

Matemática Aplicada à Economia I – Lista 3 – Cálculo a Várias Variáveis

1) Use o método das fatias para esboçar os gráficos das seguintes funções:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } z = -x^2 - y^2 & \text{b) } z = y - x^2 & \text{c) } z = ye^{-x} \\ \text{d) } z = y - x & \text{e) } z = x^2 - y^2 & \text{f) } z = \frac{y}{x} \end{array}$$

2) Esboce conjuntos de nível de cada uma das seguintes funções de R^3 em R^1 :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & \text{b) } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 \\ \text{c) } f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2 - x_3 & \text{d) } f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{array}$$

3) Esboce cada uma das seguintes curvas parametrizadas:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(t) = (4 - 2t, 1 + t) & \text{b) } f(t) = (t^2, t^2 + 2) \\ \text{c) } f(t) = (\cos t, \sin t) & \text{d) } f(t) = (t, t^2, t^3) \end{array}$$

4) Escreva as seguintes funções lineares em formato matricial:

$$\begin{array}{l} \text{a) } f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ \text{b) } f(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 - 4x_2, x_1) \\ \text{c) } f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, 2x_1 - 6x_3, 2x_2 + x_3) \end{array}$$

5) Escreva as seguintes formas quadráticas em formato matricial:

$$\begin{array}{l} \text{a) } x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \\ \text{b) } 5x_1^2 - 10x_1x_2 - x_2^2 \\ \text{c) } x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 8x_2x_3 \end{array}$$

6) Calcule todas as derivadas parciais das seguintes funções:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x, y) = 4x^2y - 3xy^3 + 6x & \text{b) } f(x, y) = xy & \text{c) } f(x, y) = xy^2 \\ \text{d) } f(x, y) = e^{2x+3y} & \text{e) } f(x, y) = \frac{x+y}{x-y} & \text{f) } f(x, y) = 3x^2y - 7x\sqrt{y} \end{array}$$

7) Calcule as derivadas parciais da função de produção Cobb-Douglas $q = kx_1^{a_1}x_2^{a_2}$ e da função de produção Elasticidade de Substituição Constante (CES) $q = k(c_1x_1^{-a} + c_2x_2^{-a})^{-h/a}$, supondo que todos os parâmetros são positivos.

8) Considere a função demanda de elasticidade constante $Q = 6p_1^{-2}p_2^{3/2}$, onde Q é a demanda do bem 1 e p_i é o preço do bem i , para $i = 1, 2$. Suponha que os preços atuais são $p_1 = 6$ e $p_2 = 9$.

- Qual é a demanda atual para Q ?
- Use diferenciais para estimar as variações na demanda quando p_1 aumenta 0,25 e p_2 diminui 0,5.
- Analogamente, estime a variação na demanda quando ambos os preços aumentam 0,2.
- Estime a demanda total nas situações b e c e compare suas estimativas com as variações reais.

- 9) Use diferenciais para aproximar cada uma das seguintes funções nos pontos indicados:
- $f(x, y) = x^4 + 2x^2y^2 + xy^4 + 10y$ em $x = 10,36$ e $y = 1,04$
 - $f(x, y) = 6x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}$ em $x = 998$ e $y = 101,5$
 - $f(x, y, z) = \sqrt{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + 5z^2}$ em $x = 4,2, y = 7,95$ e $z = 1,02$
- 10) Seja $f(x, y) = 3xy^2 + 2x$, onde $x(t) = -3t^2$ e $y(t) = 4t^3 + t$.
- Use a Regra da Cadeia para encontrar uma expressão geral para a taxa de variação da composição $f(x(t), y(t))$ em relação a t .
 - Use substituição e derivação direta para calcular a taxa de variação da composição $f(x(t), y(t))$ em relação a t . Compare essa resposta com a resposta da parte a.
- 11) Calcule $\frac{dz}{dt}$ em $t = 0$, se $z = \frac{5t^2 + 3xy}{2w^2y}$, $x = t^2 + 1$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$ e $w = e^t + 1$
(Isto é um pouco sutil, pois há um t na função original. Se ajudar, acrescente a equação $t=t$ às expressões para x , y e w em termo de t .)
- 12) Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = xy^2 + x^3y$ no ponto $(4, -2)$ na direção $(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$.
- 13) Em qual direção devemos nos mover a partir do ponto $(2; 3)$ para aumentar $4x^2y$ mais rapidamente? Apresente sua resposta como um vetor de comprimento 1.
- 14) Sabendo que $G(x, y) = (x^2 + 1, y^2)$ e $F(u, v) = (u + v, v^2)$, calcule a derivada jacobiana matricial de $F(G(x, y))$ no ponto $(x, y) = (1, 1)$.
- 15) Calcule a matriz hessiana para cada uma das seis funções do Exercício 6. Verifique que cada uma delas é uma matriz simétrica.
- 16) Calcule todas as derivadas parciais de terceira ordem da função de produção $Q = 4K^{3/4}L^{1/4}$. Use o Teorema de Young para acelerar esse processo.
- 17) Considere a função de produção $Q = K^{3/4}L^{3/4}$. Mostre que a produtividade marginal de cada fator é decrescente. Mostre, contudo, que para qualquer combinação estritamente positiva de insumos, quando dobra a combinação do insumo, o produto mais do que dobra.
- 18) a) Prove que a expressão $x^2 - xy^3 + y^5 = 17$ é uma função implícita de y em termos de x numa vizinhança de $(x, y) = (5, 2)$.
b) Agora estime o valor de y que corresponde a $x = 4,8$.
- 19) Considere a função $F(x_1, x_2, y) = x_1^2 - x_2^2 + y^3$.
- Se $x_1 = 6$ e $x_2 = 3$, encontre um y que satisfaça $F(x_1, x_2, y) = 0$.
 - Verifique se essa equação define y como uma função implícita de x_1 e x_2 perto de $x_1 = 6$ e $x_2 = 3$.
 - Se definir, calcule $(\frac{\partial y}{\partial x_1})(6, 3)$ e $\frac{\partial y}{\partial x_2}(6, 3)$.
 - Se x_1 cresce para 6,2 e x_2 decresce para 2,9, estime a variação correspondente de y .

