

Dinâmica dos Fluidos Elementar e Equação de Bernoulli

PME 3230 - Mecânica dos Fluidos I

PME/EP/USP

Prof. Antonio Luiz Pacífico

2º Semestre de 2016

Conteúdo da Aula

- 1 Introdução
- 2 Aplicação da 2^a de Newton para Fluidos Invíscidos
- 3 Pressões Estática, Dinâmica e de Estagnação
- 4 Aplicação da Equação de Bernoulli
- 5 Exercícios

Justificativa: fluidos reais, viscosos, revelam comportamento de fluido invíscido em diversas situações práticas.

Fluido Perfeito: fluido hipotético que seria incompressível e invíscido.

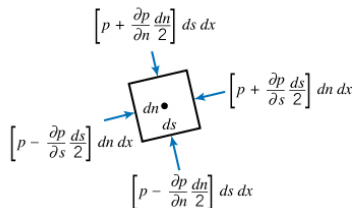
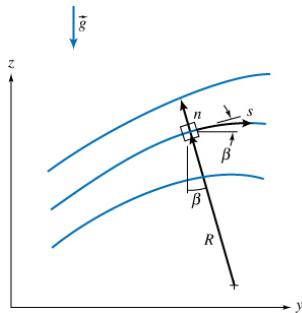
Objetivo: estudo de escoamentos nos quais os efeitos viscosos são desprezíveis e sua compressibilidade não é importante.

Simplificação Resultante: sem as forças devidas ao atrito viscoso as forças atuantes restringem-se às devidas às tensões normais (gravidade e inércia) [$F_{visc} \ll F_{grav}$ e/ou F_{press}].

Os fluidos perfeitos podem ser tratados como um agregado de partículas que suportam pressões normais mas escorregam umas sobre as outras sem resistência.

Equação de Euler em Coordenadas de Linha de Corrente

Considere uma partícula de fluido movendo-se ao longo de uma linha de corrente (direção s) com forças atuantes, exceto de cisalhamento (devida ao atrito viscoso), como ilustrado na figura abaixo (a força peso não está representada na figura, mas é considerada). Neste figura: a direção n é a normal, perpendicular à s ; p é a pressão no centro do elemento; e o volume do elemento é $dx \cdot ds \cdot dn$, com x ortogonal ao plano da figura.



Equação de Euler em Coordenadas de Linha de Corrente

A 2ª Lei de Newton aplicada ao elemento fornece:

$$\begin{aligned}\rho \cdot dn \cdot dx \cdot ds \cdot a_s &= \left(p - \frac{\partial p}{\partial s} \cdot \frac{ds}{2} \right) \cdot dn \cdot dx \\ &\quad - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s} \cdot \frac{ds}{2} \right) \cdot dn \cdot dx - \rho \cdot g \cdot \sin\beta \cdot dn \cdot dx \cdot ds \\ \therefore \rho \cdot a_s &= -\frac{\partial p}{\partial s} - \rho \cdot g \cdot \sin\beta\end{aligned}$$

Uma vez que $\sin\beta = \partial z / \partial s$, e que a aceleração na direção s é escrita por,

$$a_s = \frac{DV_s}{Dt} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \cdot \frac{\partial V_s}{\partial s}$$

Pode-se escrever que,

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - g \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial V_s}{\partial t} + V_s \cdot \frac{\partial V_s}{\partial s} \quad (1)$$

A Eq. (1) é conhecida como equação de Euler em coordenadas de linha de corrente.

Equação de Euler em Coordenadas de Linha de Corrente

Para escoamentos em regime permanente a equação de Euler em coordenadas de linha de corrente reduz-se a:

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} - g \cdot \frac{\partial z}{\partial s} = V_s \cdot \frac{\partial V_s}{\partial s} \quad (2)$$

Para obter, agora, a equação de Euler na direção normal às linhas de corrente, aplica-se a 2ª Lei de Newton à direção n em relação ao elemento fluido:

$$\begin{aligned} \rho \cdot dn \cdot dx \cdot ds \cdot a_n &= \left(p - \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{dn}{2} \right) \cdot ds \cdot dx \\ &\quad - \left(p + \frac{\partial p}{\partial n} \cdot \frac{dn}{2} \right) \cdot ds \cdot dx - \rho \cdot g \cdot \cos \beta \cdot dn \cdot dx \cdot ds \\ \therefore \rho \cdot a_n &= -\frac{\partial p}{\partial n} - \rho \cdot g \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

