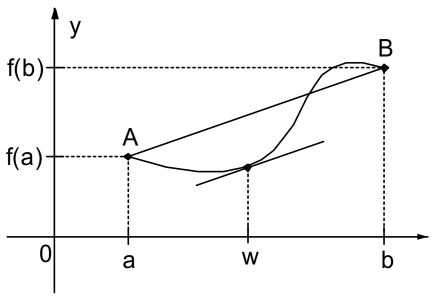

Figura 15.1. $\dfrac{f(b) - (f(a)}{b - a} = f'(w)$.

Uma interpretação cinemática do teorema do valor médio é a seguinte: a velocidade média de um ponto móvel, em movimento retilíneo, no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, coincide com sua velocidade instantânea em algum instante $t_0 \in]t_1, t_2[$, isto é,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = s'(t_0) \text{ em um instante } t_0, \text{ com } t_1 < t_0 < t_2$$

Por exemplo, se um carro, com velocidade variável, faz um percurso de $180\,\text{km}$ em duas horas, sua velocidade média é $\frac{180\text{km}}{2\text{h}} = 90\,\text{km/h}$. Intuitivamente, sabemos que em algum instante do percurso, seu velocímetro acusará a velocidade instantânea de $90\,\text{km/h}$.

Demonstração do lema 15.1. Suponhamos $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo.

Mostraremos que, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em I, $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) = f(x_2)$, e portanto f é constante em I.

Temos f contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em $]x_1, x_2[$.

Pelo teorema do valor médio, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(w)$ para algum $w \in]x_1, x_2[$.

Como $f'(w) = 0$, temos $f(x_1) = f(x_2)$, e nossa demonstração termina aqui. ■

Demonstração da proposição 15.1. Suponhamos que, $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$, I um intervalo de $\mathbb{R}$.

Consideremos a função $\varphi = F_1 - F_2$.

Então, $\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$, para todo $x \in I$.

Pelo lema 15.1, φ é constante no intervalo I.

Assim, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $F_1(x) - F_2(x) = c$ para todo $x \in I$.

Portanto $F_1(x) = F_2(x) + c$, para todo $x \in I$. ■

Definição 15.1 (Integral indefinida) *Sendo F uma primitiva de f no intervalo I, chama-se* integral indefinida de f, *no intervalo I, à primitiva genérica de f em I, $F(x) + C$, sendo C uma constante real genérica. Denotamos tal fato por*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Nesta notação, omite-se o intervalo I.

15.2 Integrais imediatas

Coletaremos agora algumas integrais indefinidas cujo cálculo é imediato.

Proposição 15.2

1. $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, *se* $\alpha \neq -1$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$.

3. $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$.
4. $\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$.
5. $\int e^x \, dx = e^x + C$.
6. $\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a}$ $(a > 0, a \neq 1)$.
7. $\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$.
9. $\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$.
10. $\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$.
11. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$.
12. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$.

Para a dedução das integrais acima, basta verificar que a derivada do segundo membro, em cada igualdade, é a função que se encontra sob o sinal de integração. Como exemplos,

se $\alpha \neq -1$, $\left(\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = (\alpha+1) \cdot \dfrac{x^{\alpha+1-1}}{\alpha+1} = x^{\alpha}$.

$(\ln |x|)' = 1/x$:
se $x > 0$, $(\ln |x|)' = (\ln x)' = 1/x$;
se $x < 0$, $(\ln |x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x} \cdot (-x)' = 1/x$.

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, logo $\left(\dfrac{a^x}{\ln a}\right)' = \dfrac{a^x \ln a}{\ln a} = a^x$. ■

15.3 Manipulações elementares de integrais

Suponhamos $\int f(x)\, dx = F(x) + C_1$, e $\int g(x)\, dx = G(x) + C_2$. Então

1. $[F(x) + G(x)]' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$, logo
   $\int (f(x)+g(x))\, dx = F(x)+G(x)+C = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx \quad (C = C_1+C_2)$.
2. Sendo k uma constante real, $[k \cdot F(x)]' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$, logo
   $\int kf(x)\, dx = kF(x) + C = k \int f(x)\, dx \quad (kC_1 = C)$

Reunimos os fatos acima, com outros também úteis, na seguinte proposição.

