Teoria dos Jogos

Roberto Guena de Oliveira

USP

13 de julho de 2010

Sumário

1 Introdução

Sumário

1. Introdução
2. Jogos na forma extensiva

Sumário

1. Introdução
2. Jogos na forma extensiva
3. Jogos na forma estratégica

Sumário

1. Introdução
2. Jogos na forma extensiva
3. Jogos na forma estratégica
4. Equilíbrio de Nash e jogos sequenciais

Sumário

1. Introdução
2. Jogos na forma extensiva
3. Jogos na forma estratégica
4. Equilíbrio de Nash e jogos sequenciais
5. Jogos com repetição

Sumário

1. Introdução
2. Jogos na forma extensiva
3. Jogos na forma estratégica
4. Equilíbrio de Nash e jogos sequenciais
5. Jogos com repetição
6. Estratégias mistas

Sumário

1. Introdução
2. Jogos na forma extensiva
3. Jogos na forma estratégica
4. Equilíbrio de Nash e jogos sequenciais
5. Jogos com repetição
6. Estratégias mistas
7. Exercícios

Sumário

1. **Introdução**
2. Jogos na forma extensiva
3. Jogos na forma estratégica
4. Equilíbrio de Nash e jogos sequenciais
5. Jogos com repetição
6. Estratégias mistas
7. Exercícios

Os elementos de um jogo

Jogadores Quais são os agentes envolvidos em um jogo? Em que número? Como serão denominados?

Os elementos de um jogo

Jogadores Quais são os agentes envolvidos em um jogo? Em que número? Como serão denominados?

Regras do jogo Quais são os movimentos que cada jogador pode realizar e quando?

Os elementos de um jogo

Jogadores Quais são os agentes envolvidos em um jogo? Em que número? Como serão denominados?

Regras do jogo Quais são os movimentos que cada jogador pode realizar e quando?

Payoffs Quais são as preferências de cada jogador em relação a cada possível resultado do jogo?

Sumário

1 Introdução

2 Jogos na forma extensiva
- Representação de um jogo na forma extensiva
- Indução retroativa
- Casos mal comportados
- Aplicações
- O conjunto de informação
- Estratégia
- Representação de um jogo na forma estratégica

3 Jogos na forma estratégica

4 Equilíbrio de Nash e jogos sequenciais

Exemplo: Um disputa entre Embraer e Bombardier

Suponha que a Bombardier tenha iniciado um projeto de desenvolvimento de uma aeronave para uma categoria específica de vôos regionais. A Embraer deve decidir se desenvolve ou não aeronave equivalente e entra para competir com a Bombardier nesse nicho. Se a Embraer decide entrar, a Bombardier deve decidir se inicia uma guerra de preços ou se devide pacificamente o mercado com a Embraer.

Exemplo: Um disputa entre Embraer e Bombardier

Suponha que a Bombardier tenha iniciado um projeto de desenvolvimento de uma aeronave para uma categoria específica de vôos regionais. A Embraer deve decidir se desenvolve ou não aeronave equivalente e entra para competir com a Bombardier nesse nicho. Se a Embraer decide entrar, a Bombardier deve decidir se inicia uma guerra de preços ou se devide pacificamente o mercado com a Embraer.Se a Embraer não entrar, os lucros da Bombardier com a nova aeronave serão de $1 bilhão.

Exemplo: Um disputa entre Embraer e Bombardier

Suponha que a Bombardier tenha iniciado um projeto de desenvolvimento de uma aeronave para uma categoria específica de vôos regionais. A Embraer deve decidir se desenvolve ou não aeronave equivalente e entra para competir com a Bombardier nesse nicho. Se a Embraer decide entrar, a Bombardier deve decidir se inicia uma guerra de preços ou se devide pacificamente o mercado com a Embraer.Se a Embraer não entrar, os lucros da Bombardier com a nova aeronave serão de $1 bilhão.Se ela entrar e a Bombardier optar por guerra de preços, as duas empresas terão prejuízo de $100 milhões.

Exemplo: Um disputa entre Embraer e Bombardier

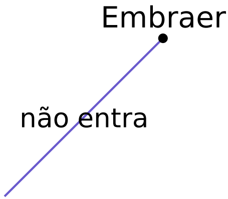
Suponha que a Bombardier tenha iniciado um projeto de desenvolvimento de uma aeronave para uma categoria específica de vôos regionais. A Embraer deve decidir se desenvolve ou não aeronave equivalente e entra para competir com a Bombardier nesse nicho. Se a Embraer decide entrar, a Bombardier deve decidir se inicia uma guerra de preços ou se devide pacificamente o mercado com a Embraer.Se a Embraer não entrar, os lucros da Bombardier com a nova aeronave serão de $1 bilhão.Se ela entrar e a Bombardier optar por guerra de preços, as duas empresas terão prejuízo de $100 milhões.Caso, com a entrada da Embraer, a Bombardier decida acomodar, cada empresa terá lucro de $300 milhões.

Representação do Jogo Embraer vs. Bombardier na forma extensiva

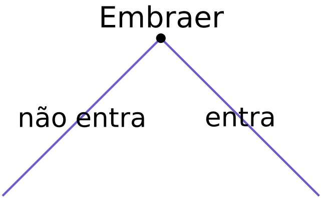
Representação do Jogo Embraer vs. Bombardier na forma extensiva

Embraer

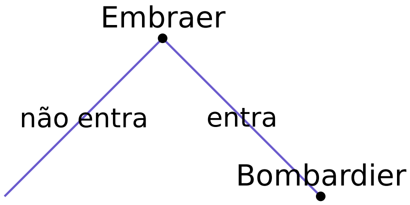
Representação do Jogo Embraer vs. Bombardier na forma extensiva



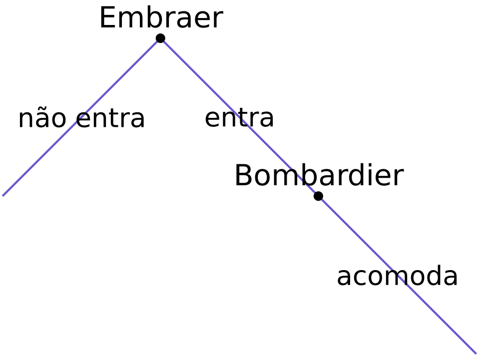
Representação do Jogo Embraer vs. Bombardier na forma extensiva



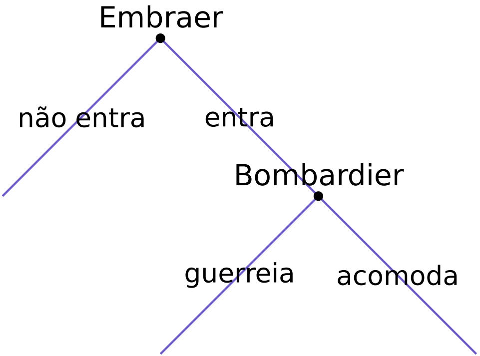
Representação do Jogo Embraer vs. Bombardier na forma extensiva



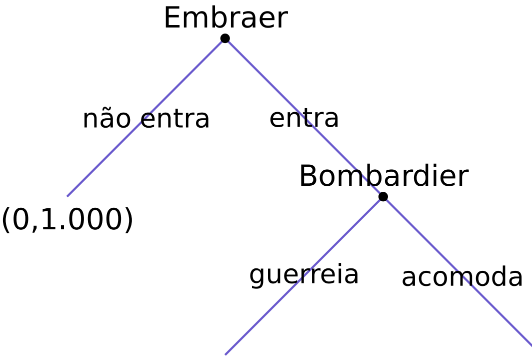
Representação do Jogo Embraer vs. Bombardier na forma extensiva



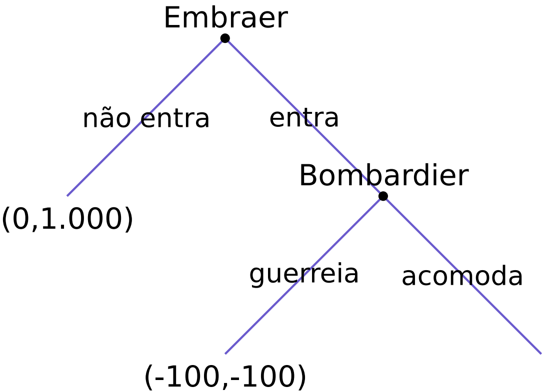
Representação do Jogo Embraer vs. Bombardier na forma extensiva



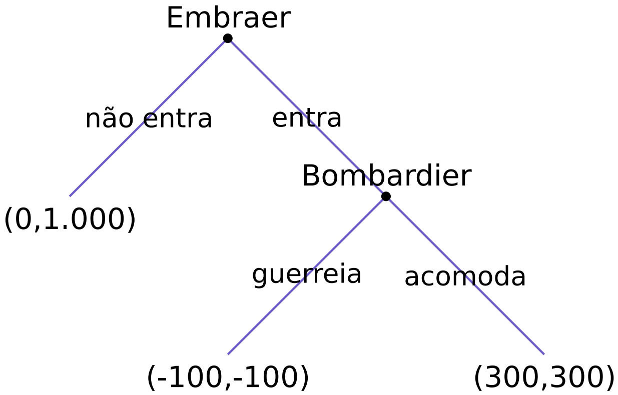
Representação do Jogo Embraer vs. Bombardier na forma extensiva