- 20) Considere a equação $3x^2yz + xyz^2 = 30$ definindo x como uma função de y e z em torno do ponto $x = 1, y = 3$ e $z = 2$.
- Se y crescer para 3,2 e z permanecer em 2, use o Teorema da Função Implícita para estimar o x correspondente.
 - Use a fórmula de resolução de equações quadráticas para resolver $3x^2yz + xyz^2 = 30$ para x como uma função implícita de y e z . Use aproximação por diferenciais desta fórmula explícita para estimar x quando y é 3,2 e $z = 2$.
 - Qual das duas maneiras foi mais fácil?
- 21) a) Esboce o conjunto de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$ pelo ponto (x, y) e o vetor gradiente de f em (x, y) para $(x, y) = (1, 1), (1, 0), (-2, 1)$.
- b) Repita o exercício para $f(x, y) = x^2 - y^2$.
- 22) Considere a função $f(x, y) = x^2 e^y$.
- Qual é a inclinação do conjunto de nível em $x = 2, y = 0$?
 - Em que direção devemos nos mover a partir do ponto $(2, 0)$ para obter o maior crescimento de f ? Expresse sua resposta como um vetor de comprimento 1.
- 23) Um firma usa x horas de mão-de-obra não qualificada e y horas de mão-de-obra qualificada diariamente para produzir $Q(x, y) = 60x^{2/3}y^{1/3}$ unidades de produto por dia. Atualmente esta firma emprega 64 horas de mão-de-obra não qualificada e 27 horas de mão-de-obra qualificada.
- Qual é o nível de produção atual?
 - Em que direção (expressa por vetor unitário) a firma deveria mudar (x, y) se quiser aumentar a produção o mais rapidamente?
 - A firma está planejando contratar uma hora e meia adicional de mão-de-obra qualificada. Use o Cálculo para estimar a correspondente alteração na mão-de-obra não qualificada que manteria a produção no nível atual.
- 24) Uma solução do sistema $x^3y - z = 1, x + y^2 + z^3 = 6$ é $x = 1, y = 2, z = 1$. Use o cálculo para estimar os correspondentes x e y quando $z = 1,1$.
- 25) Considere o sistema de equações $y^2 + 2u^2 + v^2 - xy = 15, 2y^2 + u^2 + v^2 + xy = 38$ na solução $x = 1, y = 4, u = 0, v = -1$. Considere u e v exógenas e x e y endógenas. Use o cálculo para estimar os valores de x e y que correspondem a $u = 0,9, v = -1,1$.
- 26) O sistema $xz^3 + y^2v^4 = 2, xz + yvz^2 = 2$ define v e z como funções C^1 de x e y em torno de $(1, 1, 1, 1)$? Se definir, calcule $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ nesse ponto.
- 27) Verifique que $x = 1, y = 4, u = 1, v = -1$ é uma solução do sistema $y^2 + 2u^2 + v^2 - xy = 15, 2y^2 + u^2 + v^2 + xy = 38$. Se y cresce para 4,02 e x permanece fixo, existe um (u, v) perto de $(1, -1)$ que resolve este sistema? Caso não exista, por que não? Caso exista, estime os novos valores de u e v .
- 28) Uma firma usa dois insumos para sua produção por meio da função de produção Cobb-Douglas $z = x^a y^b$, onde $a = b = 0,5$. O atual nível de produção é $x = 25, y = 100$. A firma irá introduzir uma nova tecnologia que mudará o expoente b de sua função de produção para $b = 0,504$, sem alterar a . Use o cálculo para estimar a combinação de insumo que manterá inalterados tanto o nível de produção quanto a soma dos

insumos. [Sugestão: trabalhe com o sistema $x^a y^b = c$ (ou, melhor ainda, com $a \ln x + b \ln y = \ln c$) e $x + y = 125$].