Proposição 15.3 *Se* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ *e* $\int g(x)\,dx = G(x) + C$, *então, sendo* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,

1. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = F(x) + G(x) + C$
2. $\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot F(x) + C$
3. $\int f(x + b)\,dx = F(x + b) + C$
4. $\int f(x - b)\,dx = F(x - b) + C$
5. $\int f(b - x)\,dx = -F(b - x) + C$
6. $\displaystyle\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$
7. $\displaystyle\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$

Demonstração. As duas primeiras propriedades já foram deduzidas acima. Das cinco propriedades restantes, as quatro primeiras são conseqüências imediatas da última, a única que deduziremos.

Por hipótese, $F'(x) = f(x)$.

Logo $[F(ax + b)]' = F'(ax + b) \cdot (ax + b)' = af(ax + b)$, de onde

$\left(\frac{1}{a}F(ax + b)\right)' = \frac{1}{a} \cdot af(ax + b) = f(ax + b)$.

Portanto $\displaystyle\int f(ax + b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$. ■

15.4 Exemplos elementares

1. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$. Logo,
   (a) $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$
   (b) $\int \cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right) + C$
2. $\int e^x\,dx = e^x + C$. Logo,
   (a) $\int e^{x-5}\,dx = e^{x-5} + C$
   (b) $\int e^{2-x}\,dx = -e^{2-x} + C$
   (c) $\int e^{5x}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x} + C$
3. Calcular $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$.

$\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C$.

Temos $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$, logo $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$.

Logo,

$\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \sec^2 x - \int 1\, dx = \operatorname{tg} x - x + C$

4. Calcular $\int (5\cos x + \cos 5x)\, dx$.

$$\begin{aligned}\int (5\cos x + \cos 5x)\, dx &= 5\int \cos x\, dx + \int \cos 5x\, dx\\ &= 5 \operatorname{sen} x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5x + C\end{aligned}$$

5. Calcular $\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx$.

Temos $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, logo $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. Daí

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x \cos x\, dx &= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x\, dx\\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\cos 2x) + C = -\frac{1}{4}\cos 2x + C\end{aligned}$$

6. Calcular $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx &= \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x}\right) dx\\ &= \int \frac{\sqrt{x}}{x} dx + \int \frac{1}{x} dx\\ &= \int x^{-1/2}\, dx + \int \frac{1}{x}\, dx\\ &= \frac{x^{1/2}}{1/2} + \ln|x| + C = 2\sqrt{x} + \ln|x| + C\end{aligned}$$

15.5 Integração por mudança de variável ou integração por substituição

Suponhamos que

$$\int f(x)\, dx = F(x) + C \tag{15.1}$$

Suponhamos que $x = \varphi(t)$ é uma função derivável de t, para t em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Na aula 14 definimos a *diferencial de x*, como sendo

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \varphi'(t)\,dt$$

No contexto daquela aula, a diferencial dx foi definida como uma boa aproximação de Δx, quando $dt = \Delta t$ é suficientemente pequeno.

Neste capítulo, a diferencial terá um sentido simbólico, sendo empregada quando realizamos troca de variáveis no cálculo de integrais.

Suponhamos definida em I a função composta $f(\varphi(t))$.

Como veremos agora, podemos substituir $x = \varphi(t)$ na expressão 15.1, fazendo $dx = \varphi'(t)\,dt$, ou seja, de 15.1 obtemos

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C \tag{15.2}$$

De fato, aplicando derivação em cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[F(\varphi(t))] &= \frac{d}{dx}[F(x)] \cdot \frac{dx}{dt} \\ &= F'(x) \cdot \varphi'(t) \\ &= F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \\ &= f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \end{aligned}$$

logo, $\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C$.

Portanto

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C \implies \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C}$$

pela mudança de variável $x = \varphi(t)$, tomando-se $dx = \varphi'(t)\,dt$.