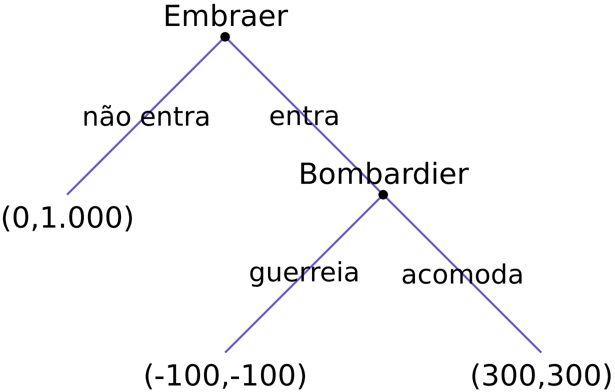
Representação do Jogo Embraer vs. Bombardier na forma extensiva



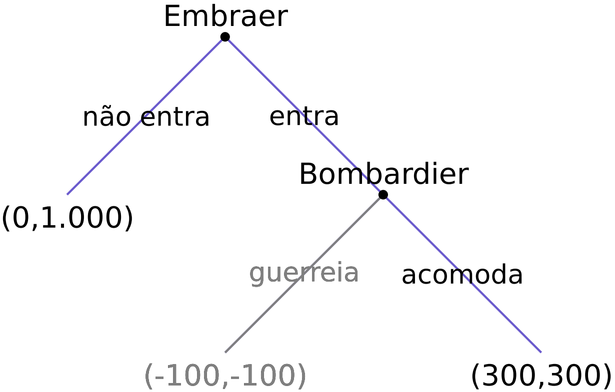
Representação do Jogo Embraer vs. Bombardier na forma extensiva



