

# Externalidades e bens públicos

Roberto Guena de Oliveira

USP

21 de setembro de 2012

# Parte I

## Externalidades

# Externalidades – definição

Uma externalidade está presente sempre que o bem estar de um consumidor ou as possibilidades de produção de uma firma são diretamente (isto é, por mecanismos não mediados por mecanismos preços) afetados pelas ações de outro agente.

# Sumário

1 Externalidades na produção

2 Externalidades no consumo

3 Exercícios

# Exemplo: externalidades entre empresas

- Duas empresas tomadoras de preço: empresa 1 e empresa 2.

# Exemplo: externalidades entre empresas

- Duas empresas tomadoras de preço: empresa 1 e empresa 2.
- A empresa 1 escolhe o seu nível de produção  $y_1$  e o nível de poluição  $x$ . A empresa 2 escolhe seu nível de produção  $y_2$ .

# Exemplo: externalidades entre empresas

- Duas empresas tomadoras de preço: empresa 1 e empresa 2.
- A empresa 1 escolhe o seu nível de produção  $y_1$  e o nível de poluição  $x$ . A empresa 2 escolhe seu nível de produção  $y_2$ .
- As funções de lucro são:

$$\pi_1 = p_1 y_1 - c_1(y_1, x) \quad \text{e} \quad \pi_2 = p_2 y_2 - c_2(y_2, x)$$

Nas quais  $p_1$  e  $p_2$  são os preços e  $c_1(y_1, x)$  e  $c_2(y_2, x)$  são os preços e as funções de custos das empresas 1 e 2, respectivamente.

# Exemplo: externalidades entre empresas

- Duas empresas tomadoras de preço: empresa 1 e empresa 2.
- A empresa 1 escolhe o seu nível de produção  $y_1$  e o nível de poluição  $x$ . A empresa 2 escolhe seu nível de produção  $y_2$ .
- As funções de lucro são:

$$\pi_1 = p_1 y_1 - c_1(y_1, x) \quad \text{e} \quad \pi_2 = p_2 y_2 - c_2(y_2, x)$$

Nas quais  $p_1$  e  $p_2$  são os preços e  $c_1(y_1, x)$  e  $c_2(y_2, x)$  são os custos e as funções de custos das empresas 1 e 2, respectivamente.

- $\partial c_1 / \partial x < 0$  para níveis baixos de  $x$  e  $\partial c_2 / \partial x > 0$ .

# Exemplo: externalidades entre duas empresas

## Solução sem coordenação: decisão da empresa 1

$$\max_{x, y_1} \pi_1 = p_1 y_1 - c_1(y_1, x_1)$$

As condições de lucro máximo de primeira ordem são:

$$\frac{\partial c_1(y_1^m, x^m)}{\partial y_1} = p_1$$

e

$$\frac{\partial c_1(y_1^m, x^m)}{\partial x} = 0$$

## Exemplo: externalidades entre duas empresas

## Solução ótima

$$\max_{y_1, y_2, x} p_1 y_1 + p_2 y_2 - c_1(y_1, x) - c_2(y_2, x)$$

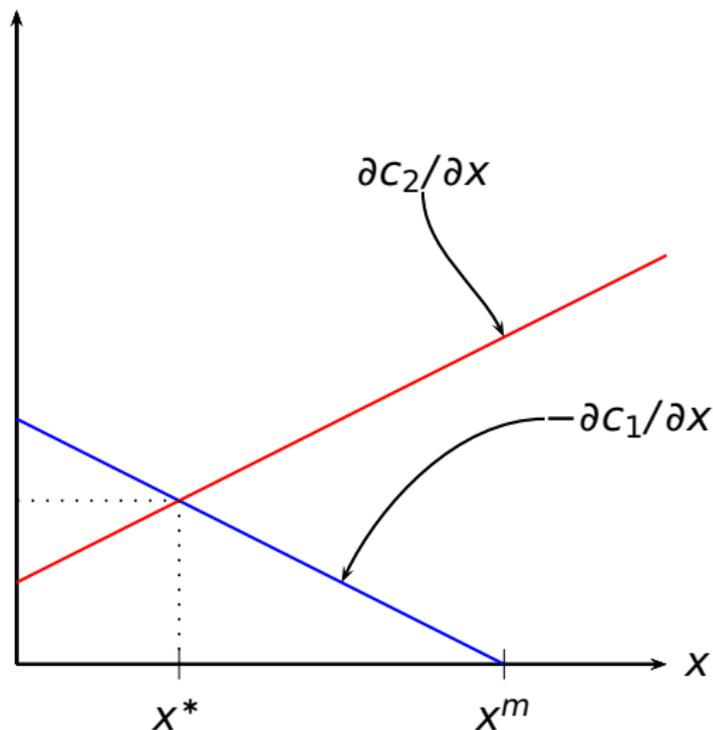
As condições de ganho máximo de primeira ordem são

$$\frac{\partial c_1(y_1^*, x^*)}{\partial y_1} = p_1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial c_2(y_2^*, x^*)}{\partial y_2} = p_2$$

e

$$\frac{\partial c_2(y_2^*, x^*)}{\partial x} = - \frac{\partial c_1(y_1^*, x^*)}{\partial x}$$

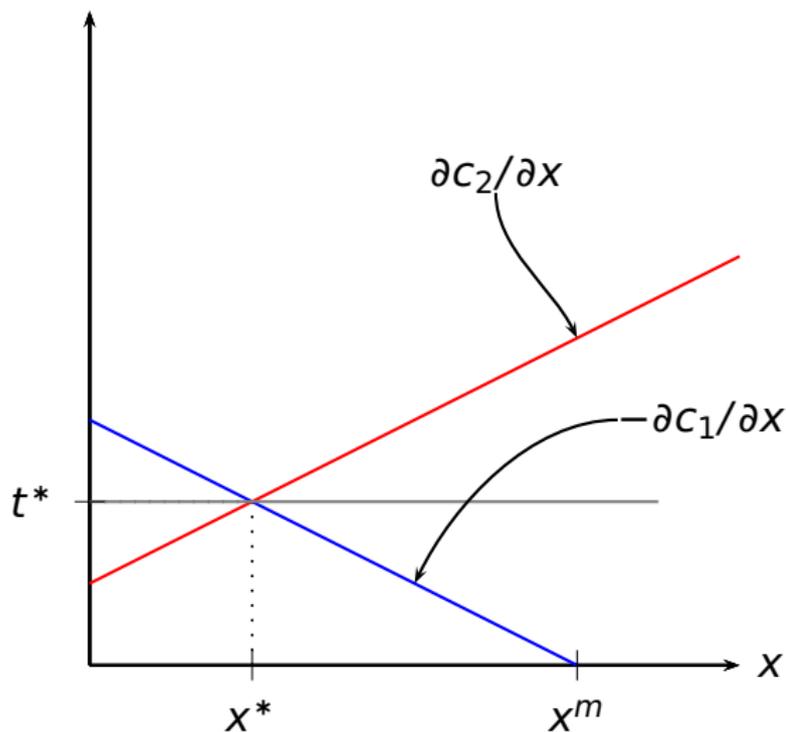
## Exemplo: externalidades entre duas empresas



# Soluções para nosso exemplo

- 1 Quota de poluição no total  $x^*$ .
- 2 Taxa por unidade de poluição emitida no valor de  $t^* = \partial c_2(y_2^*, x^*) / \partial x^*$ . (taxa pigouviana)
- 3 Direitos negociáveis.
- 4 Sinais de mercado.

