

Aula 2

Derivadas e retas tangentes. Novas regras de derivação

2.1 A derivada como inclinação de uma reta tangente ao gráfico da função

Na aula anterior, o conceito de derivada foi apresentado através do conceito de velocidade instantânea. Veremos agora uma interpretação geométrica da derivada, em relação ao gráfico da função $y = f(x)$. Esta é uma idéia de Fermat.

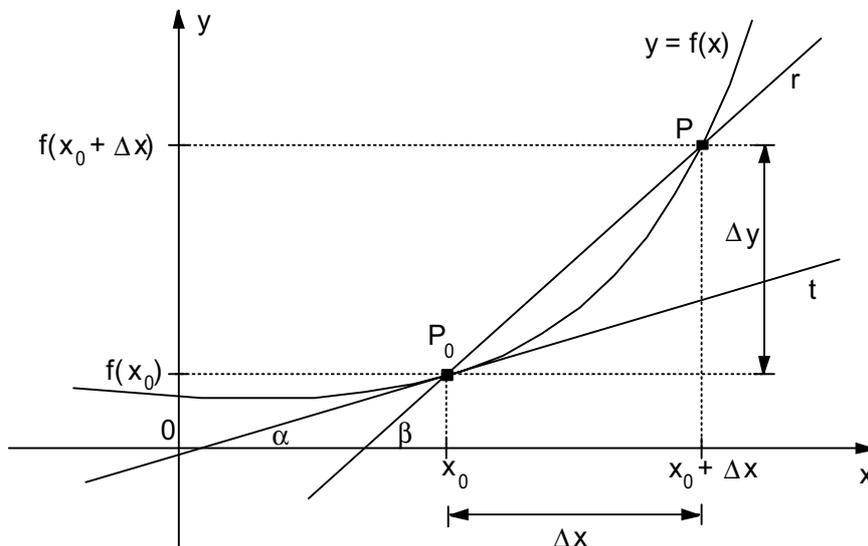


Figura 2.1. A derivada da função f , em x_0 , é a inclinação da reta t , tangente ao gráfico de f em P_0 .

Fixado um valor x_0 , sendo definido $f(x_0)$, seja $\Delta x \neq 0$ um acréscimo (ou de-

crécimo) dado a x_0 . Sendo $x_1 = x_0 + \Delta x$, temos que a razão

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

é o coeficiente angular da reta r , secante ao gráfico da curva $y = f(x)$, passando pelos pontos $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P = (x_1, f(x_1))$.

Observando os elementos geométricos da figura 2.1, temos que quando Δx tende a 0, o ponto P tem como posição limite o ponto P_0 , e a reta secante P_0P terá como posição limite a reta t , tangente ao gráfico de f no ponto P_0 .

Na figura, temos ainda, da geometria analítica elementar,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \textit{tangente do ângulo } \beta \\ &= \textit{coeficiente angular (ou inclinação) da reta secante } P_0P \\ &= \frac{\Delta y}{\Delta x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \textit{tangente do ângulo } \alpha \\ &= \textit{coeficiente angular da reta } t, \textit{ tangente ao gráfico de } f, \textit{ no ponto } P_0. \end{aligned}$$

Note aqui diferentes empregos (com diferentes significados) da palavra *tangente*: a *tangente* (trigonométrica) do ângulo α , nos dá a *inclinação*, ou *declividade*, ou *coeficiente angular*, da reta t , que é (geometricamente) *tangente ao gráfico de f* (ou que *tangencia o gráfico de f*) no ponto P_0 .

Quando Δx tende a 0, β tende a α , e então $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta$ tende a $\operatorname{tg} \alpha$.

$$\text{Daí, } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Assim, com este argumento geométrico e intuitivo, interpretamos $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ como sendo o coeficiente angular (ou a inclinação) da reta t , tangente ao gráfico de f (ou seja, tangente à curva $y = f(x)$) no ponto $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

Sabemos que a equação de uma reta, de coeficiente angular m , passando por um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Assim sendo, temos que a equação da reta t , tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $P_0 = (x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Em geral, se queremos aproximar a função $f(x)$, nas proximidades de x_0 , por uma função da forma $g(x) = ax + b$, tomamos $g(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. O gráfico

de g será então a reta tangente ao gráfico de f no ponto P_0 . Dizemos que $g(x)$ é uma *linearização* de $f(x)$ nas proximidades de x_0 .

A *reta normal* à curva $y = f(x)$, no ponto P_0 dessa curva, é a reta que passa por P_0 *perpendicularmente* à curva. Isto, é, r é normal à curva $y = f(x)$, no ponto P_0 , quando r é perpendicular à reta tangente à curva nesse ponto.

Lembre-se que se duas retas são perpendiculares, tendo coeficientes angulares m e m' , então $m' = -1/m$.