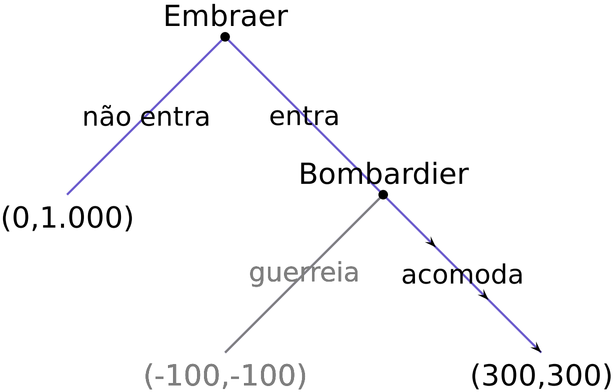
Solução do jogo por indução retroativa



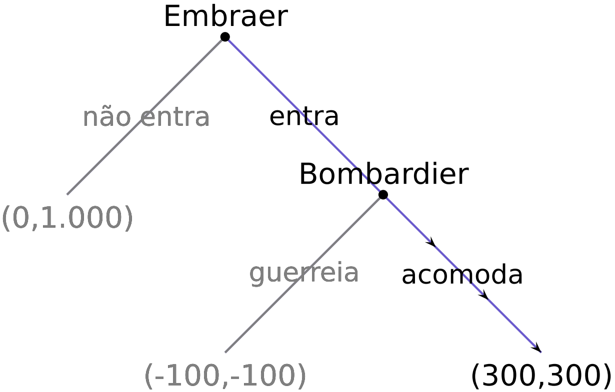
Solução do jogo por indução retroativa



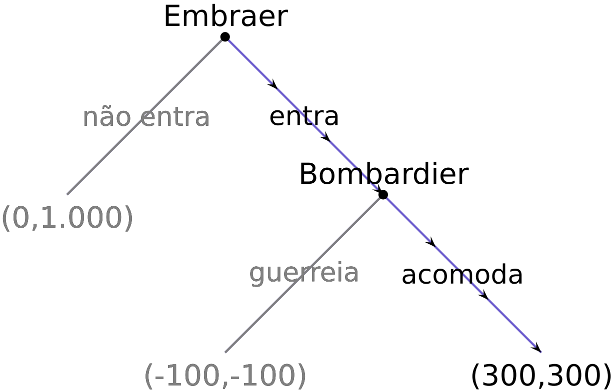
Solução do jogo por indução retroativa



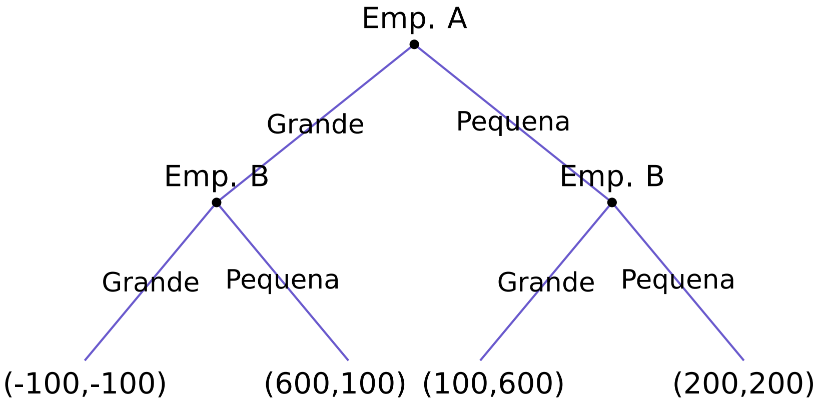
Solução do jogo por indução retroativa



Solução do jogo por indução retroativa

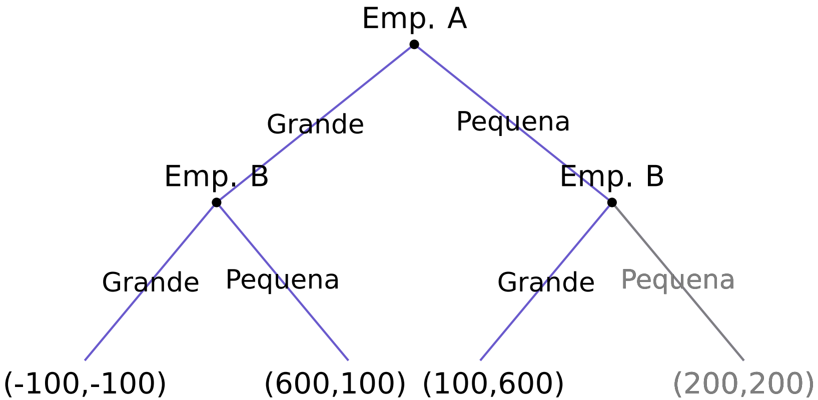


Exemplo: escolha de capacidade produtiva



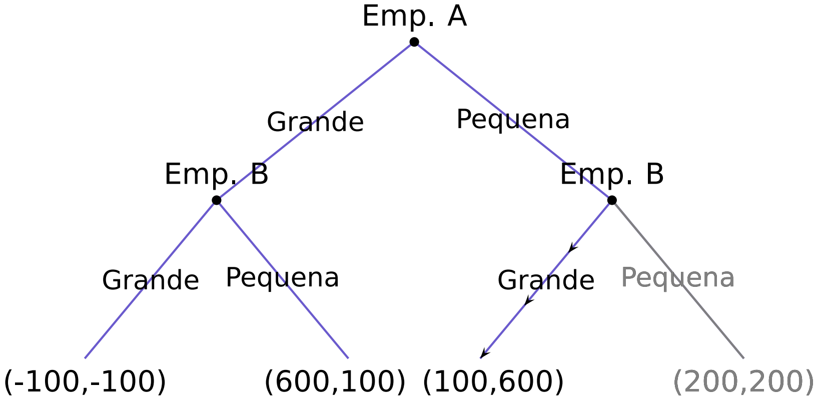
retornar do desvio

Exemplo: escolha de capacidade produtiva



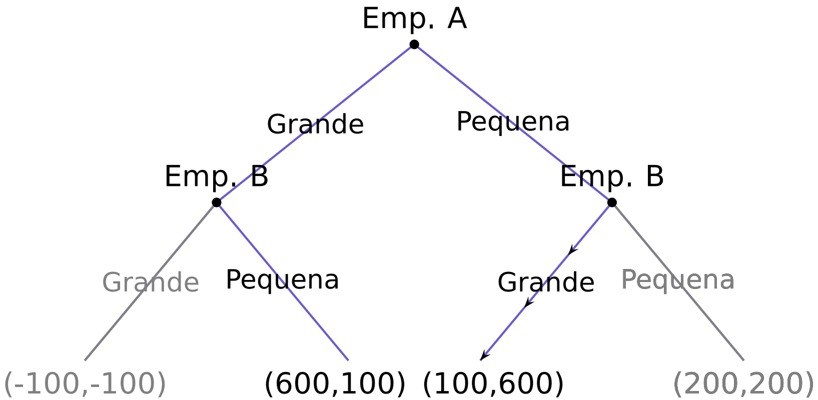
retornar do desvio

Exemplo: escolha de capacidade produtiva



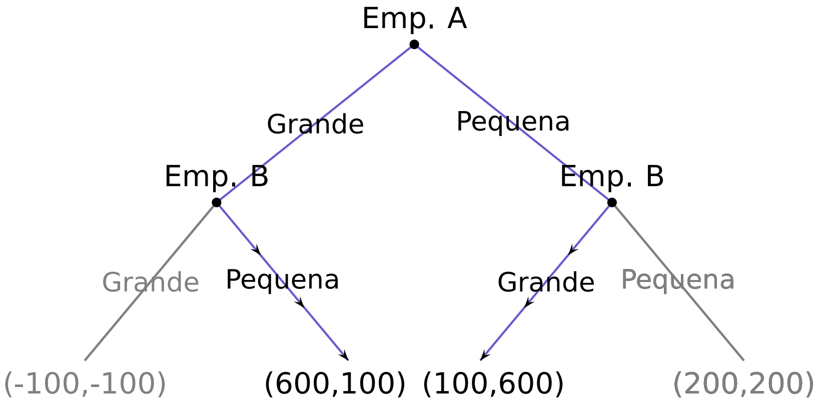
retornar do desvio

Exemplo: escolha de capacidade produtiva



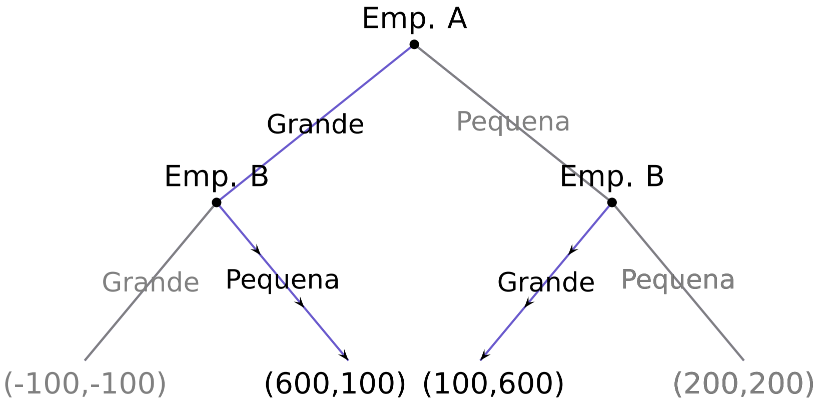
retornar do desvio

Exemplo: escolha de capacidade produtiva



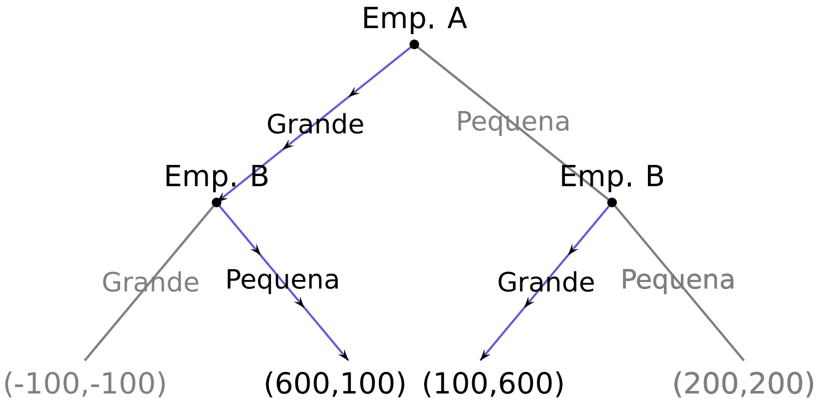
retornar do desvio

Exemplo: escolha de capacidade produtiva



retornar do desvio

Exemplo: escolha de capacidade produtiva



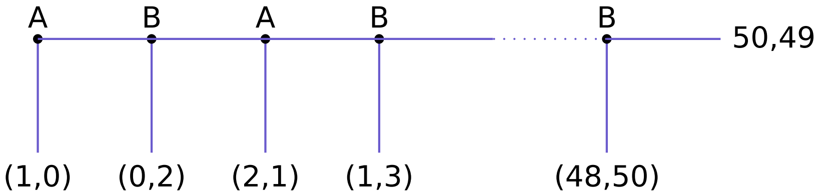
retornar do desvio

O jogo do ultimato

R$ 1.000,00 reais devem ser divididos entre dois jogadores. A regra para a divisão é a seguinte. Um primeiro jogador propõe uma divisão (ex. R$ 900,00 para mim e R$ 100 para você). O segundo jogador deve aceitar ou não essa divisão. Caso ele aceite, a divisão do dinheiro é feita conforme propôs o jogador 1. Caso ele não aceite nenhum jogador recebe dinheiro algum.
Qual a solução para esse jogo pelo princípio da indução retroativa? O que deve realmente ocorrer quando esse jogo é jogado?

O jogo da Centopéia

O jogo começa com o jogador 1 com R$1,00 e o jogador 2 com nada. O jogador 1 pode decidir parar o jogo, caso no qual ele fica com seu R$1,00 ou pagar R$1,00 para que o jogo continue. Caso ele pague, a banca adiciona R$1,00 ao R$ do jogador 1 e passa os R$2,00 para o jogador 2. Este deve decidir encerrar o jogo ou pagar para que o jogo continue. Após a 100ª, o jogo é encerrado compulsoriamente.



Aplicação 1: o modelo de Stakelberg ou liderança quantidade.

Descrição do modelo

- Duas empresas devem decidir quanto produzir.
- Uma dessas empresas, a empresa líder, deverá tomar sua decisão antes da outra.
- A outra empresa, a empresa seguidora, deverá decidir quanto produzir conhecendo a escolha feita pela empresa líder.
- A empresa líder deverá antecipar a reação da empresa seguido para tomar a decisão acertada.

Exemplo:

Informações

- Função de demanda: $p(y_1 + y_2) = a - b(y_1 + y_2)$
- Funções de custo: $c_1(y_1) = c\,y_1$ e $c_2(y_2) = c\,y_2$.
- Empresa líder é a empresa 1.

Exemplo (cont.)

O problema da seguidora

$$\max_{y_2} [a - b(y_1 + y_2)]y_2 - c y_2$$

Exemplo (cont.)

O problema da seguidora

$$\max_{y_2} [a - b(y_1 + y_2)]y_2 - c\,y_2$$

Reação da seguidora:

$$y_2(y_1) = \frac{a - c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

Essa função é chamada *função de reação* da seguidora.

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_1} \quad [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - cy_1$$

$$\text{sujeito a} \quad y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_1} \quad [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - cy_1$$

$$\text{sujeito a} \quad y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

Solução:

$$y_1 = \frac{a-c}{2b}$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_1} \quad [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - cy_1$$

$$\text{sujeito a} \quad y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

Solução:

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} \qquad y_2 = \frac{a-c}{4b}$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_1} \quad [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - cy_1$$

$$\text{sujeito a} \quad y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

Solução:

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} \qquad y_2 = \frac{a-c}{4b}$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{3}{4}\frac{a-c}{b}$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_1} \quad [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - cy_1$$

$$\text{sujeito a} \quad y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2}$$

Solução:

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} \qquad y_2 = \frac{a-c}{4b}$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{3}{4}\frac{a-c}{b} \qquad p(y) = \frac{a}{4} + \frac{3}{4}c$$

Exercício

Considere um modelo de Stackelberg com as seguintes informações:

Demanda: $x(p) = a - bp$

Custo seguidora: $CT_s(y_s) = c_s y_s$

Custo líder: $CT_l(y_l) = c_l y_l$

Exercício

Considere um modelo de Stackelberg com as seguintes informações:

Demanda: $x(p) = a - bp$

Custo seguidora: $CT_s(y_s) = c_s y_s$

Custo líder: $CT_l(y_l) = c_l y_l$

Pede-se

1. Qual deve ser a relação entre c_l, c_s e a para que, no equilíbrio, $y_s = 0$?

Exercício

Considere um modelo de Stackelberg com as seguintes informações:

Demanda: $x(p) = a - bp$

Custo seguidora: $CT_s(y_s) = c_s y_s$

Custo líder: $CT_l(y_l) = c_l y_l$

Pede-se

1. Qual deve ser a relação entre c_l, c_s e a para que, no equilíbrio, $y_s = 0$?
2. Nesse equilíbrio, pode-se considerar que a empresa líder é um monopolista?

Aplicação 2: O modelo de liderança preço

Descrição

- Duas empresas: líder e seguidora

Aplicação 2: O modelo de liderança preço

Descrição

- Duas empresas: líder e seguidora
- Produto homogêneo com demanda $x(p)$.

Aplicação 2: O modelo de liderança preço

Descrição

- Duas empresas: líder e seguidora
- Produto homogêneo com demanda $x(p)$.
- A empresa líder deve decidir quanto produzir y_l e que preço praticar p.