Na prática, quando calculamos $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$, tendo-se as considerações acima, passamos pela seqüência de igualdades:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx = F(x) + C = F(\varphi(t)) + C$$

Algumas vezes, no entanto, fazendo $x = \varphi(t)$, passamos por uma seqüência de igualdades

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C$$

fazendo uso da integral "mais complicada" $\int f(\varphi(t)\varphi'(t)\,dt$ para finalmente calcular $\int f(x)\,dx$. Isto é o que ocorre em substituições trigonométricas, assunto que será estudado adiante.

Neste caso, estamos assumindo implicitamente que

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = F(\varphi(t)) + C \implies \int f(x)\, dx = F(x) + C$$

o que é justificado desde que possamos também expressar também $t = \psi(x)$, como função inversa e derivável de $x = \varphi(t)$, para que possamos, ao final dos cálculos, obter a integral indefinida como função de x, a partir de sua expressão em função de t.

Exemplo 15.1 *Calcular* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}dx.$

Solução. Começamos fazendo a substituição $u = 3 - 2x$.

Então $du = \dfrac{du}{dx} \cdot dx = (3-2x)'\, dx = -2dx.$

Portanto $dx = -\frac{1}{2}du$.

Assim, temos

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) du = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\, du = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= -u^{1/2} + C = -\sqrt{u} + C = -\sqrt{3-2x} + C$$

Exemplo 15.2 *Calcular* $\int \operatorname{tg} x\, dx$.

Solução. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx.$

Como $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, tomamos $u = \cos x$, e teremos

$du = (\cos x)'dx = -\operatorname{sen} x\, dx.$

Assim,

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}dx = \int \frac{-1}{u}du = -\ln |u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Exemplo 15.3 *Calcular* $\int \sec x\, dx$.

Solução. Calcularemos esta integral por uma substituição que requer um truque esperto.

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x \cdot (\sec x + \operatorname{tg} x)}{\sec x + \operatorname{tg} x}dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \cdot \operatorname{tg} x}{\sec x + \operatorname{tg} x}dx$$

Aplicamos a mudança de variável

$$u = \sec x + \operatorname{tg} x$$

e teremos $du = (\sec x + \operatorname{tg} x)'dx = (\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x)dx$.

Logo, $\displaystyle\int \sec x\, dx = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + C.$

Exemplo 15.4 *Calcular* $\int \operatorname{cosec} x\, dx$.

Solução. Imitando o truque usado no exemplo anterior, o leitor poderá mostrar que

$\int \operatorname{cosec} x\, dx = -\ln|\operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x| + C$.

Exemplo 15.5 *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx$.

Solução. Note que $(x^2+5)' = 2x$. Isto sugere fazermos

$u = x^2 + 5$, de onde $du = 2x\, dx$, ou seja, $x\, dx = \dfrac{1}{2}du$.

Temos então

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = u^{1/2} + C = \sqrt{x^2+5} + C$$

15.6 Ampliando nossa tabela de integrais imediatas

Com a finalidade de dinamizar o cálculo de integrais indefinidas, ampliaremos a lista de integrais imediatas da seção 15.2, adotando como integrais "imediatas" as quatro seguintes, que deduziremos em seguida.

Proposição 15.4 *Sendo* $a > 0$, *e* $\lambda \neq 0$,

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C$.
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C$.
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln|x + \sqrt{x^2+\lambda}| + C$

Demonstração. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2}\, dx$

Fazendo $\frac{x}{a} = y$, temos $dx = a\, dy$, e então

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a^2}\int \frac{a}{1+y^2}\, dy = \frac{1}{a}\int \frac{1}{y^2+1}\, dy \\ &= \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} y + C = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C\end{aligned}$$

Para deduzir a segunda integral, lançamos mão da decomposição

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{\frac{1}{2a}}{a+x} + \frac{\frac{1}{2a}}{a-x}$$

Assim sendo,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx &= \frac{1}{2a}\int \frac{1}{a+x}\,dx + \frac{1}{2a}\int \frac{1}{a-x}\,dx \\ &= \frac{1}{2a}\ln|a+x| - \frac{1}{2a}\ln|a-x| + C \\ &= \frac{1}{2a}\ln\frac{|a+x|}{|a-x|} + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\end{aligned}$$

Para deduzir a terceira integral, fazemos uso da integral indefinida

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

e procedemos a uma mudança de variável, tal como no cálculo da primeira integral acima. O leitor poderá completar os detalhes.