Equação de Euler em Coordenadas de Linha de Corrente

Uma vez que $\cos \beta = \partial z / \partial n$, e que a aceleração na direção n é escrita por,

$$a_n = -\frac{V_s^2}{R} + \frac{\partial V_n}{\partial t}$$

Note que o termo V_s^2/R é multiplicado por -1 porque este termo está orientado para baixo e $\vec{n}$ para cima, conforme figura. Assim, pode-se escrever que,

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} - g \cdot \frac{\partial z}{\partial n} = -\frac{V_s^2}{R} + \frac{\partial V_n}{\partial t} \quad (3)$$

A Eq. (3) é conhecida como equação de Euler na direção normal às linhas de corrente. Para escoamentos em regime permanente a equação de Euler na direção normal às linhas de corrente reduz-se a:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial n} + g \cdot \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{V_s^2}{R} \quad (4)$$

Equação de Bernoulli

A Equação de Bernoulli é o resultado da integração da equação de Euler ao longo de uma linha de corrente para a condição de regime permanente. Tomando, assim, a Eq. (2) e considerando o deslocamento ds de uma partícula ao longo de uma linha de corrente, então:

$$\frac{\partial p}{\partial s} \cdot ds = dp \text{ representa a variação de pressão ao longo da LC}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} \cdot ds = dz \text{ representa a variação de elevação ao longo da LC}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} \cdot ds = dV \text{ representa a variação de velocidade ao longo da LC}$$

Então, após multiplicar a Eq. (2) por ds , tem-se (removendo o subscrito s de V , pois a partir daqui é redundante):

$$-\frac{dp}{\rho} - g \cdot dz = V \cdot dV \Rightarrow \frac{dp}{\rho} + g \cdot dz + V \cdot dV = 0$$

Equação de Bernoulli

Integrando:

$$\int \frac{dp}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = Cte$$

Finalmente, para fluidos incompressíveis, resulta na Equação de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = Cte \quad (5)$$

onde a *Cte* é única para cada linha de corrente.

A equação de Bernoulli é muito poderosa para muitas aplicações de Mecânica dos Fluidos. Porém, deve-se obedecer certas restrições que, na verdade, já foram sendo citadas ao longo da sua dedução. A seguir apresenta-se um resumo destas restrições.

Restrições de Uso da Equação de Bernoulli

Para a utilização da Eq. de Bernoulli, devem ser respeitadas as seguintes restrições:

- 1 Escoamento em regime permanente;
- 2 Escoamento de fluido incompressível;
- 3 Escoamento sem atrito viscoso;
- 4 Escoamento ao longo de uma única linha de corrente;
- 5 Ausência de trabalho de eixo ao longo da linha de corrente;
- 6 Ausência de troca de calor ao longo da linha de corrente.

Tome cuidado com o uso incorreto da Eq. de Bernoulli!!!

Integração da 2ª Lei de Newton na Direção Normal

Aplicando o mesmo procedimento feito para a dedução da equação de Bernoulli à Eq. (4), multiplicando-a por dn , resulta:

$$\frac{dp}{\rho} + g \cdot dz = \frac{V^2}{R} \cdot dn$$

Integrando e considerando fluido incompressível:

$$\frac{p}{\rho} + gz - \int \frac{V^2}{R} \cdot dn = Cte \quad (6)$$

OBS: o livro texto [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004)] não usa a normal para a dedução desta equação, mas um versor que aponta para o centro, instantâneo, de curvatura. Dai a diferença de sinal entre o termo integral da Eq. (6) e o mesmo termo no livro texto.

Pressões Estática, Dinâmica e de Estagnação

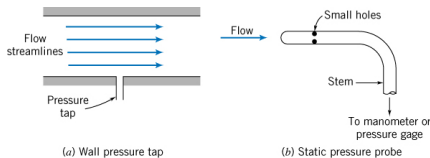


Figura: Medição da pressão estática.

