Matemática Aplicada à Economia I – Lista 1 – Cálculo a Uma Variável

1) Para cada uma das seguintes funções, demarque pontos suficientes para poder traçar um gráfico completo. Em seguida responda as seguintes questões:
   a) Onde a função cresce e onde ela decresce?
   b) Encontre os máximos e mínimos locais e globais destas funções:

   i) $y = 3x - 2$ ii) $y = -2x$ iii) $y = x^2 + 1$
   iv) $y = x^3 + x$ v) $y = x^3 - 3$ vi) $y = |x|$

2) Obtenha o domínio de cada uma das seguintes funções:

   a) $y = \frac{1}{x-1}$ b) $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ c) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

   d) $y = \frac{x}{x^2-1}$ e) $y = \sqrt{1 - x^2}$ f) $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-1}}$

3) Encontre a derivada das seguintes funções em um ponto arbitrário:

   a) $y = -7x^3$ b) $y = 12x^{-2}$ c) $y = 3x^{-3/2}$

   d) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ e) $y = 3x^2 - 9x + 7x^{\frac{2}{5}} - 3x^{\frac{1}{2}}$

   f) $y = 4x^5 - 3x^{\frac{1}{2}}$ g) $y = (x^2 + 1)(x^2 + 3x + 2)$

   h) $y = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(4x^5 - 3\sqrt{x}\right)$ i) $y = \frac{x-1}{x+1}$

   j) $y = \frac{x}{x^2+1}$ k) $y = (x^5 - 3x^2)^7$

   l) $y = 5(x^5 - 6x^2 + 3x)^{2/3}$ m) $y = (x^3 + 2x)^3(4x + 5)^2$

4) Calcule a derivada segunda das funções do exercício anterior.

5) Para cada uma das funções a seguir, esboce seu gráfico e determine se é contínua e/ou diferenciável no ponto de transição entre suas duas fórmulas:

   a) $y = \begin{cases} +x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} +x^2 + 1, & x \geq 0 \\ -x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$

   c) $y = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ x, & x > 1 \end{cases}$ d) $y = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ 3x + 2, & x \geq 1 \end{cases}$

6) Use as técnicas de derivada primeira para esboçar os gráficos das seguintes funções:

   a) $y = x^3 + 3x$ b) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 11$ $c)$ $y = \frac{1}{3}x^3 + 9x + 3$

   d) $y = x^7 - 7x$ e) $y = x^{\frac{2}{3}}$ f) $y = 2x^6 - 3x^4 + 2$

7) Para as funções do exercício anterior, calcule as regiões de convexidade e de concavidade e inclua essa informação em seus gráficos.

8) Esboce o gráfico de uma função que tem as seguintes propriedades:

a) $f'(x) > 0\ para - 4 < x < -2\ e\ 2 < x < 4$;
b) $f'(x) < 0\ para - \infty < x < -4, -2 < x < 2\ e\ 4 < x < \infty$;
c) $f''(x) > 0\ para - \infty < x < -3\ e\ 0 < x < 3$;
d) $f''(x) < 0\ para - 3 < x < 0\ e\ 3 < x < \infty$.

9) Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções racionais:

a) $y = \frac{x}{x^2-1}$; b) $y = \frac{x}{x^2+1}$; c) $y = \frac{x^2}{x+1}$;

e) $y = \frac{x^2+3x}{x^2-1}$; e) $y = \frac{x^2+1}{x}$; f) $y = \frac{1}{x^2+1}$;

10) Para cada uma das seguintes funções f, com domínios especificados D_1 e D_2, encontre o máximo global e o mínimo global de f em cada D_i, se existirem. Justifique suas respostas:

a) $y = \frac{1}{x}$ $em\ D_1 = (1; 2)$ $e\ em\ D_2 = [1; 2]$
b) $y = x^3 + 3x$ $em\ \ D_1 = (-\infty; +\infty)$ $e\ em\ D_2 = [0; 1]$
c) $y = x^3 - 3x$ $em\ \ D_1 = [-4; -2]$ $e\ em\ D_2 = [0; \infty)$
d) $y = \frac{x^2}{x+1}$ $em\ \ D_1 = [0; 10]$ $e\ em\ D_2 = [0; \infty)$
e) $y = 3x^5 - 5x^3$ $em\ \ D_1 = [-2; 2]$ $e\ em\ D_2 = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$
f) $y = x + \frac{1}{x}$ $em\ \ D_1 = (0; \infty)$ $e\ em\ D_2 = (-\infty; 0)$
g) $y = \frac{1}{1+x^2}$ $em\ \ D_1 = (-\infty; +\infty)$ $e\ em\ D_2 = [1; 2]$
h) $y = 3x + 5 + \frac{75}{x}$ $em\ D_1 = -2; 2]$ $e\ em\ D_2 = [1; 10]$

11) Um fabricante produz artefatos a um custo de \$5 cada. O fabricante calcula que se cada artefato é vendido por x unidades monetárias, então serão vendidos $(15 - x)$ artefatos. Qual é a função lucro do fabricante? Qual é o preço que o fabricante deveria cobrar para maximizar o lucro?

12) Um fabricante pode produzir livros de economia a \$5 cada. Atualmente o livro é vendido a \$10 e são vendidos 10 exemplares por dia. O fabricante estima que cada unidade monetária a menos no preço faz com que seja vendido um exemplar a mais. Escreva as funções demanda e lucro. Qual preço x maximiza o lucro?

13) O que acontece com uma firma competitiva cuja função custo exibe custo marginal decrescente em todos os pontos? Construa uma função custo concreta deste tipo e realize a busca pelo produto que maximiza o lucro.

14) Para $F(p) = a - bc$ e $C(x) = kx^2$, calcule explicitamente a fórmula para o produto ótimo e seu preço.

15) Utilize as funções g e h a seguir para formar funções compostas gof. Use a Regra da Cadeia para calcular a derivada de todas as funções a partir das derivadas das duas funções componentes. Em seguida, calcule cada derivada diretamente, usando sua expressão para a função composta, simplifique e compare suas respostas.

a) $g(x) = x^2 + 4$ $\quad h(z)5z - 1;$
b) $g(x) = x^3$ $\quad h(z) = (z-1)(z+1);$
c) $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ $\quad h(z) = \frac{z+1}{1-z};$
d) $g(x) = 4x + 2$ $\quad h(z) = \frac{1}{4}(z-2);$
e) $g(x) = \frac{1}{x}$ $\quad h(z) = z^2 + 1.$

16) Sabendo que a derivada de $senx$ é $cosx$, a derivada de $\exp(x)$ é a própria $\exp(x)$ e que a derivada de $logx$ é $1/x$, use a Regra da Cadeia para calcular as derivadas das seguintes funções compostas:

a) $y = sen(x^4)$ $\quad$ b) $y = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad$ c) $y = \sqrt{senx}$
d) $y = sen\sqrt{x}$ $\quad$ e) $y = \exp(x^2 + 3x)$ $\quad$ f) $y = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$
g) $y = \log(x^2 + 4)$ $\quad$ h) $y = sen((x^2 + 4)^2)$

17) Uma firma calcula que em um dado momento sua produção está crescendo a uma taxa de 2 unidades por hora e que seu custo marginal é 12. Qual é a taxa de crescimento do custo por hora? Explique sua resposta.