Para deduzir a quarta integral, apelaremos para um recurso nada honroso. Mostraremos que

$$(\ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}|)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+\lambda}}$$

De fato, sendo $u = x+\sqrt{x^2+\lambda}$, e sendo $(\sqrt{w})' = \frac{1}{2\sqrt{w}}\cdot w'$, temos

$$\begin{aligned}(\ln|x+\sqrt{x^2+\lambda}|)' &= (\ln|u|)' = \frac{1}{u}\cdot u' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\lambda}}\cdot(x+\sqrt{x^2+\lambda})' \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\lambda}}\cdot\left(1+\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+\lambda}}\cdot\cancel{2}x\right) \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\lambda}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+\lambda}+x}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+\lambda}}\end{aligned}$$

15.6.1 Nossa tabela de integrais imediatas

Adotaremos como integrais imediatas as integrais da tabela 15.1 dada a seguir. Esta tabela inclui as integrais imediatas da proposição 15.2, as integrais calculadas nos exemplos 15.3 e 15.4, e as integrais da proposição 15.4.

Tabela 15.1. Tabela ampliada de integrais imediatas (nas últimas linhas, $a > 0$ e $\lambda \neq 0$).

$\int x^\alpha \, dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$	$\displaystyle\int \frac{1}{x} \, dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$	$\int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int a^x \, dx = \dfrac{a^x}{\ln a}\ (a > 0, a \neq 1)$
$\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + C$	$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + C$
$\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + C$	$\int \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cosec} x + C$
$\int \sec x \, dx = \ln\lvert \sec x + \operatorname{tg} x\rvert + C$	$\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\ln\lvert \operatorname{cosec} x + \operatorname{cotg} x\rvert + C$
$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln\lvert \cos x\rvert + C$	$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln\lvert \operatorname{sen} x\rvert + C$
$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$
$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C.$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln\lvert x + \sqrt{x^2+\lambda}\rvert + C$

15.7 Problemas

Calcule as seguintes integrais indefinidas, utilizando, quando necessário, mudança de variáveis. Sempre que julgar conveniente, faça uso da tabela de integrais indefinidas da tabela 15.1.

1. $\int (x + \sqrt{x}) \, dx$. *Resposta.* $\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$.

2. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$. *Resposta.* $\left(6\sqrt{x} - \frac{1}{10} x^2 \sqrt{x}\right) + C$.

3. $\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x}}$. *Resposta.* $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} + C$.

4. $\int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$. *Resposta.* $\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + C$.

5. $\int \operatorname{sen} ax\, dx$. *Resposta.* $-\frac{\cos ax}{a} + C$.

6. $\int \frac{\ln x}{x} dx$. *Resposta.* $\frac{\ln^2 x}{2} + C$.

7. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 3x} dx$. *Resposta.* $-\frac{\operatorname{cotg} 3x}{3} + C$.

8. $\int \frac{dx}{3x-7}$. *Resposta.* $\frac{1}{3}\ln|3x-7| + C$.

9. $\int \operatorname{tg} 2x\, dx$. *Resposta.* $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C$.

10. $\int \operatorname{cotg}(5x-7)dx$. *Resposta.* $\frac{1}{5}\ln|\operatorname{sen}(5x-7)| + C$.

11. $\int \operatorname{cotg}\frac{x}{3}\, dx$. *Resposta.* $3\ln|\operatorname{sen}\frac{x}{3}| + C$.

12. $\int \operatorname{tg}\varphi \sec^2\varphi\, d\varphi$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi + C$. *Sugestão.* Faça $u = \operatorname{tg}\varphi$.

