Matemática Aplicada à Economia I – Lista 2 – Álgebra Linear

1) A economia na ilha Baco produz somente uvas e vinho. A produção de 1 quilo de uvas requer ½ quilo de uvas, 1 trabalhador e nenhum vinho. A produção de 1 litro de vinho requer ½ quilo de uvas, 1 trabalhador e ¼ litro de vinho. A ilha tem 10 trabalhadores que, todos juntos, exigem 1 quilo de uvas e 3 litros de vinho para consumo próprio. Equacione o sistema de insumo-produto da economia desta ilha. Você consegue resolver o sistema?

2) Suponha agora que a produção de 1 quilo de uvas requeira 7/8 litro de vinho. Sem alterar os demais coeficientes de insumo-produto, escreva o novo sistema para os níveis de produção.

3) Para o modelo de emprego de Markov, Hall dá $p = 0{,}106$ e $q = 0{,}993$ para mulheres de raça negra e $p = 0{,}151$ e $q = 0{,}997$ para mulheres de raça branca. Encontre os sistemas de Markov de equações a diferenças para essas duas situações. Calcule as distribuições estacionárias.

4) Resolva os sistemas seguintes por substituição, eliminação gaussiana e por eliminação de Gauss-Jordan:

a) $$\begin{aligned} x - 3y + 6z &= -1 \\ 2x - 5y + 10z &= 0 \\ 3x - 8y + 17z &= 1 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 12x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned}$$

5) Resolva os seguintes sistemas por eliminação de Gauss-Jordan. Observe que no terceiro sistema é necessário permutar equações.

a) $$\begin{aligned} 3x + 3y &= 4 \\ x - y &= 10 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 4x + 2y - 3z &= 1 \\ 6x + 3y - 5z &= 0 \\ x + y + 2z &= 9 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x + 2y - z &= 2 \\ x + y + z &= -2 \\ 2x - 4y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

6) Use eliminação gaussiana para resolver $\begin{cases} 3x + 3y = 4 \\ -x - y = 10 \end{cases}$. O que acontece e por quê?

7) Resolva o sistema geral $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$. Que hipóteses precisam ser criadas em relação aos coeficientes a_{ij} para encontrarmos uma solução?

8) Coloque as matrizes em forma escalonada reduzida por linhas.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

9) Utilize a eliminação de Gauss-Jordan na forma matricial para resolver o sistema

$$\begin{aligned} w + x + 3y - 2z &= 0 \\ 2w + 3x + 7y - 2z &= 9 \\ 3w + 5x + 13y - 9z &= 1 \\ -2w + x \qquad\quad - z &= 0 \end{aligned}$$

10) Reduza as seguintes matrizes à forma escalonada por linhas e à forma escalonada reduzida por linhas:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

11) Resolva o sistema de equações $\begin{cases} -4x + 6y + 4z = 4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

12) Utilize a eliminação de Gauss-Jordan para resolver os quatro seguintes sistemas de equações lineares. Quais variáveis são livres e quais são básicas em cada solução?

a) $\begin{aligned} w + 2x + y - z &= 1 \\ 3w - x - y + 2z &= 3 \\ -x + y - z &= 1 \\ 2w + 3x + 3y - 3z &= 3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} w - x + 3y - z &= 0 \\ w + 4x - y + z &= 3 \\ 3w + 7x + y + z &= 6 \\ 3w + 2x + 5y - z &= 3 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} w + 2x + 3y - z &= 1 \\ -w + x + 2y + 3z &= 2 \\ 3w - x + y + 2z &= 1 \\ 2w + 3x - y + z &= 1 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} w + x - y + 2z &= 0 \\ 2w + 2x - 2y + 4z &= 6 \\ -3w - 3x + 3y - 6z &= 9 \\ 2w - 2x + 2y - 4z &= 6 \end{aligned}$

13) Para quais valores do parâmetro a o sistema de equações abaixo tem uma solução?

$$\begin{aligned} 6x + y &= 7 \\ 3x + y &= 4 \\ -6x - 2y &= a \end{aligned}$$

14) Calcule o posto de cada uma das seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 \\ 1 & 9 & -7 & 4 \\ 1 & 3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 5 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 2 \\ 2 & 15 & -13 & 11 & 16 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -7 & 3 & 1 \\ 1 & 9 & -6 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

15) Mostre que uma matriz quadrada A é não singular se, e somente se, suas formas escalonadas por linhas não tem zeros na diagonal.