Aplicação 2: O modelo de liderança preço

Descrição

- Duas empresas: líder e seguidora
- Produto homogêneo com demanda $x(p)$.
- A empresa líder deve decidir quanto produzir y_l e que preço praticar p.
- A seguidora escolhe o nível de produção y_s que torna máximo o seu lucro dado o preço anunciado pela líder. $y_s = y_s(p)$)

Aplicação 2: O modelo de liderança preço

Descrição

- Duas empresas: líder e seguidora
- Produto homogêneo com demanda $x(p)$.
- A empresa líder deve decidir quanto produzir y_l e que preço praticar p.
- A seguidora escolhe o nível de produção y_s que torna máximo o seu lucro dado o preço anunciado pela líder. $y_s = y_s(p))$
- A emp. líder deve escolher p e y_l de modo a tornar seu lucro máximo, atendendo à condição de equilíbrio $y_l + y_s(p) = x(p)$.

Exemplo:

Dados

Demanda: $x(p) = 1.000 - \frac{3}{4}p$

Exemplo:

Dados

Demanda: $x(p) = 1.000 - \frac{3}{4}p$

Função de custo da seguidora: $c_s = 2{y_s}^2$

Exemplo:

Dados

Demanda: $x(p) = 1.000 - \frac{3}{4}p$

Função de custo da seguidora: $c_s = 2{y_s}^2$

Função de custo da líder: $\frac{{y_l}^2}{4}$

Exemplo:

Dados

Demanda: $x(p) = 1.000 - \frac{3}{4}p$

Função de custo da seguidora: $c_s = 2{y_s}^2$

Função de custo da líder: $\frac{{y_l}^2}{4}$

A reação da seguidora

$$\max_{y_s} p\, y_s - 2{y_s}^2$$

Exemplo:

Dados

Demanda: $x(p) = 1.000 - \frac{3}{4}p$

Função de custo da seguidora: $c_s = 2{y_s}^2$

Função de custo da líder: $\frac{{y_l}^2}{4}$

A reação da seguidora

$$\max_{y_s} p\, y_s - 2{y_s}^2 \Rightarrow y_s(p) = \frac{p}{4}$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} py_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} p y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$ ou

$$y_l + \frac{p}{4} = 1.000 - \frac{3}{4} p$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} p y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$ ou

$$y_l + \frac{p}{4} = 1.000 - \frac{3}{4}p \Rightarrow p = 1.000 - y_l$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} p y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$ ou

$$y_l + \frac{p}{4} = 1.000 - \frac{3}{4}p \Rightarrow p = 1.000 - y_l$$

O que equivale ao problema

$$\max_{y_l} (1.000 - y_l) y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} py_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$ ou

$$y_l + \frac{p}{4} = 1.000 - \frac{3}{4}p \Rightarrow p = 1.000 - y_l$$

O que equivale ao problema

$$\max_{y_l}(1.000 - y_l)y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Solução

$y_l = 400$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} p y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$ ou

$$y_l + \frac{p}{4} = 1.000 - \frac{3}{4}p \Rightarrow p = 1.000 - y_l$$

O que equivale ao problema

$$\max_{y_l} (1.000 - y_l) y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Solução

$y_l = 400$, $p = 600$

Exemplo (cont.):