Assim, se $f'(x_0) \neq 0$, a equação da reta r , normal à curva $y = f(x)$ no ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Exemplo 2.1 Qual é a equação da reta t , que tangencia a parábola $y = x^2$, no ponto $P = (-1, 1)$? Qual é a equação da reta r , normal à parábola nesse ponto?

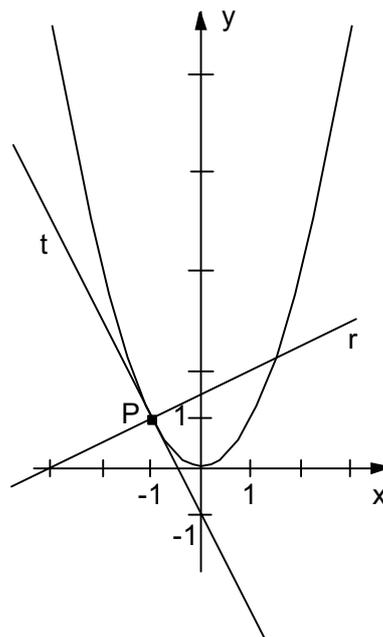


Figura 2.2. Representação gráfica da curva $y = x^2$ e das retas t e r , tangente e normal à curva no ponto $P = (-1, 1)$.

Solução. Sendo $y = x^2$, temos $\frac{dy}{dx} = 2x$. Em P , temos $x_0 = -1$. O coeficiente angular da reta t é dado por

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=-1} = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Assim, a reta t , tangente à curva $y = x^2$ no ponto P , tem equação

$$y - 1 = (-2)(x - (-1))$$

ou seja, $y = -2x - 1$.

Para escrever a equação da reta r , normal à curva no ponto P , fazemos uso do fato de que a declividade da reta r é $m_r = -\frac{1}{m_t} = \frac{1}{2}$.

Portanto, r tem equação $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 1)$, ou ainda $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Na figura 2.2 temos a representação da curva $y = x^2$ e das retas t e r , respectivamente tangente e normal à curva no ponto $P = (-1, 1)$.

Exemplo 2.2 Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = x^2 - 4x$, no ponto de abscissa (primeira coordenada) p . Em qual ponto a reta tangente ao gráfico é horizontal?

Solução. O coeficiente angular da reta tangente à curva $y = x^2 - 4x$, no ponto de abscissa p , é $m = f'(p)$. Como $f'(x) = 2x - 4$, temos $m = 2p - 4$.

No ponto $(p, f(p))$ em que a reta tangente é horizontal, temos $m = 0$, ou seja, $f'(p) = 0$. Logo, $p = 2$. Assim, o ponto procurado é $(2, -4)$.

2.2 Novas regras de derivação

Regra 2.1 (Derivada de um produto)

$$(fg)' = f'g + fg'$$

Demonstração. Temos

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x), \quad \Delta g = g(x + \Delta x) - g(x).$$

Portanto

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f, \quad g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g.$$

Assim sendo

$$\begin{aligned} \Delta(fg) &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) \\ &= f(x)g(x) + f(x)(\Delta g) + (\Delta f)g(x) + (\Delta f)(\Delta g) - f(x)g(x) \\ &= f(x)(\Delta g) + (\Delta f)g(x) + (\Delta f)(\Delta g) \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} &= f(x) \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} (\Delta g) \\ &= f(x) \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \frac{\Delta g}{\Delta x} \Delta x \end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(f(x) \frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \frac{\Delta g}{\Delta x} \Delta x \right) \\ &= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) + f'(x)g'(x) \cdot 0 \\ &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x) \end{aligned}$$

Portanto, $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. ■

Observação 2.1 Para um valor específico de x , digamos $x = x_0$, temos

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Embora não tenhamos ainda mencionado, é fato que se podemos calcular o limite $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$, então temos $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$.

De fato,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Exemplo 2.3 Daremos um exemplo para ilustrar a regra da derivada de um produto, que acabamos de deduzir. Considere $p(x) = (x^2 + x + 2)(3x - 1)$

Expandindo $p(x)$, obtemos $p(x) = 3x^3 + 2x^2 + 5x - 2$, de onde obtemos $p'(x) = 9x^2 + 4x + 5$.

Por outro lado, se aplicarmos a fórmula da derivada de um produto, obtemos

$$\begin{aligned} p'(x) &= (x^2 + x + 2)'(3x - 1) + (x^2 + x + 2)(3x - 1)' \\ &= (2x + 1)(3x - 1) + (x^2 + x + 2) \cdot 3 \\ &= 9x^2 + 4x + 5 \end{aligned}$$

Regra 2.2 Sendo g uma função derivável, quando $g \neq 0$ temos

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Demonstração. Como na dedução da propriedade 2.1, temos $g(x + \Delta x) = g(x) + \Delta g$.