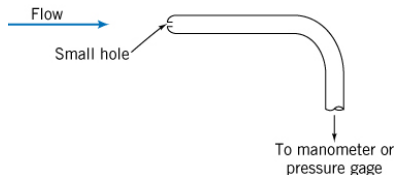


Figura: Medição da pressão de estagnação.

Na eq. de Bernoulli p é a **pressão estática**, também conhecida como pressão termodinâmica. Esta pressão deve ser medida através de pequenos orifícios (de 1,5 a 3 mm de diâmetro) sem rebarbas e perpendiculares à parede no local de medição.

A **pressão de estagnação** é dada pelo valor nulo da velocidade do escoamento conseguido por meio de um processo de desaceleração sem atrito. Tomando a eq. de Bernoulli com $\Delta z = 0$ entre um ponto qualquer onde $p \neq 0$ e $V \neq 0$, e um ponto de estagnação (subscrito 0) com $p_0 \neq 0$ e, portanto, $V_0 = 0$, na mesma LC, tem-se:

$$p_0 + \frac{\rho \cdot V_0^2}{2} = p + \frac{\rho \cdot V^2}{2} \therefore p_0 = p + \frac{\rho \cdot V^2}{2}$$

onde $p_0 = \dots$ é a expressão matemática para a pressão de estagnação.

Pressões Estática, Dinâmica e de Estagnação

O termo $(1/2) \cdot \rho \cdot V^2$ é conhecido como **pressão dinâmica** do escoamento, p_{din} , dada também pela diferença entre as pressões de estagnação, p_{estag} , e estática, p_{estat} :

$$p_{estag} = p_{estat} + p_{din} \Rightarrow p_{din} = p_{estag} - p_{estat}$$

Observe que, para o caso ilustrado anteriormente, a velocidade do escoamento pode ser determinada usando esta diferença:

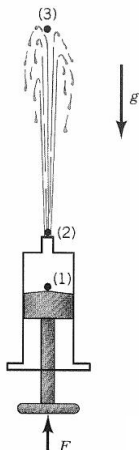
$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_0 - p)}{\rho}}$$

A soma de todos os termos da eq. de Bernoulli é chamado de **pressão total**, p_{tot} , e o termo $\rho \cdot g \cdot z$ é conhecido como **pressão hidrostática**, p_{hidr} . Assim,

$$p_{tot} = p_{estat} + p_{din} + p_{hidr} = p_{estag} + p_{hidr} = Cte \text{ ao longo de uma LC}$$

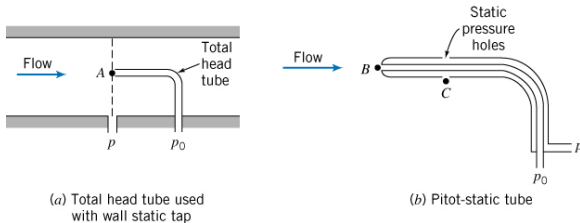
Pressões Estática, Dinâmica e de Estagnação

Exemplo 3.4, página 100, Munson 4^a Edição:



Ponto	Tipo de Energia		
	Cinética $\rho V^2 / 2$	Potencial γz	Pressão p
1	Pequena	Zero	Grande
2	Grande	Pequena	Zero
3	Zero	Grande	Zero

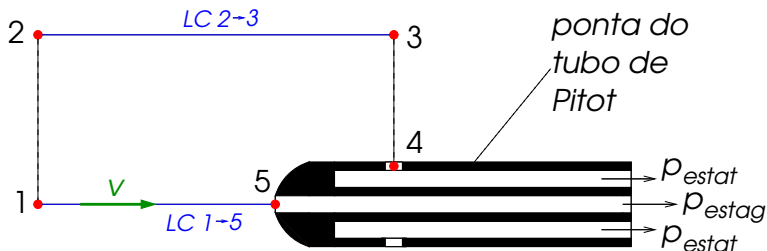
Tubo de Pitot



As pressões p_{estag} e p_{estat} são medidas por meio de uma sonda com orifícios posicionada na direção do escoamento principal e em sentido oposto a ele. Este instrumento é chamado de sonda de pressão "total", ou tubo de Pitot.