29) Quais das seguintes funções são homogêneas? Quais são os graus daquelas que são homogêneas?

- a) $3x^5y + 2x^2y^4 - 3x^3y^3$
- b) $3x^5y + 2x^2y^4 - 3x^3y^4$
- c) $x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + 3xy^{-1} + 7$
- d) $x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} + 6x$
- e) $x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} + 6x + 4$
- f) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + 3$

30) Prove que o produto de funções homogêneas é uma função homogênea.

31) Prove que, se f e g são funções de $\mathbf{R}^n$ homogêneas de graus diferentes, então $f + g$ não é homogênea.

32) A função nula $f(x) = 0$ é homogênea? Se for, de qual grau? Como sua resposta está relacionada com o exercício anterior?

33) Obtenha a homogeneização de grau um de cada uma das seguintes funções:

- a) e^x b) $\ln(x)$ c) 5 d) $x_1^2 + x_2^3$ e) $x_1^2 + x_2^2$

34) Quais das seguintes são transformações monótonas de $\mathbf{R}_+$?

- a) $z^4 + z^2$ b) $z^4 - z^2$ c) $\frac{z}{z+1}$ d) $\sqrt{z}$ e) $\sqrt{z^2 + 4}$

35) Use a transformação monótona z^k para provar que toda função homogênea é equivalente a uma função homogênea de grau um.

36) Ter utilidade marginal decrescente, ou seja, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) < 0$ para cada i , é uma propriedade ordinal? Por quê?

37) Quais das seguintes funções são homotéticas? Justifique cada resposta.

- a) $e^{x^2y} e^{-xy^2}$
- b) $2 \log(x) + 3 \log(y)$
- c) $x^3y^6 + 3x^2y^4 + 6xy^2 + 9$
- d) $x^2y + xy$
- e) $\frac{x^2y^2}{xy+1}$

38) Prove que toda função linear é homogênea, côncava e convexa.

39) Quais das seguintes funções de $\mathbf{R}^n$ é côncava ou convexa?

- a) $f(x) = 3e^x + 5x^4 - \ln(x)$
- b) $f(x, y) = -3x^2 + 2xy - y^2 + 3x - 4y + 1$
- c) $f(x, y, z) = 3e^x + 5y^4 - \ln(z)$
- d) $f(x, y, z) = Ax^a y^b z^c, \quad a, b, c > 0$

- 40) Suponha que um monopolista de um só produto enfrenta uma função de demanda inversa $p = F(q)$ e uma função custo $q \rightarrow C(q)$.
- Escreva por extenso uma expressão para o lucro como função de q .
 - Quais hipóteses sobre F e C garantem a concavidade da função lucro?
- 41) Para cada uma das seguintes funções de $\mathbf{R}^1$, determine se é quase-côncava, quase-convexa, ambos ou nenhuma das duas:
- e^x
 - $\ln(x)$
 - $x^3 + x$
 - $x^3 - x$
 - $x^4 - x^2$
 - $x^4 + x^2$
 - $3x^3 + 5x^2 + 7x$
 - $\sin(x)$
- 42) Para cada uma das seguintes funções, determine se é quase-côncava, quase-convexa, ambas, ou nenhuma das duas:
- $f(x, y) = ye^{-x}$ em $\mathbf{R}^2$
 - $f(x, y) = ye^{-x}$ em $\mathbf{R}_+^2$
 - $f(x, y) = (2x + 3y)^3$ em $\mathbf{R}^2$
 - $f(x, y, z) = (e^x + 5y^4 + |z|)^{\frac{1}{2}}$
 - $f(x, y) = (y - x^4)^{\frac{1}{3}}$
 - $f(x, y) = \frac{y}{x^2+1}$ em $\mathbf{R}_+^2$
 - $f(x, y) = \frac{y}{x^2+1}$ em $\mathbf{R}^2$
 - $f(x, y) = yx^{-2}$ em $\mathbf{R}_+^2$
 - ke^{x^tAx} , onde A é uma matriz positiva e k é uma constante positiva.