O problema da líder

$$\max_{y_l} p y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

Sujeita à restrição $y_l + y_s = x(p)$ ou

$$y_l + \frac{p}{4} = 1.000 - \frac{3}{4}p \Rightarrow p = 1.000 - y_l$$

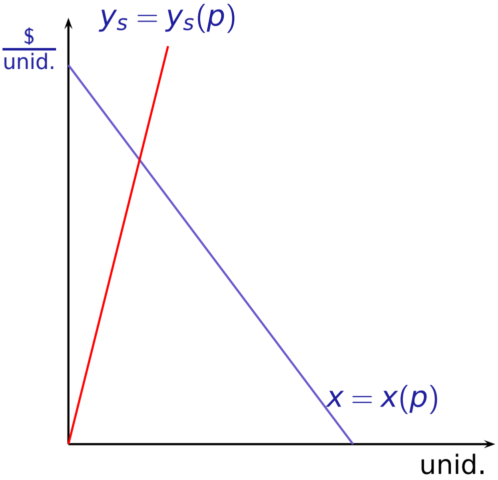
O que equivale ao problema

$$\max_{y_l}(1.000 - y_l)y_l - \frac{{y_l}^2}{4}$$

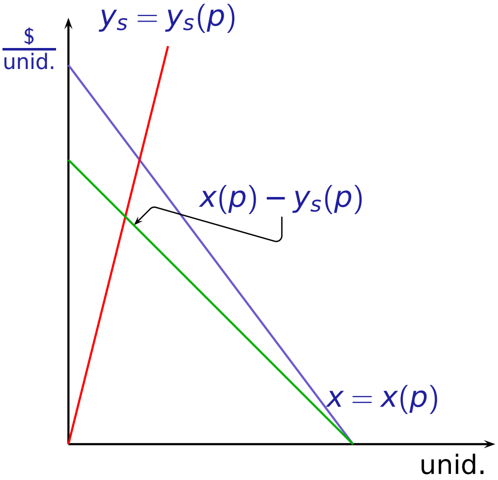
Solução

$y_l = 400$, $p = 600$, $y_s = 150$

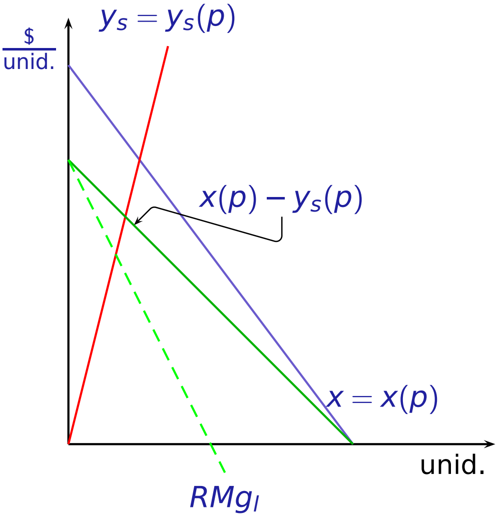
Liderança preço: solução gráfica



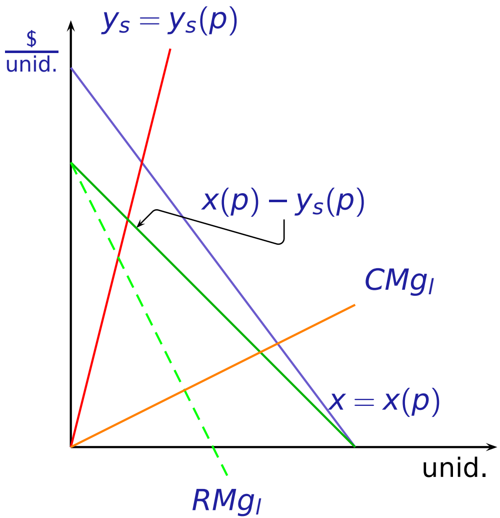
Liderança preço: solução gráfica



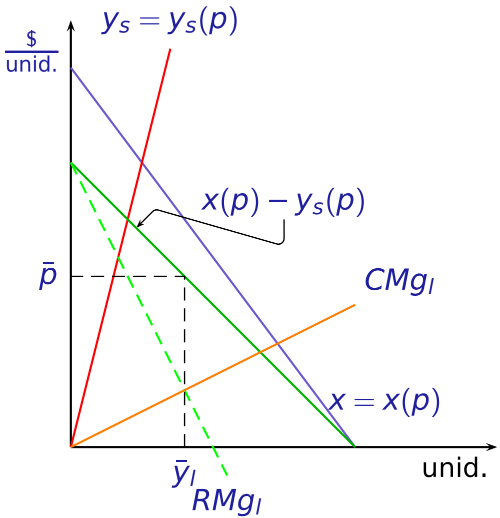
Liderança preço: solução gráfica



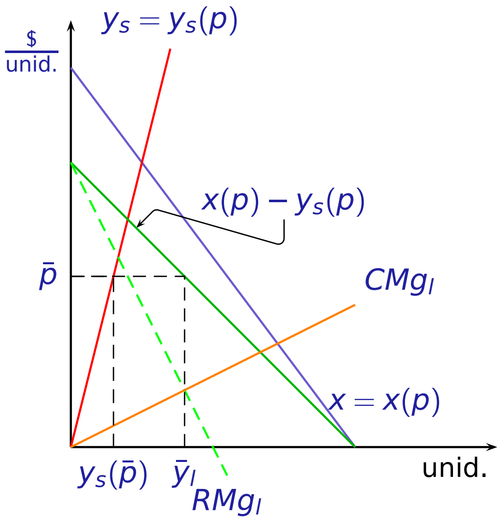
Liderança preço: solução gráfica



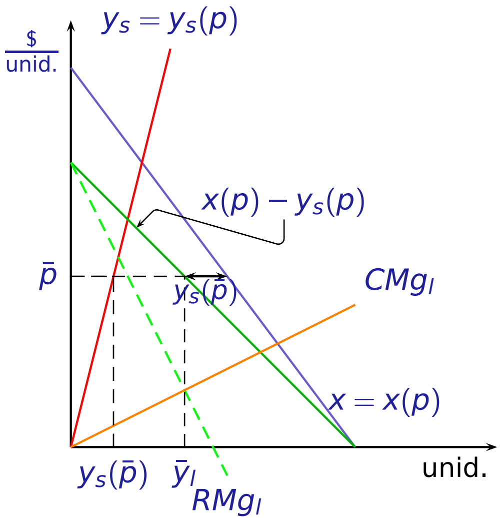
Liderança preço: solução gráfica



Liderança preço: solução gráfica



Liderança preço: solução gráfica



Aplicação: modelo de barganha de Rubinstein-Ståhl

- Dois jogadores, A e B, devem concordar em como dividir uma torta de tamanho 1.
- No início do jogo ($t = 0$), A deve propor uma regra de partilha que será aceita ou não por B
- Caso B aceite a partilha proposta por A, ela é realizada e o jogo acaba.
- Caso B não aceite a proposta de A, caberá a ele oferecer no período seguinte $t = 1$ uma nova proposta de partilha e, a A, aceitar ou rejeitar e oferecer uma nova proposta no período seguinte $t = 2 \ldots$
- A é indiferente entre receber x daqui a n períodos ou $\alpha^n x$ agora e B A é indiferente entre receber y daqui a n períodos ou $\beta^n y$ agora

Modelo de barganha de Rubinstein-Ståhl com horizonte de três períodos

Melhores propostas por período

t	Prop.	*A* recebe	*B* recebe
2	*A* propõe		
1	*B* propõe		
0	*A* propõe		

Melhores propostas por período (valores decontados)

t	Prop.	*A* recebe	*B* recebe
2	*A* propõe		
1	*B* propõe		
0	*A* propõe		

Modelo de barganha de Rubinstein-Ståhl com horizonte de três períodos

Melhores propostas por período

t	Prop.	A recebe	B recebe
2	A propõe	1	0
1	B propõe		
0	A propõe		

Melhores propostas por período (valores decontados)

t	Prop.	A recebe	B recebe
2	A propõe	α^2	0
1	B propõe		
0	A propõe		

Modelo de barganha de Rubinstein-Ståhl com horizonte de três períodos

Melhores propostas por período

t	Prop.	A recebe	B recebe
2	A propõe	1	0
1	B propõe	α	
0	A propõe		

Melhores propostas por período (valores decontados)

t	Prop.	A recebe	B recebe
2	A propõe	α^2	0
1	B propõe	α^2	
0	A propõe		

Modelo de barganha de Rubinstein-Ståhl com horizonte de três períodos

Melhores propostas por período

t	Prop.	A recebe	B recebe
2	A propõe	1	0
1	B propõe	α	$1-\alpha$
0	A propõe		

Melhores propostas por período (valores decontados)

t	Prop.	A recebe	B recebe
2	A propõe	α^2	0
1	B propõe	α^2	$\beta(1-\alpha)$
0	A propõe		

Modelo de barganha de Rubinstein-Ståhl com horizonte de três períodos

Melhores propostas por período

t	Prop.	A recebe	B recebe
2	A propõe	1	0
1	B propõe	α	$1-\alpha$
0	A propõe		$\beta(1-\alpha)$

Melhores propostas por período (valores decontados)

t	Prop.	A recebe	B recebe
2	A propõe	α^2	0
1	B propõe	α^2	$\beta(1-\alpha)$
0	A propõe		$\beta(1-\alpha)$

Modelo de barganha de Rubinstein-Ståhl com horizonte de três períodos

Melhores propostas por período

t	Prop.	A recebe	B recebe
2	A propõe	1	0
1	B propõe	α	$1-\alpha$
0	A propõe	$1-\beta(1-\alpha)$	$\beta(1-\alpha)$

Melhores propostas por período (valores decontados)

t	Prop.	A recebe	B recebe
2	A propõe	α^2	0
1	B propõe	α^2	$\beta(1-\alpha)$
0	A propõe	$1-\beta(1-\alpha)$	$\beta(1-\alpha)$

Modelo de barganha de Rubinstein-Ståhl com horizonte infinito

Chamando de x a parcela que cabe a A segundo sua primeira proposta, deveremos ter

$$x = 1 - \beta(1 - \alpha(1 - \beta(1 - \alpha(\ldots\ \ldots))))$$

Modelo de barganha de Rubinstein-Ståhl com horizonte infinito

Chamando de x a parcela que cabe a A segundo sua primeira proposta, deveremos ter

$$\begin{aligned} x &= 1 - \beta\,(1 - \alpha\,(1 - \beta\,(1 - \alpha(\ldots\ \ldots)))) \\ &= 1 - \beta(1 - \alpha x) \end{aligned}$$

Modelo de barganha de Rubinstein-Ståhl com horizonte infinito

Chamando de x a parcela que cabe a A segundo sua primeira proposta, deveremos ter

$$\begin{aligned} x &= 1 - \beta\,(1 - \alpha\,(1 - \beta\,(1 - \alpha(\ldots\ \ldots)))) \\ &= 1 - \beta(1 - \alpha x) \end{aligned}$$

Resolvendo para x encontramos a parcela que caberá a A (x) e a parcela que caberá a B ($1 - x$)

$$x = \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} \qquad 1 - x = \frac{\beta(1-\alpha)}{1-\alpha\beta}$$

O conjunto de informação

Definição

Um **conjunto de informação** é um conjunto de nós decisórios nos quais um jogador sabe que pode estar quando escolhe uma ação.

O conjunto de informação

Definição

Um **conjunto de informação** é um conjunto de nós decisórios nos quais um jogador sabe que pode estar quando escolhe uma ação.

Comentários:

- Em jogos sequenciais com informação completa, o conjunto de informação será sempre igual a um único nó.

O conjunto de informação

Definição

Um **conjunto de informação** é um conjunto de nós decisórios nos quais um jogador sabe que pode estar quando escolhe uma ação.

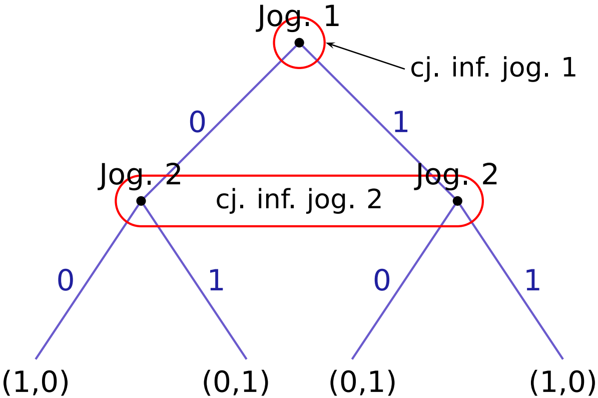
Comentários:

- Em jogos sequenciais com informação completa, o conjunto de informação será sempre igual a um único nó.
- Em jogos com informação incompleta ou jogadas simultâneas, esse conjunto pode ser composto por dois ou mais nós que admitam as escolhas das mesmas ações.

Exemplo:

- Dois jogadores devem escrever, cada um, em um papel o número zero ou o número um.
- O segundo jogador escolhe seu número sem saber o número que o primeiro escolheu.
- Caso a soma dos números seja par, o jogador 1 ganha R$ 1,00. Caso contrário o mesmo prêmio é pago ao jogador 2.

Exemplo (cont.):

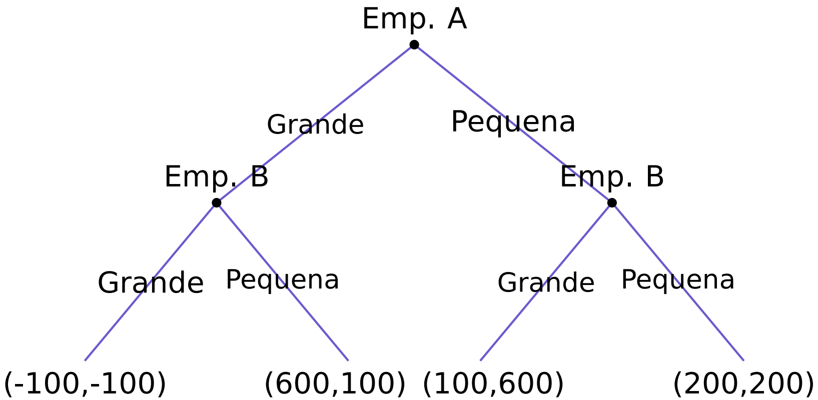


Estratégia

Definição

Uma **estratégia** é um conjunto de regras que dizem o que um jogador deve fazer em cada possível momento de decisão de um jogo, ou seja, uma estratégia associa uma ação a cada conjunto de informação de um jogador.