## Exemplo: soluções para o exemplo



# O “Teorema” de Coase

## Versão 1

Na ausência de custos de transação, a livre negociação entre as partes levará a um nível eficiente de produção de externalidades, independentemente, de como os direitos sobre a mesma são distribuídos.

## Versão 2

O volume ótimo de externalidade gerado independe de como os direitos sobre a produção da mesma são distribuídos entre as partes.

# Sumário

1 Externalidades na produção

**2 Externalidades no consumo**

3 Exercícios

# Externalidades no consumo – exemplo

- Dois consumidores:  $A$  e  $B$ .
- Funções de utilidade  $U_A(x_A, \theta)$  e  $U_B(x_B, \theta)$ .
- $A$  escolhe  $x_A$  e  $\theta$  dada uma restrição orçamentária  $x_A + p\theta \leq m_A$ .  $B$  escolhe  $x_B$  dada a restrição  $x_B \leq m_B$ .



$$\frac{\partial U_A}{\partial \theta} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial U_B}{\partial \theta} \neq 0$$

# Soluções eficientes: o problema

Em qualquer solução eficiente, a utilidade de  $A$  é maximizada dadas as restrições:

- 1  $U_B(x_B, \theta) \geq \hat{U}_B$  (utilidade de  $A$  é máxima, dada a utilidade de  $B$ );
- 2  $x_A + x_B + p\theta \leq m_A + m_B = m$  restrição orçamentária com possíveis transferências.

# Soluções eficientes: condições de ótimo

O lagrangeano desse problema é

$$\mathcal{L} = U_A(x_A, \theta) - \lambda U_B(x_B, \theta) - \mu(x_A + x_B + p\theta - m)$$

# Soluções eficientes: condições de ótimo

O lagrangeano desse problema é

$$\mathcal{L} = U_A(x_A, \theta) - \lambda U_B(x_B, \theta) - \mu(x_A + x_B + p\theta - m)$$

As condições de máximo de primeira ordem são

$$\frac{\partial U_A}{\partial x_A} = \mu = \lambda \frac{\partial U_B}{\partial x_B} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U_A}{\partial \theta} - \lambda \frac{\partial U_B}{\partial \theta} = \mu p,$$

# Soluções eficientes: condições de ótimo

O lagrangeano desse problema é

$$\mathcal{L} = U_A(x_A, \theta) - \lambda U_B(x_B, \theta) - \mu(x_A + x_B + p\theta - m)$$

As condições de máximo de primeira ordem são

$$\frac{\partial U_A}{\partial x_A} = \mu = \lambda \frac{\partial U_B}{\partial x_B} \quad \text{e} \quad \frac{\partial U_A}{\partial \theta} - \lambda \frac{\partial U_B}{\partial \theta} = \mu p \theta,$$

ou

$$\frac{\partial U_A / \partial \theta}{\partial U_A / \partial x_A} + \frac{\partial U_B / \partial \theta}{\partial U_B / \partial x_B} = p$$

Se  $\partial U_b / \partial \theta < 0$ , há externalidades negativas, se  $\partial U_b / \partial \theta > 0$ , há externalidades positivas.