16) Em cada um dos dois sistemas abaixo, queremos separar as variáveis entre exógenas e endógenas, de tal modo que cada escolha de valores para as variáveis exógenas determine valores únicos para as variáveis endógenas. Para cada sistema,
a) determine quantas variáveis podem ser endógenas a qualquer momento,
b) determine uma separação bem-sucedida entre variáveis exógenas e endógenas, e
c) encontre uma fórmula explícita para as variáveis endógenas em termos das variáveis exógenas:

i) $\begin{aligned} x + 2y + z - w &= 1 \\ 3x + 6y - z - 3w &= 2 \end{aligned}$

ii) $\begin{aligned} x + 2y + z - w &= 1 \\ 3x - y - 4z + 2w &= 3 \\ y + z + w &= 0 \end{aligned}$

17) Considere o sistema

$$\begin{aligned} w - \ \ x + 3y - \ \ z &= 0 \\ w + 4x - \ y + 2z &= 3 \\ 3w + 7x + \ y + \ \ z &= 6 \end{aligned}$$

a) Separe as variáveis entre endógenas e exógenas, de tal modo que cada escolha das variáveis exógenas determine valores únicos para as variáveis endógenas.

b) A partir da sua resposta ao item a, quais são os valores das variáveis endógenas, quando todas as variáveis exógenas são tomadas como sendo 0?

c) Encontre uma separação entre as variáveis endógenas e exógenas (com o mesmo número de cada uma obtido na parte a) que não funcione no sentido do item a. Encontre um valor das novas variáveis exógenas para o qual exista uma infinidade de variáveis endógenas correspondente.

18) Ocorre, às vezes, que $AB = BA$.

a) Verifique isso para $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

b) Mostre que, se B é um múltiplo escalar da matriz identidade $2x2$, então $AB = BA$ para qualquer matriz A de tamanho $2x2$.

19) Mostre que $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ são idempotentes.

20) Verifique que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & 0 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

21) Inverta as seguintes matrizes

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 6 \\ -4 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 & 5 \\ 6 & 21 & 8 & 17 \\ 4 & 12 & -4 & 13 \\ 0 & -3 & -12 & 2 \end{pmatrix}$

22) Inverta a matriz de coeficientes para resolver cada um dos seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ 6x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 20 \\ -4x_1 - 3x_2 + 9x_3 = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 2 \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 1 \\ -6x_1 - 10x_2 = -6 \end{cases}$

23) Para $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ calcule $A^3, A^4,\ e\ A^{-2}$.

24) a) Prove que $(AB)^k = A^k B^k\ se\ AB = BA$.

b) Mostre que, em geral, $(AB)^k \neq A^k B^k$.

c) Conclua que $(A + B)^2$ não é igual a $A^2 + 2AB + B^2$, a menos que $AB = BA$.

25) Suponha que a matriz dos coeficientes técnicos é dada por $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$.
Encontre os vetores de produção bruta quando a demanda final é

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

26) Para cada uma das seguintes matrizes, calcule a forma escalonada por linhas e verifique a conclusão de que $detA = \pm detR$, sendo R a forma escalonada da matriz A.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & 3 \\ -6 & -10 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

27) Calcule a matriz adjunta e a matriz inversa de cada uma das seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

28) Use a regra de Cramer para resolver os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 10x_2 = 1 \end{cases}$

29) Considere o seguinte modelo linear IS-LM mais elaborado:

a) $Y = C + I + G$
b) $C = c_0 + c_1(Y - T) - c_2 r$
c) $T = t_0 + t_1 Y$
d) $I = I^0 + a_0 Y - ar$
e) $M_s = mY + M^0 - hr$

Substitua c no lugar de b para obter b'; então substitua b' em d para obter a nova curva IS. Combine isso com e e use a regra de Cramer para resolver esse sistema para Y e r em termos das variáveis exógenas. Mostre que um aumento em G ou uma redução de t_0 ou t_1 aumentará Y; em termos macroeconômicos, a política fiscal keynesiana "funciona" neste modelo. Mostre que essas mudanças também aumentam r. Quanto à política monetária, mostre que um aumento em M_s aumenta Y e diminui r.

30) Para os pontos P e Q listaos a seguir, trace o correspondente vetor deslocamento $\overrightarrow{PQ}$ e calcule a correspondente n-upla $\overrightarrow{PQ}$:

a) $P(0,0)\ e\ \ Q(2,-1)$
b) $P(3,2)\ e\ \ Q(5,3)$
c) $P(0,0,0)\ \ e\ \ Q(1,2,4)$
d) $P(0,1,0)\ \ e\ \ Q(2,-1,3)$

31) Sejam $\boldsymbol{u} = (1,2), \boldsymbol{v} = (0,1), \boldsymbol{w} = (1,-3), \boldsymbol{x} = (1,2,0)\ e\ \boldsymbol{z} = (0,1,1)$. Calcule os seguintes vetores, sempre que estiverem definidos: $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, -4\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{z}, 3\boldsymbol{z}, 2\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} + \boldsymbol{2v}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}, 3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, -2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w} + 2\boldsymbol{x}$.