A figura acima mostra duas possíveis configurações experimentais para medição de p_{estag} e p_{estat} . Na figura (a) p_{estat} é medida na parede, enquanto p_{estag} é medida pela sonda alinhada ao escoamento. Na figura (b) ambas as pressões são medidas na mesma sonda (tubo de Pitot), porém adaptada para esta função com dois tubos concêntricos: o tubo interno mede p_{estag} e o espaço entre os tubos externo e interno é usado para medição de p_{estat} .

Tubo de Pitot



A eq. de Bernoulli entre os pontos 4 e 5 não pode ser aplicada porque há, nesta região, uma camada que é dominada pelo atrito viscoso (camada limite). Porém, para a LC de 1 a 5:

$$p_1 + \frac{\rho \cdot V_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_5 + \frac{\rho \cdot V_5^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_5 \quad (\star)$$

$$z_1 = z_5 ; V_5 = 0 \therefore p_1 + \frac{\rho \cdot V_1^2}{2} = p_5 = p_{estag}$$

Tubo de Pitot

Usando, agora, as direções normais $1 \rightarrow 2$ e $4 \rightarrow 3$ (LC's paralelas $\Rightarrow$ *Raio* $\rightarrow \infty$):

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \rho \cdot g \cdot z_2$$

$$p_4 + \rho \cdot g \cdot z_4 = p_3 + \rho \cdot g \cdot z_3$$

Como $V_2 = V_3$; $z_2 = z_3$ e $p_2 = p_3$ (região do escoamento não perturbada pela presença do tubo de Pitot), segue-se que:

$$p_1 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_4 + \rho \cdot g \cdot z_4$$

Substituindo este resultado na Eq. (★), resulta em:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot [(p_5 + \rho \cdot g \cdot z_5) - (p_4 + \rho \cdot g \cdot z_4)]}$$

Como $z_5 - z_4 \cong 0$, finalmente:

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_5 - p_4)}{\rho}}$$

O Tubo de Pitot é usado para medir (indiretamente) a velocidade não no ponto adjacente à sua ponta, mas num ponto à montante, relativamente próximo da sua ponta, mas suficientemente longe para não estar perturbado pela presença do próprio Tubo de Pitot).

Linha de Energia e Linha Piezométrica

É comum escrever a eq. de Bernoulli usando a unidade [m] e designar por H a constante da linha de corrente para a qual se aplica a soma das componentes associadas às pressões estática, dinâmica e hidrostática. Assim,

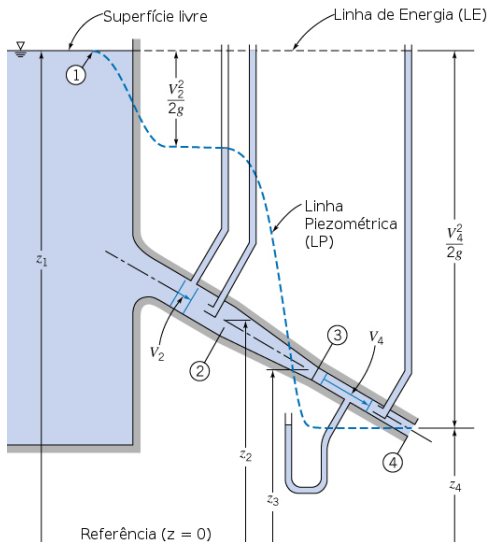
$$\frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2.g} + z = H = Cte$$

onde:

- $\frac{p}{\gamma}$ é a altura de carga devida à pressão estática local;
- $\frac{V^2}{2.g}$ é a altura de carga devida à pressão dinâmica local;
- z é a altura de carga de elevação;
- H é a altura de carga total do escoamento.

A chamada **Linha de Energia**, LE, é a altura de carga total de um escoamento (H), que permanecerá, portanto, constante, num escoamento que respeite às restrições à aplicação da eq. de Bernoulli apresentadas anteriormente.

Linha de Energia e Linha Piezométrica



A **Linha Piezométrica**, LP, é dada pela soma das cargas de elevação e pressão estática: $z + p/\gamma$.

A diferença entre LE e LP dá a carga devida à pressão dinâmica, $V^2/2g$.