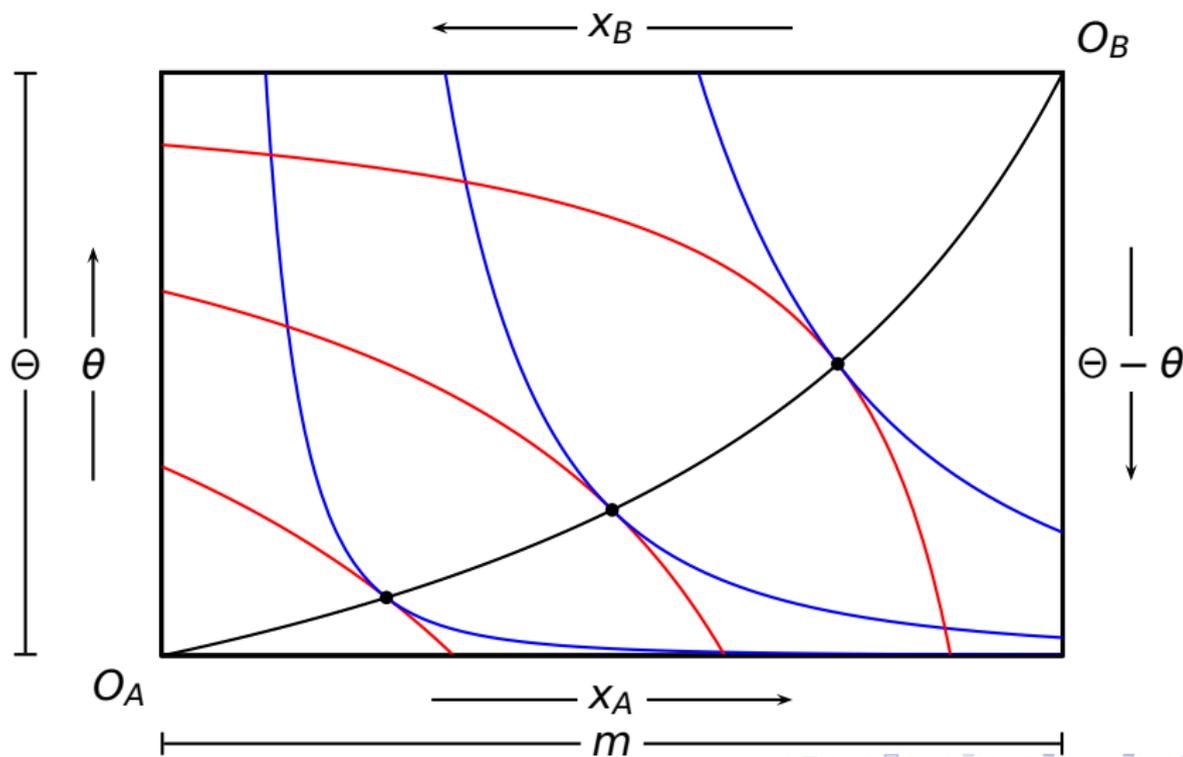
# Solução sem coordenação

$$\frac{\partial U_A / \partial \theta}{\partial U_A / \partial x_A} = p$$

- Se há externalidade positiva, há espaço para melhorar o bem-estar dos dois consumidores aumentando  $\theta$  e fazendo  $B$  pagar por parte desse aumento.
- Se há externalidade negativa, há espaço para aumentar o bem-estar dos dois consumidores reduzindo  $\theta$  e fazendo  $B$  compensar essa redução.

Exemplo:  $p = 0$ ,  $\theta \leq \Theta$  e externalidade negativa

Alocações eficientes



# Nota sobre o teorema de Coase

Conforme podemos ver no slide anterior, o nível ótimo de externalidade não é único. Assim, apenas a primeira versão do teorema de Coase é válida.

# Livre acesso

Considere uma região pesqueira com as seguintes características:

- O total produzido é dado pela função  $y = f(x)$  na qual  $y$  a o total pescado em Kg e  $x$  é o número de pescadores em atividade na região.
- $f'(x) > 0$  para  $x$  suficientemente pequeno e  $f''(x) < 0$ .
- A produção de cada pescador é  $f(x)/x$ .
- O preço do peixe é R\$1/Kg.
- O custo custo de oportunidade de cada pescador mais o custo dos equipamentos por pescador é constante e igual a  $c$ .

# Livre acesso – número ótimo de pescadores

$$\max_x f(x) - cx$$
$$f'(x) = c$$

Trata-se da condição conhecida de igualdade entre o valor do custo marginal e o preço do valor de produção.

# Livre acesso – número de pescadores de equilíbrio

Enquanto

$$\frac{f(x)}{x} > c$$

haverá o incentivo à entrada de novos pescadores. O número de pescadores de equilíbrio  $\hat{x}$  deve ser tal que

$$\frac{f(\hat{x})}{\hat{x}} = c.$$

# Exemplo

- $f(x) = 10x - x^2$
- $c = 2$

# Exemplo

- $f(x) = 10x - x^2$
- $c = 2$

$$f'(x^*) = c \Rightarrow 10 - 2x^* = 2 \Rightarrow x^* = 4.$$

# Exemplo

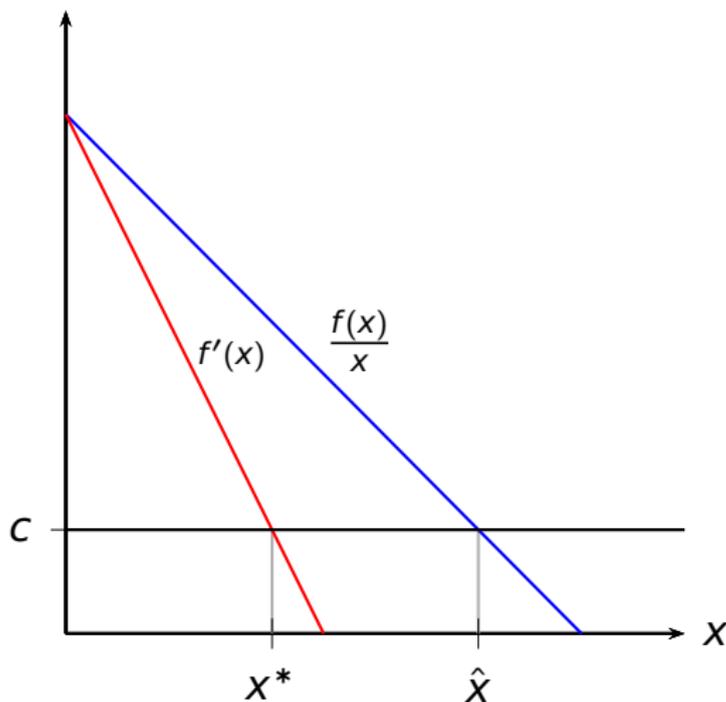
- $f(x) = 10x - x^2$
- $c = 2$

$$f'(x^*) = c \Rightarrow 10 - 2x^* = 2 \Rightarrow x^* = 4.$$

$$\frac{f(\hat{x})}{\hat{x}} = 2 \Rightarrow 10 - \hat{x} = 2 \Rightarrow \hat{x} = 8.$$

## Exemplo – ilustração gráfica

Kg/pescador



# Sumário

1 Externalidades na produção

2 Externalidades no consumo

3 Exercícios

# ANPEC 2012, Questão 14

Considere que um aeroporto está localizado ao lado de um grande terreno que é propriedade de um incorporador imobiliário. O incorporador gostaria de construir moradias naquele terreno, mas o barulho do aeroporto reduz o valor das propriedades. Quanto maior for a intensidade de tráfego aéreo, menos o valor do montante de lucros que o incorporador pode obter com o terreno. Seja  $X$  o número de vôos diários e  $Y$  o número de moradias que o incorporador pretende construir.

# ANPEC 2012, Questão 14

O lucro total do aeroporto ( $LA$ ) é dado pela função  $48X - X^2$  e o lucro total do incorporador ( $LI$ ) é dado por  $60Y - Y^2 - XY$ . Identifique a diferença entre o lucro total dos dois agentes ( $LA + LI$ ) em duas situações relativas às regras institucionais que regulam o comportamento dos agentes: (i) no caso da imposição de uma lei que responsabiliza o aeroporto por qualquer redução ocorrida no valor das propriedades; (ii) no caso em que os dois agentes optam pela formação de um conglomerado empresarial com o objetivo de maximizar o lucro conjunto.

# ANPEC 2012, Questão 14

O lucro total do aeroporto ( $LA$ ) é dado pela função  $48X - X^2$  e o lucro total do incorporador ( $LI$ ) é dado por  $60Y - Y^2 - XY$ . Identifique a diferença entre o lucro total dos dois agentes ( $LA + LI$ ) em duas situações relativas às regras institucionais que regulam o comportamento dos agentes: (i) no caso da imposição de uma lei que responsabiliza o aeroporto por qualquer redução ocorrida no valor das propriedades; (ii) no caso em que os dois agentes optam pela formação de um conglomerado empresarial com o objetivo de maximizar o lucro conjunto.