Exemplo: a escolha da capacidade produtiva



retornar do desvio

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

G: Escolher grande.

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

G: Escolher grande. **P**: Escolher pequena.

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

G: Escolher grande.

P: Escolher pequena.

Estratégias da empresa B

GG: Escolher grande caso a empresa A escolha G e grande caso a empresa A escolha P.

retornar do desvio

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

G: Escolher grande.

P: Escolher pequena.

Estratégias da empresa B

GG: Escolher grande caso a empresa A escolha G e grande caso a empresa A escolha P.

GP: Escolher grande caso a empresa A escolha G e pequena caso a empresa A escolha P.

retornar do desvio

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

G: Escolher grande.

P: Escolher pequena.

Estratégias da empresa B

GG: Escolher grande caso a empresa A escolha G e grande caso a empresa A escolha P.

PG: Escolher pequena caso a empresa A escolha G e pequena caso a empresa A escolha P.

GP: Escolher grande caso a empresa A escolha G e pequena caso a empresa A escolha P.

retornar do desvio

Exemplo (cont.):

Estratégias da empresa A

G: Escolher grande.

P: Escolher pequena.

Estratégias da empresa B

GG: Escolher grande caso a empresa A escolha G e grande caso a empresa A escolha P.

GP: Escolher grande caso a empresa A escolha G e pequena caso a empresa A escolha P.

PG: Escolher pequena caso a empresa A escolha G e pequena caso a empresa A escolha P.

PP: Escolher pequena caso a empresa A escolha G e grande caso a empresa A escolha P.

retornar do desvio

Representação estratégica do jogo – exemplo:

B

A		GG	GP	PP	PG
	G	$-100, -100$	$-100, -100$	$600, 100$	$600, 100$
	P	$100, \quad 600$	$200, \quad 200$	$200, 200$	$100, 600$

retornar do desvio

Sumário

1. Introdução

2. Jogos na forma extensiva

3. **Jogos na forma estratégica**
   - Representação
   - Estratégias dominantes
   - Equilíbrio de Nash
   - O modelo de Cournot
   - O Modelo de Bertrand

4. Equilíbrio de Nash e jogos sequenciais

5. Jogos com repetição

Exemplo

Duas empresas dividem um mercado. Cada uma delas deve decidir individualmente que política de preços irá adotar. As opções são: adotar preço baixo e adotar preço alto. Caso as duas empresas adotem preço baixo, cada uma terá um lucro de \$10 milhões por ano. Casos as duas pratiquem preço elevado, cada uma terá lucro anual de \$50 milhões. Caso um pratique preço baixo e a outra pratique preço elevado, aquela empresa que pratica preço baixo terá lucro de \$100 milhões ao ano e a que praticou preços elevados arcará com um prejuízo anual de \$50 milhões.

Representação do jogo na forma estratégica

Emp. 2

Emp. 1		P. baixo	P. elevado
	P. baixo	$10, \ 10$	$100, -50$
	P. elevado	$-50, 100$	$50, \ 50$

Estratégias dominantes: Definição

Estratégias Dominantes

Diz-se que um jogador possui uma **estratégia dominante** em um jogo quando essa estratégia gera o melhor resultado para esse jogador, independentemente de qual é a estratégia adotada pelo outro jogados.

Estratégias dominantes: Definição

Estratégias Dominantes

Diz-se que um jogador possui uma **estratégia dominante** em um jogo quando essa estratégia gera o melhor resultado para esse jogador, independentemente de qual é a estratégia adotada pelo outro jogados.

Equilíbrio com estratégias dominantes

Caso em um jogo os dois jogadores possuam estratégias dominantes, então a combinação dessas estratégias é chamada de um **equilíbrio com estratégias dominantes**.

Exemplo

		Emp. 2	
		P. baixo	**P. elevado**
Emp. 1	**P. baixo**	10, 10	100, −50
	P. elevado	−50, 100	50, 50

[1] **Estratégia da empresa 1 é melhor resposta.**

[2] **Estratégia da empresa 2 é melhor resposta.**

Exemplo

		Emp. 2	
		P. baixo	**P. elevado**
Emp. 1	**P. baixo**	10, 10 [1]	100, −50
	P. elevado	−50, 100	50, 50

[1] **Estratégia da empresa 1 é melhor resposta.**

[2] **Estratégia da empresa 2 é melhor resposta.**

Exemplo

		Emp. 2	
		P. baixo	**P. elevado**
Emp. 1	**P. baixo**	$10, \ 10^{1}$	$100, -50^{1}$
	P. elevado	$-50, 100$	$50, \ 50$

[1] **Estratégia da empresa 1 é melhor resposta.**

[2] **Estratégia da empresa 2 é melhor resposta.**

- Preço baixo é estratégia dominante para a empresa 1.

Exemplo

		Emp. 2	
		P. baixo	**P. elevado**
Emp. 1	**P. baixo**	$10, \ 10^{1,2}$	$100, -50^{1}$
	P. elevado	$-50, 100$	$50, \ 50$

[1] **Estratégia da empresa 1 é melhor resposta.**

[2] **Estratégia da empresa 2 é melhor resposta.**

- Preço baixo é estratégia dominante para a empresa 1.

Exemplo

		Emp. 2	
		P. baixo	**P. elevado**
Emp. 1	**P. baixo**	$10, \ 10^{1,2}$	$100, -50^{1}$
	P. elevado	$-50, 100^{\ 2}$	$50, \ 50$

[1] **Estratégia da empresa 1 é melhor resposta.**

[2] **Estratégia da empresa 2 é melhor resposta.**

- Preço baixo é estratégia dominante para a empresa 1.
- Preço baixo é estratégia dominante para a empresa 2.

Exemplo

		Emp. 2	
		P. baixo	**P. elevado**
Emp. 1	**P. baixo**	$10, \ 10^{1,2}$	$100, -50^{1}$
	P. elevado	$-50, 100^{\ 2}$	$50, \ 50$

[1] **Estratégia da empresa 1 é melhor resposta.**

[2] **Estratégia da empresa 2 é melhor resposta.**

- Preço baixo é estratégia dominante para a empresa 1.
- Preço baixo é estratégia dominante para a empresa 2.
- Preço baixo, preço baixo é um equilíbrio com estratégias dominantes.

O Dilema dos Prisioneiros

Dois parceiros de um crime são interrogados simultaneamente por agentes policiais. A cada um dos criminosos é contada a seguinte história: as provas que temos contra vocês nos permitem impor uma pena de 3 anos de prisão para cada um. Todavia, nós sabemos (mas não temos provas) que vocês participaram de um sequestro. Se você confessar a participação nesse crime, nós podemos atenuar sua pena da seguinte maneira. Se você confessar o sequestro e seu companheiro não confessar, sua pena será de apenas um ano e seu companheiro terá pena de 10 anos. A recíproca é verdadeira. Se ambos confessarem, todavia, não será possível atenuar tanto a pena e cada um de vocês será condenado a 6 anos de cadeia.

O Dilema dos Prisioneiros: Representação estratégica

		Pris. 2	
		Confessa	**Não conf.**
Pris. 1	**Confessa**	$-6, -6$	$-1, -10$
	N. Confessa	$-10, -1$	$-3, -3$

[1] **estratégia do prisioneiro 1 é melhor resposta**

[2] **estratégia do prisioneiro 2 é melhor resposta**

O Dilema dos Prisioneiros: Representação estratégica

Pris. 2

Pris. 1		Confessa	Não conf.
	Confessa	$-6,-6$ [1]	$-1,-10$
	N. Confessa	$-10,-1$	$-3,\ -3$

[1] **estratégia do prisioneiro 1 é melhor resposta**

[2] **estratégia do prisioneiro 2 é melhor resposta**

O Dilema dos Prisioneiros: Representação estratégica

Pris. 2

Pris. 1		Confessa	Não conf.
	Confessa	$-6, -6$ [1]	$-1, -10$ [1]
	N. Confessa	$-10, -1$	$-3, -3$

[1] **estratégia do prisioneiro 1 é melhor resposta**

[2] **estratégia do prisioneiro 2 é melhor resposta**

O Dilema dos Prisioneiros: Representação estratégica

Pris. 2

Pris. 1		Confessa	Não conf.
	Confessa	$-6, -6$ [1,2]	$-1, -10$ [1]
	N. Confessa	$-10, -1$	$-3, -3$

[1] **estratégia do prisioneiro 1 é melhor resposta**

[2] **estratégia do prisioneiro 2 é melhor resposta**

O Dilema dos Prisioneiros: Representação estratégica

		Pris. 2	
		Confessa	**Não conf.**
Pris. 1	**Confessa**	$-6, -6$ [1,2]	$-1, -10$ [1]
	N. Confessa	$-10, -1$ [2]	$-3, -3$

[1] **estratégia do prisioneiro 1 é melhor resposta**

[2] **estratégia do prisioneiro 2 é melhor resposta**

Exemplo: disputas trabalhistas

Porcentagem de casos ganhos em disputas trabalhistas nos EUA

		Sindicato	
		C/ Advogado	**S/ Advogado**
Emp.	**C/ Advogado**	$54, 46$	$73, 27$
	S/ Advogado	$23, 77$	$56, 44$