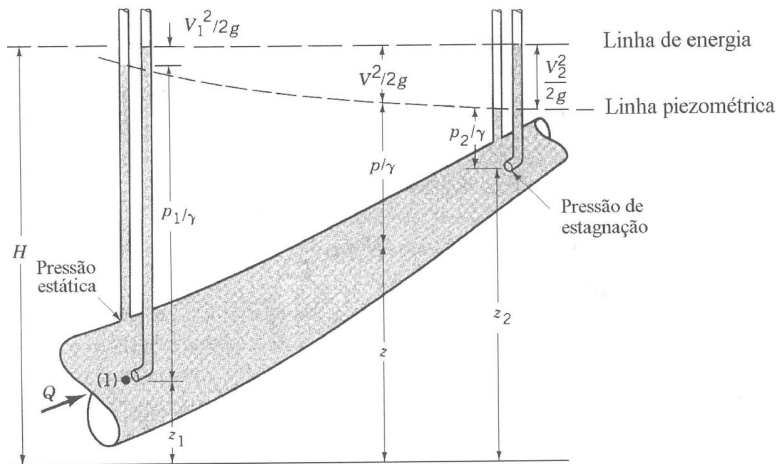
LE $\equiv H = z_1$ (manométrica!).

LP permanece constante quando V se estabiliza.

Na descarga LP $\equiv z_4$. Como a distância entre a LP e a tubulação indica a carga estática (p/γ), trechos de tubulação que se encontram acima da LP indicam cargas estáticas negativas e vice-versa.

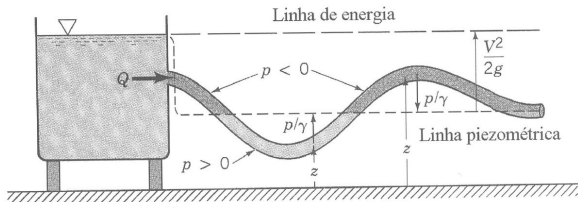
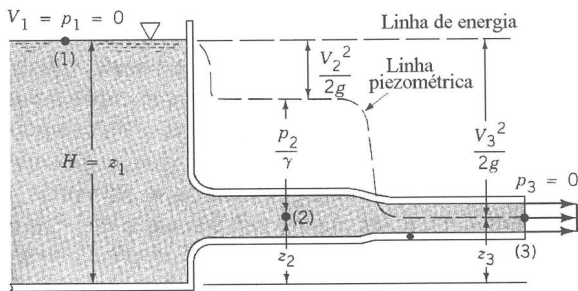
Linha de Energia e Linha Piezométrica

Outros exemplos...

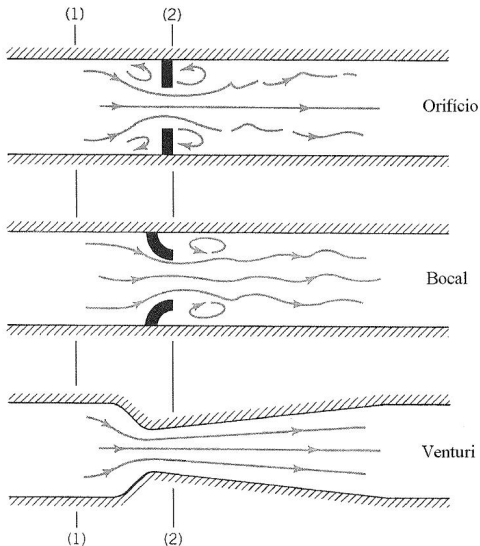


Linha de Energia e Linha Piezométrica

Outros exemplos...



Medição de Vazão



A eq. de Bernoulli é utilizada como ferramenta para medição da velocidade e vazão de escoamentos. Inserindo uma restrição que cause queda acentuada e localizada de pressão e considerando escoamentos sem variações de altura ($z_1 \cong z_2$), pode-se escrever:

$$p_1 + \frac{\rho \cdot V_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \cdot V_2^2}{2}$$

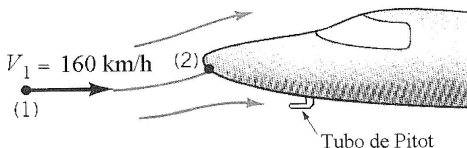
Admitindo perfis de velocidade uniformes nas seções 1 e 2:
 $Q = A_1 \cdot V_1 = A_2 \cdot V_2$. Assim, combinando as equações:

$$Q_{\text{teórico}} = A_2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho \cdot [1 - (A_1/A_2)^2]}}$$