27

## ANPEC 2004, Questão 15

Uma economia é constituída por dois indivíduos cujas utilidades são

$$u_A(f, m_a) = \frac{4}{3}\sqrt{f} + m_A \quad \text{e} \quad u_B(f, m_b) = \ln(1 - f) + m_b,$$

em que  $f$  representa a poluição gerada pelo consumo de cigarro por parte do indivíduo  $A$  (medido numa escala entre 0 e 1) e  $m_i$  representa o gasto do indivíduo  $i$  com a aquisição de outros bens ( $i = A, B$ ). Suponha que o indivíduo  $B$  tenha direito a todo ar puro, mas que possa vender, ao preço unitário  $p$  o direito de poluir parte do ar ao indivíduo  $A$ . Se no equilíbrio o indivíduo  $A$  paga  $G$  unidades monetárias ao indivíduo  $B$  para poluir parte do ar, achar  $36G$ .

## ANPEC 2004, Questão 15

Uma economia é constituída por dois indivíduos cujas utilidades são

$$u_A(f, m_a) = \frac{4}{3}\sqrt{f} + m_A \quad \text{e} \quad u_B(f, m_b) = \ln(1 - f) + m_b,$$

em que  $f$  representa a poluição gerada pelo consumo de cigarro por parte do indivíduo  $A$  (medido numa escala entre 0 e 1) e  $m_i$  representa o gasto do indivíduo  $i$  com a aquisição de outros bens ( $i = A, B$ ). Suponha que o indivíduo  $B$  tenha direito a todo ar puro, mas que possa vender, ao preço unitário  $p$  o direito de poluir parte do ar ao indivíduo  $A$ . Se no equilíbrio o indivíduo  $A$  paga  $G$  unidades monetárias ao indivíduo  $B$  para poluir parte do ar, achar  $36G$ .

**R:**  $36G = 12$

# ANPEC 2009, Questão 13

Considere uma lagoa em que é possível pescar. Suponha que o preço do peixe é 1 e que  $f(n)$  é a quantidade total de peixes pescados, em que  $n$  é o número de barcos de pesca na lagoa. Suponha que a função  $f(n)$  está sujeita a rendimentos decrescentes. Suponha também que, para pescar, é necessário apenas adquirir um barco e equipamento que possuem custo constante igual a  $c > 0$ . Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

- Se a lagoa for um recurso comum, ou seja, se qualquer um puder entrar e pescar, então haverá  $n^*$  barcos, de tal sorte que  $f(n^*)/n^* = c$ , ou seja, cada pescador obterá uma receita de pesca igual ao custo.

# ANPEC 2009, Questão 13

Considere uma lagoa em que é possível pescar. Suponha que o preço do peixe é 1 e que  $f(n)$  é a quantidade total de peixes pescados, em que  $n$  é o número de barcos de pesca na lagoa. Suponha que a função  $f(n)$  está sujeita a rendimentos decrescentes. Suponha também que, para pescar, é necessário apenas adquirir um barco e equipamento que possuem custo constante igual a  $c > 0$ . Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

- Se a lagoa for um recurso comum, ou seja, se qualquer um puder entrar e pescar, então haverá  $n^*$  barcos, de tal sorte que  $f(n^*)/n^* = c$ , ou seja, cada pescador obterá uma receita de pesca igual ao custo. V

## ANPEC 2009, Questão 13

Considere uma lagoa em que é possível pescar. Suponha que o preço do peixe é 1 e que  $f(n)$  é a quantidade total de peixes pescados, em que  $n$  é o número de barcos de pesca na lagoa. Suponha que a função  $f(n)$  está sujeita a rendimentos decrescentes. Suponha também que, para pescar, é necessário apenas adquirir um barco e equipamento que possuem custo constante igual a  $c > 0$ . Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

- 0 Se a lagoa for um recurso comum, ou seja, se qualquer um puder entrar e pescar, então haverá  $n^*$  barcos, de tal sorte que  $f(n^*)/n^* = c$ , ou seja, cada pescador obterá uma receita de pesca igual ao custo. V
- 1 Se a lagoa for propriedade privada, seu proprietário utilizará  $n^{**}$  barcos de pesca, de tal modo que  $f'(n^{**}) = c$ , em que  $f'$  é a derivada de  $f$ .

## ANPEC 2009, Questão 13

Considere uma lagoa em que é possível pescar. Suponha que o preço do peixe é 1 e que  $f(n)$  é a quantidade total de peixes pescados, em que  $n$  é o número de barcos de pesca na lagoa. Suponha que a função  $f(n)$  está sujeita a rendimentos decrescentes. Suponha também que, para pescar, é necessário apenas adquirir um barco e equipamento que possuem custo constante igual a  $c > 0$ . Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

- 0 Se a lagoa for um recurso comum, ou seja, se qualquer um puder entrar e pescar, então haverá  $n^*$  barcos, de tal sorte que  $f(n^*)/n^* = c$ , ou seja, cada pescador obterá uma receita de pesca igual ao custo. V
- 1 Se a lagoa for propriedade privada, seu proprietário utilizará  $n^{**}$  barcos de pesca, de tal modo que  $f'(n^{**}) = c$ , em que  $f'$  é a derivada de  $f$ . V

## ANPEC 2009, Questão 13

Considere uma lagoa em que é possível pescar. Suponha que o preço do peixe é 1 e que  $f(n)$  é a quantidade total de peixes pescados, em que  $n$  é o número de barcos de pesca na lagoa. Suponha que a função  $f(n)$  está sujeita a rendimentos decrescentes. Suponha também que, para pescar, é necessário apenas adquirir um barco e equipamento que possuem custo constante igual a  $c > 0$ . Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

- 0 Se a lagoa for um recurso comum, ou seja, se qualquer um puder entrar e pescar, então haverá  $n^*$  barcos, de tal sorte que  $f(n^*)/n^* = c$ , ou seja, cada pescador obterá uma receita de pesca igual ao custo. V
- 1 Se a lagoa for propriedade privada, seu proprietário utilizará  $n^{**}$  barcos de pesca, de tal modo que  $f'(n^{**}) = c$ , em que  $f'$  é a derivada de  $f$ . V

# ANPEC 2009, Questão 13

## Continuação

Considere uma lagoa em que é possível pescar. Suponha que o preço do peixe é 1 e que  $f(n)$  é a quantidade total de peixes pescados, em que  $n$  é o número de barcos de pesca na lagoa. Suponha que a função  $f(n)$  está sujeita a rendimentos decrescentes. Suponha também que, para pescar, é necessário apenas adquirir um barco e equipamento que possuem custo constante igual a  $c > 0$ . Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

- 2 Trata-se de uma situação em que cada barco gera externalidades negativas para os demais.