32) Encontre o comprimento dos seguintes vetores e esboce-os:

a) (3,4); b) (0,3); c) (1,1,1); d)(1,2,3); e)(-1,-1);

33) Encontre a distancia de P a Q para os seguintes valores:

a) $P(0,0)\ e\ \ Q(3,-4)$

b) $P(1,-1)\ e\ Q(7,7)$
c) $P(1,1,-1)\ e\ Q(2,-1,5)$
d) $P(1,2,3,4)\ e\ Q(1,0,-1,0)$

34) Para cada par de vetores a seguir, determine primeiro se o ângulo entre eles é agudo, obtuso ou reto e em seguida calcule esse ângulo:
a) $\boldsymbol{u} = (1,0) \quad \boldsymbol{v} = (2,2)$
b) $\boldsymbol{u} = (1,1,0) \quad \boldsymbol{v} = (1,2,1)$
c) $\boldsymbol{u} = (4,1) \quad \boldsymbol{v} = (2,-8)$
d) $\boldsymbol{u} = (1,0,0,0,0) \quad \boldsymbol{v} = (1,1,1,1,1)$

35) Para cada um dos seguintes vetores, encontre um vetor de comprimento 1 que aponta na mesma direção e sentido: $(3,4), (6,0), (1,1,1)\ e\ (-1,2,-3)$.

36) Prove as seguintes identidades:
a) $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2 = 2\|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{v}\|^2$
b) $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2$

37) Mostre que o ponto médio de $\ell(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ocorre quando $t = \frac{1}{2}$. Em outras palavras, se $\boldsymbol{z} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y}$, mostre que $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\| = \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\|$.

38) Para o ponto $\boldsymbol{p_1} = (3,0)\ e\ \boldsymbol{p}_2 = (5,0)$, escreva as equações paramétricas da reta por $\boldsymbol{p}_1\ e\ \boldsymbol{p}_2$, encontre o ponto médio da reta $\ell(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2)$, e esboce a reta.

39) Transforme cada uma das seguintes equações paramétricas na forma não-paramétrica:
a) $\begin{cases} x_1 = 4-2t \\ x_2 = 3+6t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = 3+t \\ x_2 = 5-t \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 = 3+t \\ x_2 = 5 \end{cases}$

40) Deduza equações paramétricas e não-paramétricas para as retas que passam por cada um dos seguintes pares de pontos de **R²**:
a) $(1,2)\ e\ (3,6)$ b) $(1,1)\ e\ (4,10)$ c) $(3,0)\ e\ (0,4)$

41) Obtenha equações paramétricas e não-paramétricas para os planos por cada um dos ternos de pontos de **R³**:
a) $(6,0,0)(0,-6,0)(0,0,3)$
b) $(0,3,2)(3,3,1)(2,5,0)$

42) Determine se os seguintes pares de planos se intersecionam:
a) $x+2y-3z = 6 \quad e \quad x+3y-2z = 6$
b) $x+2y-3z = 6 \quad e-2x-4y+6z = 10$

43) Encontre a interseção do plano $x+y+z=1$ e a reta $x=3, y=1-7t, z=3-3t.$

44) Use eliminação gaussiana para encontrar a equação da reta que é a interseção dos planos $x+y-z=4\ e\ x+2y+z=3$.

45) Quais dos seguintes conjuntos de vetores é linearmente independente?
a) $(2,1), (1,2)$
b) $(2,1), (-4,-2)$

c) $(1,1,0), (0,1,1)$
d) $(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)$

46) a) escreva (2,2) como uma combinação linear de (1,2) e (1,4).
b) escreva (1,2,3) como uma combinação linear de (1,1,0), (1,0,1) e (0,1,1).

47) Os vetores (1,2,3), (4,5,12) e (0,8,0) geram R^3? Explique.

48) Quais das seguintes coleções são bases de R^2?
a) (1,1), (-2,-2)
b) (1,1), (2,-2)
c) (1,-1), (-2,2)
d) (1,-1), (1,0)

49) Quais das seguintes coleções são bases de R^3?
a) (1,1,1), (1,2,1)
b) (1,1,1), (1,2,1), (1,0,1)
c) (6,3,9), (5,2,8), (4,1,7)
d) (1,1,1), (1,2,1), (1,0,0)
e) (1,1,1), (1,2,1), (1,0,0), (0,1,0)