^{E} **Estratégia da empresa é melhor resposta**

^{S} **Estratégia do sindicato é melhor resposta**

Exemplo: disputas trabalhistas

Porcentagem de casos ganhos em disputas trabalhistas nos EUA

		Sindicato	
		C/ Advogado	**S/ Advogado**
Emp.	**C/ Advogado**	$54,46^E$	$73,27^E$
	S/ Advogado	$23,77$	$56,44$

^{E} **Estratégia da empresa é melhor resposta**

^{S} **Estratégia do sindicato é melhor resposta**

Exemplo: disputas trabalhistas

Porcentagem de casos ganhos em disputas trabalhistas nos EUA

		Sindicato	
		C/ Advogado	**S/ Advogado**
Emp.	**C/ Advogado**	$54,46^{E,S}$	$73,27^{E}$
	S/ Advogado	$23,77^{S}$	$56,44$

^{E} **Estratégia da empresa é melhor resposta**

^{S} **Estratégia do sindicato é melhor resposta**

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

Força Aer. Americana

	Marinha Japonesa: Norte	Marinha Japonesa: Sul
Norte	2	2
Sul	1	3

[A] **Melhor resposta americana**

[J] **Melhor resposta japonesa**

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

Força Aer. Americana (linhas) × Marinha Japonesa (colunas)

	Norte	Sul
Norte	2^A	2
Sul	1	3^A

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

Força Aer. Americana

	Marinha Japonesa: **Norte**	Marinha Japonesa: **Sul**
Norte	2^A	2
Sul	1	3^A

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

Força Aer. Americana

	Marinha Japonesa: **Norte**	Marinha Japonesa: **Sul**
Norte	$2^{A,J}$	2^{J}
Sul	1	3^{A}

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

Marinha Japonesa

Força Aer. Americana	Norte	Sul
Norte	$2^{A,J}$	2^{J}
Sul	1^{J}	3^{A}

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

Marinha Japonesa

Força Aer. Americana	Norte	Sul
Norte	$2^{A,J}$	2^{J}
Sul	1^{J}	3^{A}

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

Solução

- A marinha japonesa deve escolher norte.

A batalha do Mar de Bismark: quando apenas um jogador possui estratégia dominante

Força Aer. Americana / Marinha Japonesa

	Norte	**Sul**
Norte	$2^{A,J}$	2^{J}
Sul	1^{J}	3^{A}

^{A} **Melhor resposta americana**

^{J} **Melhor resposta japonesa**

Solução

- A marinha japonesa deve escolher norte.
- Sabendo disso, a força aérea americana escolherá norte.

Equilíbrio de Nash

Definição

Dizemos que ocorre um **equilíbrio de Nash** quando cada jogador dá a melhor resposta à estratégia adotada pelo outro jogador.

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
	Alto	60, 60	36, 70	36, 35
Zia Peppa	**Médio**	70, 36	50, 50	30, 35
	Baixo	35, 36	35, 30	25, 25

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
	Alto	$60, 60$	$36, 70$	$36, 35$
Zia Peppa	**Médio**	$70, 36^z$	$50, 50$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
	Alto	$60, 60$	$36, 70$	$36, 35$
Zia Peppa	**Médio**	$70, 36^z$	$50, 50^z$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
	Alto	$60, 60$	$36, 70$	$36, 35^{z}$
Zia Peppa	**Médio**	$70, 36^{z}$	$50, 50^{z}$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
	Alto	$60, 60$	$36, 70^d$	$36, 35^z$
Zia Peppa	**Médio**	$70, 36^z$	$50, 50^z$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
	Alto	$60, 60$	$36, 70^d$	$36, 35^z$
Zia Peppa	**Médio**	$70, 36^z$	$50, 50^{z,d}$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
	Alto	60, 60	36, 70 ^{d}	36, 35 ^{z}
Zia Peppa	**Médio**	70, 36 ^{z}	50, 50 ^{z,d}	30, 35
	Baixo	35, 36 ^{d}	35, 30	25, 25

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Exemplo: guerra de preços entre as pizzarias de um bairro

Lucros segundo política de preços

		Dom Pepe		
		Alto	**Médio**	**Baixo**
Zia Peppa	**Alto**	$60, 60$	$36, 70^{d}$	$36, 35^{z}$
	Médio	$70, 36^{z}$	$50, 50^{z,d}$	$30, 35$
	Baixo	$35, 36^{d}$	$35, 30$	$25, 25$

^{z} **estratégia de Zia Peppa é melhor resposta**

^{d} **estratégia de Dom Pepe é melhor resposta**

Múltiplos equilíbrio e coordenação

Exemplo: Batalha dos Sexos

Ele

Ela		Ballet	Futebol
	Ballet	2, 1	0, 0
	Futebol	0, 0	1, 2

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Múltiplos equilíbrio e coordenação

Exemplo: Batalha dos Sexos

		Ele	
		Ballet	**Futebol**
Ela	**Ballet**	2, 1 ♀	0, 0
	Futebol	0, 0	1, 2

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Múltiplos equilíbrio e coordenação

Exemplo: Batalha dos Sexos

		Ele	
		Ballet	**Futebol**
Ela	**Ballet**	2, 1 ♀	0, 0
	Futebol	0, 0	1, 2 ♀

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Múltiplos equilíbrio e coordenação

Exemplo: Batalha dos Sexos

		Ele	
		Ballet	**Futebol**
Ela	**Ballet**	2, 1 ♀,♂	0, 0
	Futebol	0, 0	1, 2 ♀

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Múltiplos equilíbrio e coordenação

Exemplo: Batalha dos Sexos

		Ele	
		Ballet	**Futebol**
Ela	**Ballet**	2, 1 ♀, ♂	0, 0
	Futebol	0, 0	1, 2 ♀, ♂

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Múltiplos equilíbrios: ponto focal.

Exemplo: Corrida armamentista – controlar ou construir armas nucleares

U.R.S.S.

U.S.A.		Controla	Constrói
	Controla	4, 4	1, 3
	Constrói	3, 1	2, 2

^{A} **U.S.A. escolheram a melhor resposta**

^{R} **U.R.S.S. escolheram a melhor resposta**

Múltiplos equilíbrios: ponto focal.

Exemplo: Corrida armamentista – controlar ou construir armas nucleares

U.R.S.S.

U.S.A.		Controla	Constrói
	Controla	$4, 4^A$	$1, 3$
	Constrói	$3, 1$	$2, 2$

^{A} **U.S.A. escolheram a melhor resposta**

^{R} **U.R.S.S. escolheram a melhor resposta**

Múltiplos equilíbrios: ponto focal.

Exemplo: Corrida armamentista – controlar ou construir armas nucleares

U.R.S.S.

U.S.A.		Controla	Constrói
	Controla	$4, 4^A$	$1, 3$
	Constrói	$3, 1$	$2, 2^A$

^{A} **U.S.A. escolheram a melhor resposta**

^{R} **U.R.S.S. escolheram a melhor resposta**

Múltiplos equilíbrios: ponto focal.

Exemplo: Corrida armamentista – controlar ou construir armas nucleares

U.R.S.S.

U.S.A.		Controla	Constrói
	Controla	$4, 4^{A,R}$	$1, 3$
	Constrói	$3, 1$	$2, 2^{A}$

^{A} **U.S.A. escolheram a melhor resposta**

^{R} **U.R.S.S. escolheram a melhor resposta**

Múltiplos equilíbrios: ponto focal.

Exemplo: Corrida armamentista – controlar ou construir armas nucleares

U.R.S.S.

U.S.A.		Controla	Constrói
	Controla	$4, 4^{A,R}$	$1, 3$
	Constrói	$3, 1$	$2, 2^{A,R}$

^{A} **U.S.A. escolheram a melhor resposta**

^{R} **U.R.S.S. escolheram a melhor resposta**

Infinitas escolhas

Exemplo: o jogo da metade da média

Dois jogadores devem escolher simultaneamente um número real maior ou igual a zero e menor ou igual a 100. Se o número escolhido por um jogador for igual à metade da média entre os dois números escolhidos, esse jogador ganhará um prêmio de R$5.000,00.