# ANPEC 2009, Questão 13

## Continuação

Considere uma lagoa em que é possível pescar. Suponha que o preço do peixe é 1 e que  $f(n)$  é a quantidade total de peixes pescados, em que  $n$  é o número de barcos de pesca na lagoa. Suponha que a função  $f(n)$  está sujeita a rendimentos decrescentes. Suponha também que, para pescar, é necessário apenas adquirir um barco e equipamento que possuem custo constante igual a  $c > 0$ . Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

- 2 Trata-se de uma situação em que cada barco gera externalidades negativas para os demais.

V

# ANPEC 2009, Questão 13

## Continuação

Considere uma lagoa em que é possível pescar. Suponha que o preço do peixe é 1 e que  $f(n)$  é a quantidade total de peixes pescados, em que  $n$  é o número de barcos de pesca na lagoa. Suponha que a função  $f(n)$  está sujeita a rendimentos decrescentes. Suponha também que, para pescar, é necessário apenas adquirir um barco e equipamento que possuem custo constante igual a  $c > 0$ . Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

- 2 Trata-se de uma situação em que cada barco gera externalidades negativas para os demais. V
- 3 Se a lagoa for um recurso comum, a criação de um direito de propriedade privada sobre ela levará a uma produção eficiente de peixes.

# ANPEC 2009, Questão 13

## Continuação

Considere uma lagoa em que é possível pescar. Suponha que o preço do peixe é 1 e que  $f(n)$  é a quantidade total de peixes pescados, em que  $n$  é o número de barcos de pesca na lagoa. Suponha que a função  $f(n)$  está sujeita a rendimentos decrescentes. Suponha também que, para pescar, é necessário apenas adquirir um barco e equipamento que possuem custo constante igual a  $c > 0$ . Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

- 2 Trata-se de uma situação em que cada barco gera externalidades negativas para os demais. V
- 3 Se a lagoa for um recurso comum, a criação de um direito de propriedade privada sobre ela levará a uma produção eficiente de peixes. V

# ANPEC 2009, Questão 13

## Continuação

Considere uma lagoa em que é possível pescar. Suponha que o preço do peixe é 1 e que  $f(n)$  é a quantidade total de peixes pescados, em que  $n$  é o número de barcos de pesca na lagoa. Suponha que a função  $f(n)$  está sujeita a rendimentos decrescentes. Suponha também que, para pescar, é necessário apenas adquirir um barco e equipamento que possuem custo constante igual a  $c > 0$ . Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

- 2 Trata-se de uma situação em que cada barco gera externalidades negativas para os demais. V
- 3 Se a lagoa for um recurso comum, a criação de um direito de propriedade privada sobre ela levará a uma produção eficiente de peixes. V
- 4 O caráter de recurso comum gera uma pesca excessiva de peixes do ponto de vista social.

# ANPEC 2009, Questão 13

## Continuação

Considere uma lagoa em que é possível pescar. Suponha que o preço do peixe é 1 e que  $f(n)$  é a quantidade total de peixes pescados, em que  $n$  é o número de barcos de pesca na lagoa. Suponha que a função  $f(n)$  está sujeita a rendimentos decrescentes. Suponha também que, para pescar, é necessário apenas adquirir um barco e equipamento que possuem custo constante igual a  $c > 0$ . Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

- 2 Trata-se de uma situação em que cada barco gera externalidades negativas para os demais. V
- 3 Se a lagoa for um recurso comum, a criação de um direito de propriedade privada sobre ela levará a uma produção eficiente de peixes. V
- 4 O caráter de recurso comum gera uma pesca excessiva de peixes do ponto de vista social. V

# ANPEC 2010, Questão 12

Suponha que foi descoberto ouro em uma região do interior do Brasil e que o preço do grama de ouro é \$1. A quantidade produzida de ouro em gramas ( $Q$ ) pode ser expressa como função do número de garimpeiros ( $n$ ), de acordo com a função  $Q = 40n - 2n^2$ , e o custo do material individual para garimpagem é \$12. Na região em que se descobriu ouro foi concedido livre acesso. Para efeito de cálculo, suponha que a variável  $n$  é contínua. Determine a diferença entre o número efetivo de garimpeiros e o número ótimo.

# ANPEC 2010, Questão 12

Suponha que foi descoberto ouro em uma região do interior do Brasil e que o preço do grama de ouro é \$1. A quantidade produzida de ouro em gramas ( $Q$ ) pode ser expressa como função do número de garimpeiros ( $n$ ), de acordo com a função  $Q = 40n - 2n^2$ , e o custo do material individual para garimpagem é \$12. Na região em que se descobriu ouro foi concedido livre acesso. Para efeito de cálculo, suponha que a variável  $n$  é contínua. Determine a diferença entre o número efetivo de garimpeiros e o número ótimo.

**R:** 07.

# Parte II

## Bens Públicos

# Dois critérios para classificação de bens

**Rivalidade:** quando o consumo de determinado bem por parte de um consumidor reduz a quantidade disponível desse bem para os outros consumidores, dizemos que há rivalidade no consumo desse bem.

# Dois critérios para classificação de bens

**Rivalidade:** quando o consumo de determinado bem por parte de um consumidor reduz a quantidade disponível desse bem para os outros consumidores, dizemos que há rivalidade no consumo desse bem.

**Custo de exclusão:** Custo necessário para excluir acesso ao bem por parte de quem não o possui.

# Uma classificação dos bens

- Alta rivalidade e baixo custo de exclusão: Bens privados.
- Alta rivalidade e elevado custo de exclusão: Bens comuns.
- Baixa rivalidade e baixo custo de exclusão: Bens clube.
- Baixa rivalidade e alto custo de exclusão: Bens públicos puros.

# Prover ou não prover

Bem público:  $G = 0$  indica bem público não provido,  $P = 1$  indica provisão do bem público.

