Matemática Aplicada à Economia I – Lista 4 – Otimização

1) Determine a classificação das seguintes matrizes simétricas:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

2) Para $k \leq n$, quantos menores principais de ordem k têm uma matriz de tamanho $n \times n$?

3) Determine a classificação das seguintes formar quadráticas restritas:

a) $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ sujeita a $x_1 + x_2 = 0$.

b) $Q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$ sujeita a $x_1 + x_2 = 0$.

c) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_2$ sujeita a $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

d) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_1x_2$ sujeita a $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

e) $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_2x_3$ sujeita a $x_1 + x_2 - x_3 = 0$.

4) Para cada uma das seguintes funções definidas em $\mathbf{R}^2$, encontre os pontos críticos e classifique-os como max local, min local, ponto de sela ou “não sei”:

a) $x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$

b) $x^2 - 6xy + 2y^2 + 10x + 2y - 5$

c) $xy^2 + x^3y - xy$

d) $3x^4 + 3x^2y - y^3$

5) Quais dos máximos e mínimos locais do exercício anterior são máximos globais ou mínimos globais?

6) Para cada uma das seguintes funções definidas em $\mathbf{R}^3$, encontre os pontos críticos e classifique-os como max local, min local, ponto de sela ou “não sei”:

a) $x^2 + 6xy + y^2 - 3yz + 4z^2 - 10x - 5y - 21z$

b) $(x^2 + 2y^2 + 3z^2)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

7) Uma firma usa dois insumos para produzir um único produto. Se sua função de produção é $Q = x^{1/4}y^{1/4}$ e se vende cada unidade de seu produto por uma unidade monetária e compra cada unidade de insumo por 4 unidades monetárias, encontre sua cesta de insumo maximizadora de lucro. (Confira as condições de segunda ordem).

8) A companhia aérea Tijolinho, que oferece vôos regulares entre São Paulo e Poços de Caldas, pode tratar as viagens de negócios e de lazer como mercados separados, exigindo compras antecipadas e pernoite aos sábados para viagens de lazer. Suponha que a companhia observa uma função demanda $Q = 16 - p$ para viagens de negócios e uma função demanda $Q = 10 - p$ para viagens de lazer e que a função custo para todos os passageiros é $C(Q) = 10 + Q^2$. Quanto deveria a companhia cobrar em cada segmento de mercado para maximizar seu lucro?

9) Encontre o max e o min de $f(x,y,z) = x + y + z^2$ sujeita a $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \; e \; y = 0$.

10) Maximize $f(x,y,z) = yz + xz$ sujeita a $y^2 + z^2 = 1 \; e \; xz = 3$.

11) Maximize $x^2y^2z^2$ sujeita a $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, onde c é alguma constante positiva fixada. Qual é o valor máximo da função objetivo no conjunto-restrição? Mostre que, para quaisquer x, y, z, vale:

$$x^2y^2z^2 \leq \left(\frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2)\right)^3 \; ou \; (x^2y^2z^2)^{\frac{1}{3}} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$$

12) Encontre o máximo de $f(x,y) = x^2 + y^2$, sujeita a $2x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$.

13) Considere o problema de maximizar $f(x,y,z) = xyz + z$, sujeita a $x^2 + y^2 + z \leq 6, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.
   a) Escreva a coleção completa das condições de primeira ordem deste problema.
   b) Determine se a restrição $x^2 + y^2 + z \leq 6$ é ou não ativa em alguma solução.
   c) Encontre uma solução das condições de primeira ordem que inclua $x = 0$.
   d) Encontre três equações nas três incógnitas x, y, z que devem ser satisfeitas se $x \neq 0$ na solução.
   e) Mostre que $x = 1, y = 1, z = 4$ satisfaz essas equações.

14) Uma determinada fábrica produz $Q(x,y) = 50x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ unidades de produto se gastar x milhares de unidades monetárias em trabalho e y milhares de unidades monetárias em equipamento.
   a) Como deviam ser alocadas 80.000 unidades monetárias entre trabalho e equipamento para render o maior nível de produção possível?
   b) Estime a variação no nível de produção máximo se essa alocação decrescer por um milhar de unidades monetárias.
   c) Calcule a variação exata em (b).