13. $\int e^x \operatorname{cotg} e^x\, dx$. *Resposta.* $\ln|\operatorname{sen} e^x| + C$. *Sugestão.* Faça $u = e^x$.

14. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$. *Sugestão.* Faça $u = \operatorname{sen} x$.

15. $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\, dx$. *Resposta.* $-\frac{\cos^4 x}{4} + C$.

16. $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{2x^2+3}}$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3} + C$. *Sugestão.* Faça $u = 2x^2 + 3$.

17. $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3+1}}$. *Resposta.* $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$.

18. $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\cos^3 x}$. *Resposta.* $\frac{1}{2\cos^2 x} + C$.

19. $\int \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$. *Resposta.* $-\frac{\operatorname{cotg}^2 x}{2} + C$.

20. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$. *Resposta.* $2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$.

21. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x\, dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$. *Resposta.* $2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x} + C$. *Sugestão.* Faça $u = 1 + \operatorname{sen}^2 x$.

22. $\int \frac{\operatorname{arc\,sen} x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{arc\,sen}^2 x}{2} + C$.

23. $\int \frac{\arccos^2 x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$. *Resposta.* $-\frac{\arccos^3 x}{3} + C$.

24. $\int \frac{x\, dx}{x^2+1}$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

25. $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) + C$.

26. $\int \frac{\cos x}{2\operatorname{sen} x+3} dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\ln(2\operatorname{sen} x + 3) + C$.

27. $\int \frac{dx}{x\ln x}$. *Resposta.* $\ln|\ln x| + C$. *Sugestão.* Faça $u = \ln x$.

28. $\int 2x(x^2+1)^4\, dx$. *Resposta.* $\frac{(x^2+1)^5}{5} + C$.

29. $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C$.
Sugestão. Mostre que $\operatorname{tg}^4 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x + 1$.

30. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}$. *Resposta.* $\frac{1}{3}\ln|3\operatorname{tg} x + 1| + C$.

31. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}dx$. *Resposta.* $\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$.

32. $\int e^{2x}dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}e^{2x} + C$.

33. $\int xa^{x^2}dx$. *Resposta.* $\frac{a^{x^2}}{2\ln a} + C$.

34. $\int \frac{e^x}{3+4e^x}dx$. *Resposta.* $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x) + C$.

35. $\int \frac{dx}{1+2x^2}$. *Resposta.* $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x) + C$.

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$. *Resposta.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,sen}(\sqrt{3}x) + C$.

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$. *Resposta.* $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen}\frac{3x}{4} + C$.

38. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$. *Resposta.* $\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{3x}{2} + C$.

39. $\int \frac{dx}{4-9x^2}$. *Resposta.* $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right| + C$.

40. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$. *Resposta.* $\ln(x + \sqrt{x^2+9}) + C$.

41. $\int \frac{x^2dx}{5-x^6}$. *Resposta.* $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right| + C$.
Sugestão. Faça $x^6 = (x^3)^2$, e então $u = x^3$.

42. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x^2 + C$. *Sugestão.* Faça $u = x^2$.

43. $\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4}$. *Resposta.* $\frac{1}{2a^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2}{a^2} + C$.

44. $\int \frac{\cos x\,dx}{a^2+\operatorname{sen}^2 x}$. *Resposta.* $\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{a}\right) + C$.

45. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. *Resposta.* $\operatorname{arc\,sen}(\ln x) + C$.

46. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. *Resposta.* $-\frac{1}{2}(\arccos x)^2 + \sqrt{1-x^2} + C$.

47. $\int \frac{x-\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx$. *Resposta.* $\frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 + C$.

48. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$. *Resposta.* $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3} + C$.

49. $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$. *Resposta.* $\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{3\operatorname{sen}^3 x} + C$.
Sugestão. Faça $\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}dx = \int \frac{\cos^2 x\cdot\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}dx = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x}{\operatorname{sen}^4 x}dx$, e então $u = \operatorname{sen} x$.