# Prover ou não prover

**Bem público:**  $G = 0$  indica bem público não provido,  $P = 1$  indica provisão do bem público.

**Bem privado:**  $x_i$  indica quantidade consumida do bem privado por parte do indivíduo  $i$ .

# Prover ou não prover

**Bem público:**  $G = 0$  indica bem público não provido,  $P = 1$  indica provisão do bem público.

**Bem privado:**  $x_i$  indica quantidade consumida do bem privado por parte do indivíduo  $i$ .

**Funções de utilidade:**  $U_i(x_i, G)$ .

# Prover ou não prover

**Bem público:**  $G = 0$  indica bem público não provido,  $P = 1$  indica provisão do bem público.

**Bem privado:**  $x_i$  indica quantidade consumida do bem privado por parte do indivíduo  $i$ .

**Funções de utilidade:**  $U_i(x_i, G)$ .

**Condições iniciais:** cada indivíduo possui uma renda  $m_i$ . O custo de provisão do bem público é  $c$ .

# Prover ou não prover

**Bem público:**  $G = 0$  indica bem público não provido,  $P = 1$  indica provisão do bem público.

**Bem privado:**  $x_i$  indica quantidade consumida do bem privado por parte do indivíduo  $i$ .

**Funções de utilidade:**  $U_i(x_i, G)$ .

**Condições iniciais:** cada indivíduo possui uma renda  $m_i$ . O custo de provisão do bem público é  $c$ .

**Preço de reserva:**  $U_i(m_i - R_i, 1) = U_i(m_i, 0)$ .

# Prover ou não prover

**Bem público:**  $G = 0$  indica bem público não provido,  $P = 1$  indica provisão do bem público.

**Bem privado:**  $x_i$  indica quantidade consumida do bem privado por parte do indivíduo  $i$ .

**Funções de utilidade:**  $U_i(x_i, G)$ .

**Condições iniciais:** cada indivíduo possui uma renda  $m_i$ . O custo de provisão do bem público é  $c$ .

**Preço de reserva:**  $U_i(m_i - R_i, 1) = U_i(m_i, 0)$ .

**Provisão eficiente:** O bem público deve ser provido caso 
$$\sum_{i=1}^n R_i \geq c.$$

# Prover ou não prover

**Bem público:**  $G = 0$  indica bem público não provido,  $P = 1$  indica provisão do bem público.

**Bem privado:**  $x_i$  indica quantidade consumida do bem privado por parte do indivíduo  $i$ .

**Funções de utilidade:**  $U_i(x_i, G)$ .

**Condições iniciais:** cada indivíduo possui uma renda  $m_i$ . O custo de provisão do bem público é  $c$ .

**Preço de reserva:**  $U_i(m_i - R_i, 1) = U_i(m_i, 0)$ .

**Provisão eficiente:** O bem público deve ser provido caso 
$$\sum_{i=1}^n R_i \geq c.$$

**Provisão sem coordenação:** O bem público será provido caso 
$$\max_i R_i \geq c.$$

# Quanto prover

Bem público:  $G \in \mathbb{R}^+$  indica a quantidade provida do bem público.

# Quanto prover

**Bem público:**  $G \in \mathbb{R}^+$  indica a quantidade provida do bem público.

**Bem privado:**  $x_i$  indica quantidade consumida do bem privado por parte do indivíduo  $i$ .

# Quanto prover

**Bem público:**  $G \in \mathbb{R}^+$  indica a quantidade provida do bem público.

**Bem privado:**  $x_i$  indica quantidade consumida do bem privado por parte do indivíduo  $i$ .

**Funções de utilidade:**  $U_i(x_i, G)$ .

# Quanto prover

**Bem público:**  $G \in \mathbb{R}^+$  indica a quantidade provida do bem público.

**Bem privado:**  $x_i$  indica quantidade consumida do bem privado por parte do indivíduo  $i$ .

**Funções de utilidade:**  $U_i(x_i, G)$ .

**Condições iniciais:** cada indivíduo possui uma renda  $m_i$ . O custo de provisão do bem público é  $C(G)$ .

# Quanto prover

**Bem público:**  $G \in \mathbb{R}^+$  indica a quantidade provida do bem público.

**Bem privado:**  $x_i$  indica quantidade consumida do bem privado por parte do indivíduo  $i$ .

**Funções de utilidade:**  $U_i(x_i, G)$ .

**Condições iniciais:** cada indivíduo possui uma renda  $m_i$ . O custo de provisão do bem público é  $C(G)$ .

**Disposição marginal a pagar:**  $TMS_i(G, x_i) = UMg_{Gi}/UMg_{xi}$  em que  $UMg_{Gi}$  e  $UMg_{xi}$  são as utilidades marginais para o consumidor  $i$  do bem público e do bem privado, respectivamente.

# Quanto prover

**Bem público:**  $G \in \mathbb{R}^+$  indica a quantidade provida do bem público.

**Bem privado:**  $x_i$  indica quantidade consumida do bem privado por parte do indivíduo  $i$ .

**Funções de utilidade:**  $U_i(x_i, G)$ .

**Condições iniciais:** cada indivíduo possui uma renda  $m_i$ . O custo de provisão do bem público é  $C(G)$ .

**Disposição marginal a pagar:**  $TMS_i(G, x_i) = UM_{G_{Gi}}/UM_{G_{xi}}$  em que  $UM_{G_{Gi}}$  e  $UM_{G_{xi}}$  são as utilidades marginais para o consumidor  $i$  do bem público e do bem privado, respectivamente.

**Provisão eficiente:** O bem público deve ser provido até que  $\sum_{i=1}^n TMS_i(G, x_i) = C'(G)$ .

# Quanto prover

**Bem público:**  $G \in \mathbb{R}^+$  indica a quantidade provida do bem público.

**Bem privado:**  $x_i$  indica quantidade consumida do bem privado por parte do indivíduo  $i$ .

**Funções de utilidade:**  $U_i(x_i, G)$ .

**Condições iniciais:** cada indivíduo possui uma renda  $m_i$ . O custo de provisão do bem público é  $C(G)$ .

**Disposição marginal a pagar:**  $TMS_i(G, x_i) = UM_{G_{Gi}}/UM_{G_{xi}}$  em que  $UM_{G_{Gi}}$  e  $UM_{G_{xi}}$  são as utilidades marginais para o consumidor  $i$  do bem público e do bem privado, respectivamente.

**Provisão eficiente:** O bem público deve ser provido até que  $\sum_{i=1}^n TMS_i(G, x_i) = C'(G)$ .

**Provisão sem coordenação:**  $TMS_i \leq C'(G)$  para  $i = 1, \dots, n$  e  $\max TMS_i = C'(G)$ .

# Mecanismo de Groves-Clark – o problema

- Há  $n$  indivíduos. Em uma sociedade na qual um bem público pode ou não ser provido.
- Um planejador central quer prover o bem público caso isso seja eficiente. Porém, ele não conhece as preferências dos indivíduos.
- O planejador determina que, caso o bem público seja provido, seu custo será distribuídos entre os indivíduos, cabendo ao indivíduo  $i$  a parcela  $c_i$  desse custo ( $i = 1, \dots, n$ ).
- Os indivíduos não tem incentivo correto para declarar sua verdadeira disposição a pagar pelo bem público quando consultados pelo planejador central.