$Q_{\text{real}} < Q_{\text{teórico}} \rightarrow$ Viscosidade e geometria

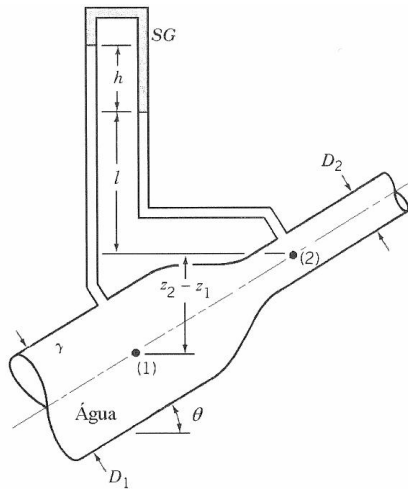
Exercício de Aula 1

Enunciado: A figura abaixo mostra um avião voando a 160 km/h numa altitude de 3000 m. Admitindo que a atmosfera seja a padrão, determine a pressão ao longe do avião, ponto (1), a pressão no ponto de estagnação no nariz do avião, ponto (2), e a diferença de pressão indicada pelo tubo de Pitot que está instalado na fuselagem do avião. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exemplo 3.6]



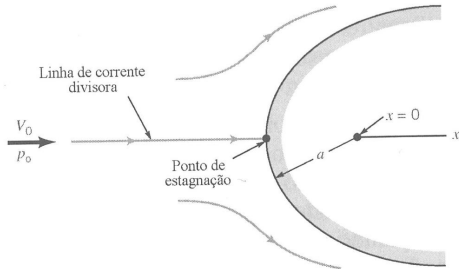
Exercício de Aula 2

Enunciado: A figura ao lado mostra o escoamento de água numa redução. As pressões estáticas em (1) e em (2) são medidas com um manômetro em **U** invertido que utiliza óleo, densidade igual a SG , como fluido de manométrico. Nestas condições, determine a leitura no manômetro (h). [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exemplo 3.9]



Exercício de Aula 3

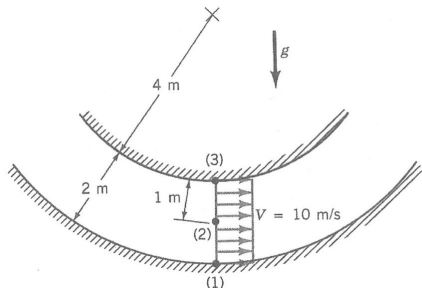
Enunciado: A figura ao lado mostra o escoamento em regime permanente de um fluido incompressível em torno de um objeto (veja vídeo 3.3). A velocidade do escoamento ao longo da linha de corrente horizontal que divide o escoamento ($-\infty \leq x \leq -a$) é dada por $V = V_0 \cdot (1 + a/x)$



onde a é o raio de curvatura da região frontal do objeto e V_0 é a velocidade a montante (ao longe) do cilindro. **(a)** Determine o gradiente de pressão ao longo desta linha de corrente. **(b)** Se a pressão a montante do cilindro é p_0 , integre o gradiente de pressão para obter $p(x)$ na faixa $-\infty \leq x \leq -a$. **(c)** Mostre, utilizando o resultado da parte (b), que a pressão no ponto de estagnação ($x = -a$) é igual a $p_0 + \rho \cdot V_0^2/2$. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.3]

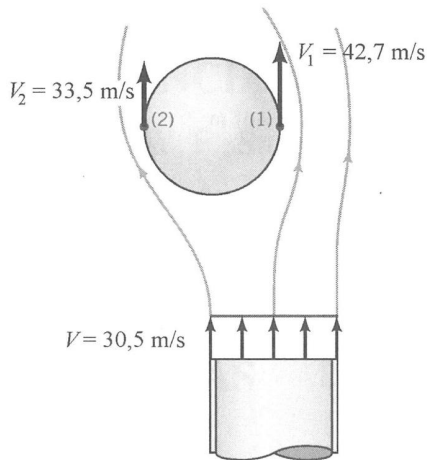
Exercício de Aula 4

Enunciado: Água escoar na curva bidimensional mostrada na figura ao lado. Note que as linhas de corrente são circulares e que a velocidade é uniforme no escoamento. Determine a pressão nos pontos (2) e (3) sabendo que a pressão no ponto (1) é igual a 40 kPa. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.10]



