O Teorema do Confronto

Méricles Thadeu Moretti
MTM/PPGECT/UFSC

Introdução

O Teorema do Confronto (The Pinching Theorem), às vezes é chamado de Teorema do Sanduíche, é utilizado no cálculo de limite e na demonstração de outros teoremas.

Teorema 1: Teorema do confronto.
Suponhamos que $f(x) \le g(x) \le h(x)$ e que exista $r > 0$, tal que, $0 < |x - a| < r$. Nestas condições, se $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então $\lim_{x\to a} g(x) = L$.
Este teorema é válido também se no lugar de $x\to a$ colocarmos $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo 1. Calcular $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

Desenvolvimento	Comentários
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$	O problema dado é uma indeterminação do tipo ∞-∞.
$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}})$ $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$	Outra forma de representar a função $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
$0 < \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x+1} + \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} > 0$ $\sqrt{x+1} > \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$	Uma vez que $\lim_{x\to+\infty} 0 = 0$ e que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$, o Teorema do Confronto pôde ser aplicado.

Usando o teorema do confronto, podemos escrever o seguinte teorema:

Teorema 2: Sejam f e g duas funções com mesmo domínio A e tais que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \le M$ para todo x em A, sendo M um número real fixo. Nestas condições, $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.
Este teorema continua válido se no lugar de $x\to a$ colocarmos $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$.

Exemplo 2. Calcular $\lim_{x\to 0} x^2 g(x)$, sendo $g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in Q \\ -1, \text{ se } x \notin Q \end{cases}$

Como $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ e $|g(x)| \le 1$, usando Teorema 2 concluímos que $\lim_{x\to 0} x^2 g(x) = 0$.

Exemplo 3. Calcular $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

Como $\lim_{x\to 0} x = 0$ e $|\operatorname{sen}\frac{1}{x}| \le 1$, usando Teorema 2 concluímos que $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$.

Exemplo 4. Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\text{sen}x}{x}$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ e $|\text{sen}x| \leq 1$, usando Teorema 2 concluímos que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\text{sen}x = 0$.

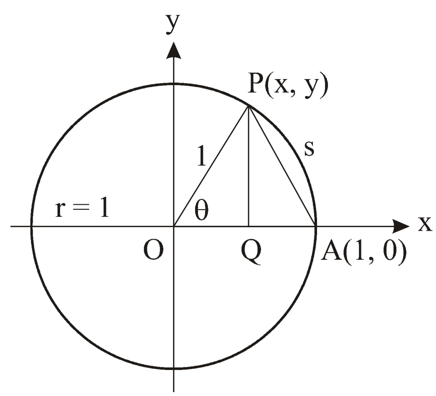
Exemplo 5. Aplicando o teorema do confronto, calcular a) $\lim\limits_{\theta\to 0} \text{sen}\theta$ e b) $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta$ sendo θ medido em radianos.

Consideremos o desenho ao lado.

θ é medido em radianos. Temos que $\theta = \dfrac{s}{r}$ e como r = 1, obtemos θ = s.

O triângulo APQ é retângulo e os catetos medem: $\overline{AQ} = 1 - \cos\theta$ e $\overline{QP} = \text{sen}\theta$. Aplicando o Teorema de Pitágoras a esse triângulo, obtemos: $\text{sen}^2\theta + (1-\cos\theta)^2 = \left(\overline{AP}\right)^2 < \theta^2$.

Como cada elemento no primeiro membro dessa desigualdade é positivo, podemos escrever:



a) $\text{sen}^2\theta < \theta^2$ ou $-\theta < \text{sen}\theta < \theta$.
Como $\lim\limits_{\theta\to 0}(-\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0}\theta = 0$, pelo T. do Confronto concluímos que $\lim\limits_{\theta\to 0} \text{sen}\theta = 0$.

b) $(1-\cos\theta)^2 < \theta^2$ ou $-\theta < 1-\cos\theta < \theta$.
Como $\lim\limits_{\theta\to 0}(-\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0}\theta = 0$, pelo T. do Confronto concluímos que $\lim\limits_{\theta\to 0}(1-\cos\theta) = 0$ e, portanto $\lim\limits_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$.

Bibliografia

AYRES JR., Frank A. Cálculo diferencial e integral. 3ª edição. Trad. A. Zumpano. São Paulo: Makron, 1994.
GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo. (Volume 1, 2ª Edição). Rio de Janeiro: LCT, 1985.
KITCHEN JR., Joseph W. Calculus of one variable. Massachusetts: Addinson-Wesley, 1968.
THOMAS JR., George B. FINNEY, Ross L. Cálculo e Geometria Analítica. Vol.1. Trad. Denise Paravato. Rio: LTC, 1988.