# Mecanismo de Groves-Clark – a taxa de Groves-Clark

$R_i$  Disposição a pagar do indivíduo  $i$ .

# Mecanismo de Groves-Clark – a taxa de Groves-Clark

$R_i$  Disposição a pagar do indivíduo  $i$ .

$r_i$  Disposição a pagar declarada pelo indivíduo  $i$ .

# Mecanismo de Groves-Clark – a taxa de Groves-Clark

- $R_i$  Disposição a pagar do indivíduo  $i$ .
- $r_i$  Disposição a pagar declarada pelo indivíduo  $i$ .
- $G$  Assume valor 1 caso  $\sum_{i=1}^n (r_i - c_i) \geq 0$  e zero caso contrário. Se todos indivíduos declararem  $r_i = R_i$ ,  $G$  determina a provisão ótima do bem público.

# Mecanismo de Groves-Clark – a taxa de Groves-Clark

- $R_i$  Disposição a pagar do indivíduo  $i$ .
- $r_i$  Disposição a pagar declarada pelo indivíduo  $i$ .
- $G$  Assume valor 1 caso  $\sum_{i=1}^n (r_i - c_i) \geq 0$  e zero caso contrário. Se todos indivíduos declararem  $r_i = R_i$ ,  $G$  determina a provisão ótima do bem público.
- $G_j$  Assume valor 1 caso  $\sum_{i \neq j} r_i \geq 0$  e zero caso contrário. Indica a decisão que seria tomada caso o impacto de bem estar sobre o indivíduo  $j$  não fosse considerado.

# Mecanismo de Groves-Clark – a taxa de Groves-Clark

- $R_i$  Disposição a pagar do indivíduo  $i$ .
- $r_i$  Disposição a pagar declarada pelo indivíduo  $i$ .
- $G$  Assume valor 1 caso  $\sum_{i=1}^n (r_i - c_i) \geq 0$  e zero caso contrário. Se todos indivíduos declararem  $r_i = R_i$ ,  $G$  determina a provisão ótima do bem público.
- $G_j$  Assume valor 1 caso  $\sum_{i \neq j} r_i \geq 0$  e zero caso contrário. Indica a decisão que seria tomada caso o impacto de bem estar sobre o indivíduo  $j$  não fosse considerado.

**Taxa de GC** Cada indivíduo  $j$  deverá pagar a taxa

$$T_j = (G_j - G) \sum_{i \neq j} (r_i - c_i).$$

# O Mecanismo de Groves-Clark – observações

- Com a taxa de Groves-Clark, declarar a verdadeira disposição a pagar é estratégia fracamente dominante para todos os indivíduos.

# O Mecanismo de Groves-Clark – observações

- Com a taxa de Groves-Clark, declarar a verdadeira disposição a pagar é estratégia fracamente dominante para todos os indivíduos.
- A taxa é sempre não negativa e apenas os indivíduos para os quais  $G \neq G_j$ , ou seja, apenas aqueles indivíduos que, quando desconsiderados, alteram a escolha do planejador, pagam taxa positiva.

# O Mecanismo de Groves-Clark – observações

- Com a taxa de Groves-Clark, declarar a verdadeira disposição a pagar é estratégia fracamente dominante para todos os indivíduos.
- A taxa é sempre não negativa e apenas os indivíduos para os quais  $G \neq G_j$ , ou seja, apenas aqueles indivíduos que, quando desconsiderados, alteram a escolha do planejador, pagam taxa positiva.
- Caso alguém tenha que pagar a taxa, esse valor deverá ser destruído, o que implica um custo de eficiência associado a esse mecanismo.

# O Mecanismo de Groves-Clark – observações

- Com a taxa de Groves-Clark, declarar a verdadeira disposição a pagar é estratégia fracamente dominante para todos os indivíduos.
- A taxa é sempre não negativa e apenas os indivíduos para os quais  $G \neq G_j$ , ou seja, apenas aqueles indivíduos que, quando desconsiderados, alteram a escolha do planejador, pagam taxa positiva.
- Caso alguém tenha que pagar a taxa, esse valor deverá ser destruído, o que implica um custo de eficiência associado a esse mecanismo.
- É possível contruir um mecanismo similar para o caso de um bem público provido em quantidades contínuas. Porém, esse mecanismo só funcionará caso as preferências individuais forem quase-lineares.

## ANPEC 2010, Questão 14

Três estudantes de mestrado em economia (ditos  $A$ ,  $B$  e  $C$ ), que dividem quarto em uma república perto da escola, precisam decidir se adquirem ou não uma TV que custa \$300, para que possam relaxar assistindo a um filme todo domingo à noite, único horário em que não estão estudando. Eles concordam antecipadamente que, se decidirem adquirir a TV, então cada um irá contribuir com \$100. Os preços de reserva dos estudantes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são, respectivamente,  $v_A = 60$ ,  $v_B = 60$  e  $v_C = 240$ . Como os preços de reserva são informação privada, eles concordam em usar o mecanismo de Groves-Clarke de revelação da demanda. Para tanto, denote por  $H_A$ ,  $H_B$  e  $H_C$  os impostos de Groves-Clarke dos estudantes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Calcule  $H_A + H_B + H_C$ .

## ANPEC 2010, Questão 14

Três estudantes de mestrado em economia (ditos  $A$ ,  $B$  e  $C$ ), que dividem quarto em uma república perto da escola, precisam decidir se adquirem ou não uma TV que custa \$300, para que possam relaxar assistindo a um filme todo domingo à noite, único horário em que não estão estudando. Eles concordam antecipadamente que, se decidirem adquirir a TV, então cada um irá contribuir com \$100. Os preços de reserva dos estudantes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são, respectivamente,  $v_A = 60$ ,  $v_B = 60$  e  $v_C = 240$ . Como os preços de reserva são informação privada, eles concordam em usar o mecanismo de Groves-Clarke de revelação da demanda. Para tanto, denote por  $H_A$ ,  $H_B$  e  $H_C$  os impostos de Groves-Clarke dos estudantes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Calcule  $H_A + H_B + H_C$ .