Sendo $y = 1/g(x)$, temos

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{1}{g(x + \Delta x)} - \frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{1}{g(x) + \Delta g} - \frac{1}{g(x)} \\ &= \frac{g(x) - (g(x) + \Delta g)}{(g(x) + \Delta g) \cdot g(x)} \\ &= \frac{-\Delta g}{(g(x) + \Delta g) \cdot g(x)}\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta g}{\Delta x} \cdot \frac{1}{(g(x) + \Delta g)g(x)}$$

e portanto

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta g}{\Delta x} \cdot \frac{1}{(g(x) + \Delta g)g(x)} \\ &= -g'(x) \cdot \frac{1}{(g(x))^2} = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}\end{aligned}$$

Aqui, fizemos uso da observação 2.1: sendo g derivável, temos $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g = 0$. ■

Exemplo 2.4 Verifique que, sendo n um inteiro positivo, $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$.

Solução. Aplicando o resultado da propriedade 2.2, temos

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$$

Regra 2.3 (Derivada de um quociente)

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Demonstração. Deixamos a dedução desta regra para o leitor. Para deduzi-la, basta escrever $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ e então combinar as regras (propriedades) 2.1 e 2.2.

Exemplo 2.5 Calcular y' , sendo $y = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}$

Solução. Aplicando a fórmula para a derivada de um quociente, temos

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \right)' = \frac{(x^3 - 1)'(x^3 + 1) - (x^3 + 1)'(x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x^3 + 1) - 3x^2(x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2} \end{aligned}$$

2.3 Problemas

1. Utilizando regras de derivação previamente estabelecidas, calcule as derivadas das seguintes funções.

(a) $f(x) = \frac{4x - 5}{3x + 2}$

(b) $f(z) = \frac{8 - z + 3z^2}{2 - 9z}$

(c) $f(w) = \frac{2w}{w^3 - 7}$

(d) $s(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$

(e) $f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$

(f) $f(x) = \frac{x^2 + 9x + 2}{7}$

2. Deduza a seguinte fórmula de derivação:

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

Dê um bom palpite (chute) sobre como seria a fórmula para $(f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n)'$.

3. Ache as equações das retas tangentes ao gráfico de $y = \frac{5}{1 + x^2}$, nos pontos $P = (0, 5)$, $Q = (1, 5/2)$ e $R = (-2, 1)$. Esboce (caprichadamente) o gráfico dessa curva, *plotando* pontos com os seguintes valores de x : $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ e 3 . No mesmo sistema cartesiano, esboce também as retas tangentes à curva nos pontos P, Q e R .
4. Escreva as equações das retas tangente e normal à curva $y = x^3 - 3x^2 - x + 5$ no ponto de abscissa $x = 3$.
5. Determine as equações das retas t e n , respectivamente tangente e normal à curva $y = x^2$, no ponto de abscissa p .

6. (Teste sua sensibilidade sobre derivadas) Esboce o gráfico de $y = x^2 - 4$, plotando os pontos de abscissas (valores de x) $-2, -1, 0, 1, 2$ e 3 . Em cada um desses pontos, esboce a reta tangente ao gráfico, e tente adivinhar o seu coeficiente angular. Marque seu *chute* ao lado do ponto. Em seguida, calcule cada coeficiente angular usando a derivada y' . Compare seu chute com a resposta exata.

2.3.1 Respostas e sugestões

- $f'(x) = \frac{23}{(3x+2)^2}$
 - $f'(z) = \frac{-27z^2 + 12z + 70}{(2-9z)^2}$
 - $f'(w) = \frac{-4w^3 - 14}{(w^3 - 7)^2}$
 - $s'(t) = 2t - \frac{2}{t^3}$
 - $f'(x) = -\frac{1 + 2x + 3x^2}{(1 + x + x^2 + x^3)^2}$
 - $f'(x) = \frac{2x+9}{7}$ (Quando c é uma constante, temos a regra $\left(\frac{f}{c}\right)' = \frac{f'}{c}$)
- $(f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n)' = f_1' f_2 \cdots f_{n-1} f_n + f_1 f_2' \cdots f_{n-1} f_n + \cdots + f_1 f_2 \cdots f_{n-1}' f_n + f_1 f_2 \cdots f_{n-1} f_n'$.
- As equações das três retas são, respectivamente, $y = 5$, $5x + 2y - 10 = 0$, e $4x - 5y + 13 = 0$.
- Reta tangente: $y = 8x - 22$. Reta normal: $x + 8y - 19 = 0$.
- t : $y = 2px - p^2$;
 n : $y = -\frac{x}{2p} + \frac{1}{2} + p^2$ (se $p \neq 0$); n : $x = 0$ (se $p = 0$).