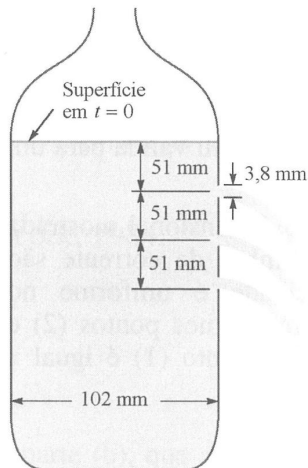
Exercício de Aula 5

Enunciado: A figura ao lado mostra um jato de ar incidindo numa esfera (veja vídeo 3.1). Observe que a velocidade do ar na região na região próxima ao ponto 1 é maior que aquela da região próxima do ponto 2 quando a esfera não está alinhada com o jato. Determine, para as condições mostradas na figura, a diferença entre as pressões nos pontos 2 e 1. Despreze os efeitos viscosos e gravitacionais. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.16]



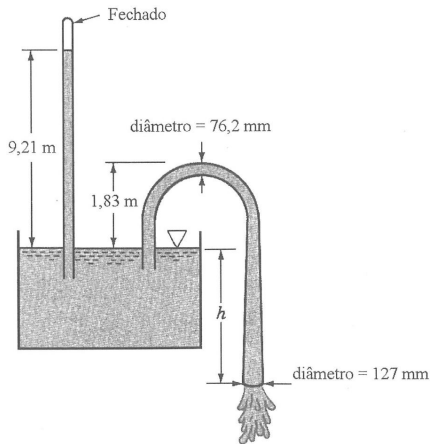
Exercício de Aula 6

Enunciado: A figura ao lado mostra um esboço de uma garrafa de refrigerante que contém água e apresenta três orifícios na sua superfície lateral. Os diâmetros dos orifícios são iguais a 3,8 mm, a distância entre as linhas de centro de orifícios adjacentes é 51 mm e o diâmetro da garrafa é 102 mm. No instante inicial, a superfície livre da água dista 51 mm da linha de centro do primeiro orifício. Admitindo que os efeitos viscosos são desprezíveis e que o regime de escoamento é próximo do permanente, determine o tempo necessário para que a vazão no primeiro orifício se torne nula. Compare seu resultado com aquele que pode ser obtido no vídeo 3.5. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.20]



Exercício de Aula 7

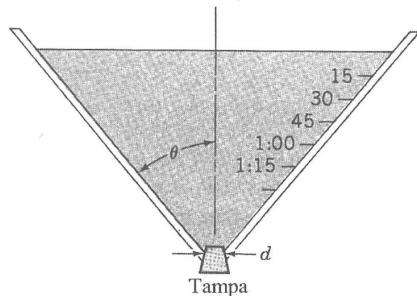
Enunciado: Água é retirada do tanque mostrado na figura ao lado enquanto o barômetro d'água indica uma leitura de 9,21 m. Determine o máximo valor de h com a restrição de que não ocorra cavitação no sistema analisado. Note que a pressão do vapor no topo da coluna do barômetro é igual a pressão de vapor do líquido. [(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004), exercício 3.39]



Exercício de Aula 10

Enunciado: A figura ao lado mostra um cronômetro construído com um funil. O funil é enchido até a borda com água e a tampa é removida no instante $t = 0$. As marcas devem ser colocadas na parede do funil e devem indicar intervalos de tempo iguais a 15 s. O fundo de escala do cronômetro deve ser igual a 3 min (neste instante o funil está vazio). Projete vários funis considerando $\theta = 30, 45$ e 60° e que o diâmetro da seção de descarga do funil é 2,5 mm. Refaça o problema admitindo que o diâmetro da seção de descarga é igual a 1,25 mm.

[(MUNSON; YOUNG; OKIISHI, 2004),
exercício 3.78]



 MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentos da Mecânica dos Fluidos*. 4. ed. São Paulo: Blücher, 2004. ISBN 978-85-212-0343-8.