80

# ANPEC 2011, Questão 12

Considere uma comunidade com  $n$  indivíduos, com uma dotação inicial de bens de  $w_i$ , e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens,  $x_i$ , e do volume de um bem público  $G$  que é igual à soma dos valores de contribuição de cada um dos indivíduos,  $G = \sum_{i=1}^n g_i$ . A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por  $u_i = x_i + a_i \ln G$ , em que  $a_i > 1$ . Suponha que, na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os outros não alterarão sua contribuição em resposta.

- 0 Neste caso, metade dos indivíduos maximizando sua utilidade contribuirá igualmente  $2G/n$ .

## ANPEC 2011, Questão 12

Considere uma comunidade com  $n$  indivíduos, com uma dotação inicial de bens de  $w_i$ , e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens,  $x_i$ , e do volume de um bem público  $G$  que é igual à soma dos valores de contribuição de cada um dos indivíduos,  $G = \sum_{i=1}^n g_i$ . A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por  $u_i = x_i + a_i \ln G$ , em que  $a_i > 1$ . Suponha que, na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os outros não alterarão sua contribuição em resposta.

- 0 Neste caso, metade dos indivíduos maximizando sua utilidade contribuirá igualmente  $2G/n$ .

F

## ANPEC 2011, Questão 12

Considere uma comunidade com  $n$  indivíduos, com uma dotação inicial de bens de  $w_i$ , e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens,  $x_i$ , e do volume de um bem público  $G$  que é igual à soma dos valores de contribuição de cada um dos indivíduos,  $G = \sum_{i=1}^n g_i$ . A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por  $u_i = x_i + a_i \ln G$ , em que  $a_i > 1$ . Suponha que, na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os outros não alterarão sua contribuição em resposta.

- 0 Neste caso, metade dos indivíduos maximizando sua utilidade contribuirá igualmente  $2G/n$ .
- 1 Apenas metade dos indivíduos caroneará (free ride) no dispêndio dos outros.

F

## ANPEC 2011, Questão 12

Considere uma comunidade com  $n$  indivíduos, com uma dotação inicial de bens de  $w_i$ , e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens,  $x_i$ , e do volume de um bem público  $G$  que é igual à soma dos valores de contribuição de cada um dos indivíduos,  $G = \sum_{i=1}^n g_i$ . A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por  $u_i = x_i + a_i \ln G$ , em que  $a_i > 1$ . Suponha que, na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os outros não alterarão sua contribuição em resposta.

- 0 Neste caso, metade dos indivíduos maximizando sua utilidade contribuirá igualmente  $2G/n$ . F
- 1 Apenas metade dos indivíduos caroneará (free ride) no dispêndio dos outros. F

## ANPEC 2011, Questão 12

Considere uma comunidade com  $n$  indivíduos, com uma dotação inicial de bens de  $w_i$ , e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens,  $x_i$ , e do volume de um bem público  $G$  que é igual à soma dos valores de contribuição de cada um dos indivíduos,  $G = \sum_{i=1}^n g_i$ . A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por  $u_i = x_i + a_i \ln G$ , em que  $a_i > 1$ . Suponha que, na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os outros não alterarão sua contribuição em resposta.

- 0 Neste caso, metade dos indivíduos maximizando sua utilidade contribuirá igualmente  $2G/n$ . F
- 1 Apenas metade dos indivíduos caroneará (free ride) no dispêndio dos outros. F
- 2 A solução Pareto Ótima envolve apenas o indivíduo com maior  $a_i$  contribuindo.

## ANPEC 2011, Questão 12

Considere uma comunidade com  $n$  indivíduos, com uma dotação inicial de bens de  $w_i$ , e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens,  $x_i$ , e do volume de um bem público  $G$  que é igual à soma dos valores de contribuição de cada um dos indivíduos,  $G = \sum_{i=1}^n g_i$ . A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por  $u_i = x_i + a_i \ln G$ , em que  $a_i > 1$ . Suponha que, na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os outros não alterarão sua contribuição em resposta.

- 0 Neste caso, metade dos indivíduos maximizando sua utilidade contribuirá igualmente  $2G/n$ . F
- 1 Apenas metade dos indivíduos caroneará (free ride) no dispêndio dos outros. F
- 2 A solução Pareto Ótima envolve apenas o indivíduo com maior  $a_i$  contribuindo. F

# ANPEC 2011, Questão 12

Considere uma comunidade com  $n$  indivíduos, com uma dotação inicial de bens de  $w_i$ , e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens,  $x_i$ , e do volume de um bem público  $G$  que é igual à soma dos valores de contribuição de cada um dos indivíduos,  $G = \sum_{i=1}^n g_i$ . A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por  $u_i = x_i + a_i \ln G$ , em que  $a_i > 1$ . Suponha que, na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os outros não alterarão sua contribuição em resposta.

- 3 A solução Pareto Ótima coincide com a solução descentralizada.

## ANPEC 2011, Questão 12

Considere uma comunidade com  $n$  indivíduos, com uma dotação inicial de bens de  $w_i$ , e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens,  $x_i$ , e do volume de um bem público  $G$  que é igual à soma dos valores de contribuição de cada um dos indivíduos,  $G = \sum_{i=1}^n g_i$ . A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por  $u_i = x_i + a_i \ln G$ , em que  $a_i > 1$ . Suponha que, na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os outros não alterarão sua contribuição em resposta.

- 3 A solução Pareto Ótima coincide com a solução descentralizada.

F

## ANPEC 2011, Questão 12

Considere uma comunidade com  $n$  indivíduos, com uma dotação inicial de bens de  $w_i$ , e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens,  $x_i$ , e do volume de um bem público  $G$  que é igual à soma dos valores de contribuição de cada um dos indivíduos,  $G = \sum_{i=1}^n g_i$ . A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por  $u_i = x_i + a_i \ln G$ , em que  $a_i > 1$ . Suponha que, na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os outros não alterarão sua contribuição em resposta.

- 3 A solução Pareto Ótima coincide com a solução descentralizada. F
- 4 O indivíduo com maior  $a_i$  colabora com metade do valor do bem público.

## ANPEC 2011, Questão 12

Considere uma comunidade com  $n$  indivíduos, com uma dotação inicial de bens de  $w_i$ , e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens,  $x_i$ , e do volume de um bem público  $G$  que é igual à soma dos valores de contribuição de cada um dos indivíduos,  $G = \sum_{i=1}^n g_i$ . A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por  $u_i = x_i + a_i \ln G$ , em que  $a_i > 1$ . Suponha que, na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os outros não alterarão sua contribuição em resposta.

- 3 A solução Pareto Ótima coincide com a solução descentralizada. F
- 4 O indivíduo com maior  $a_i$  colabora com metade do valor do bem público. F