Solução

Sejam x_1 o número escolhido pelo jogador 1 e x_2 o número escolhido pelo jogador 2. Para que x_1 seja a melhor escolha do jogador 1 dado x_2 é preciso que

Solução

Sejam x_1 o número escolhido pelo jogador 1 e x_2 o número escolhido pelo jogador 2. Para que x_1 seja a melhor escolha do jogador 1 dado x_2 é preciso que

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2}$$

Solução

Sejam x_1 o número escolhido pelo jogador 1 e x_2 o número escolhido pelo jogador 2. Para que x_1 seja a melhor escolha do jogador 1 dado x_2 é preciso que

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{3}. \tag{1}$$

Solução

Sejam x_1 o número escolhido pelo jogador 1 e x_2 o número escolhido pelo jogador 2. Para que x_1 seja a melhor escolha do jogador 1 dado x_2 é preciso que

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{3}. \tag{1}$$

Para que x_2 seja a melhor escolha do jogador 2 dado x_1 é preciso que

$$x_2 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{3}. \tag{2}$$

Solução

Sejam x_1 o número escolhido pelo jogador 1 e x_2 o número escolhido pelo jogador 2. Para que x_1 seja a melhor escolha do jogador 1 dado x_2 é preciso que

$$x_1 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2}{3}. \qquad (1)$$

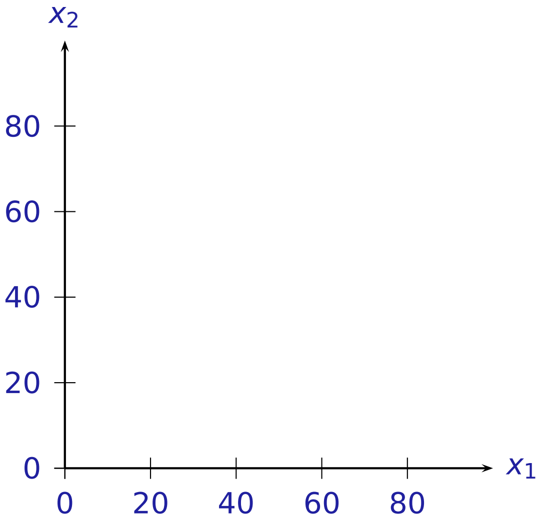
Para que x_2 seja a melhor escolha do jogador 2 dado x_1 é preciso que

$$x_2 = \frac{(x_1 + x_2)/2}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{x_1}{3}. \qquad (2)$$

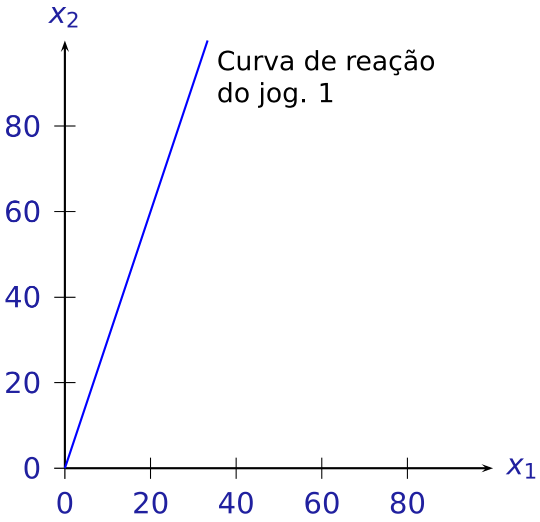
O equilíbrio de Nash ocorre quando (1) e (2) ocorrem simultaneamente, ou seja quando

$$x_1 = x_2 = 0$$

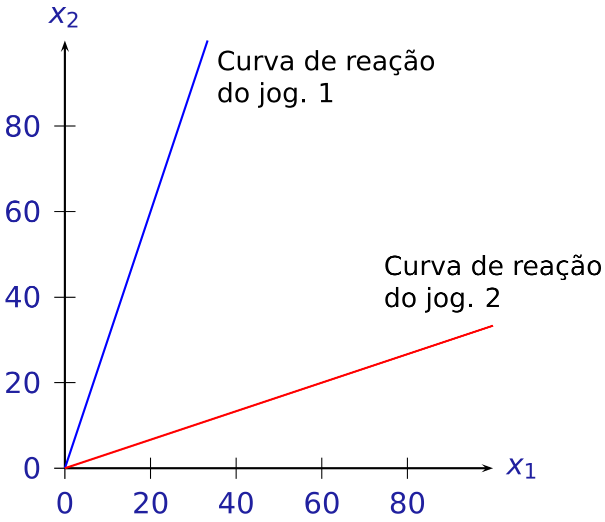
Solução gráfica



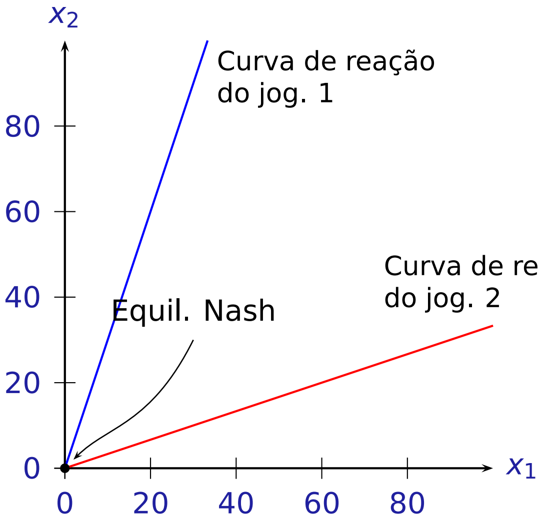
Solução gráfica



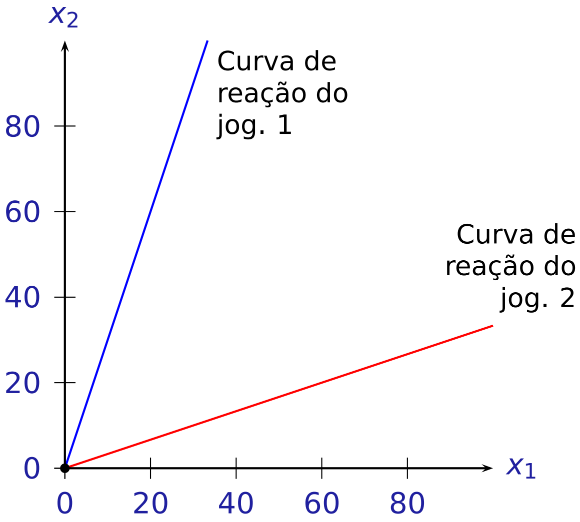
Solução gráfica



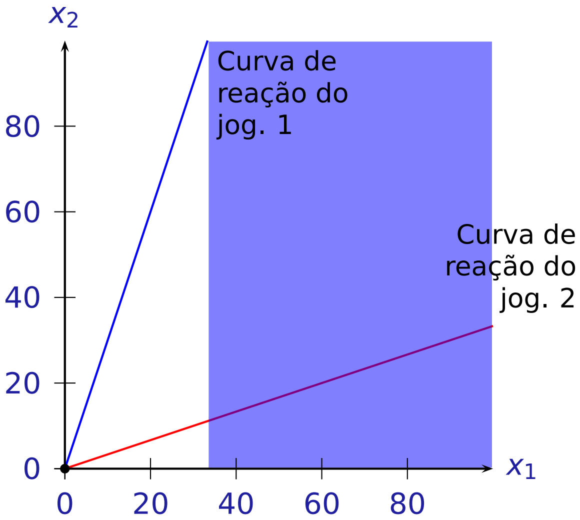
Solução gráfica



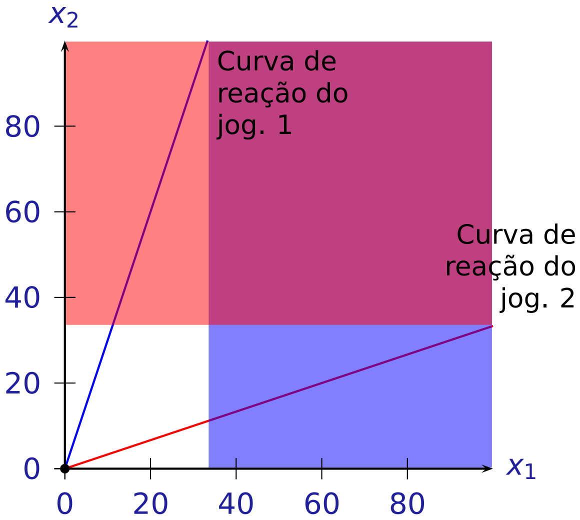
Racionalização do equilíbrio



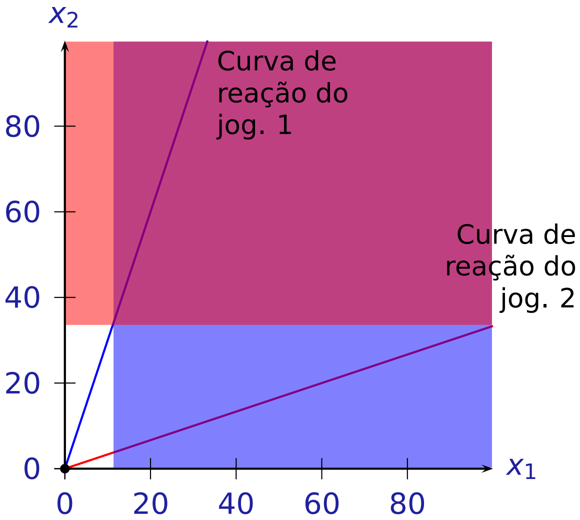
Racionalização do equilíbrio



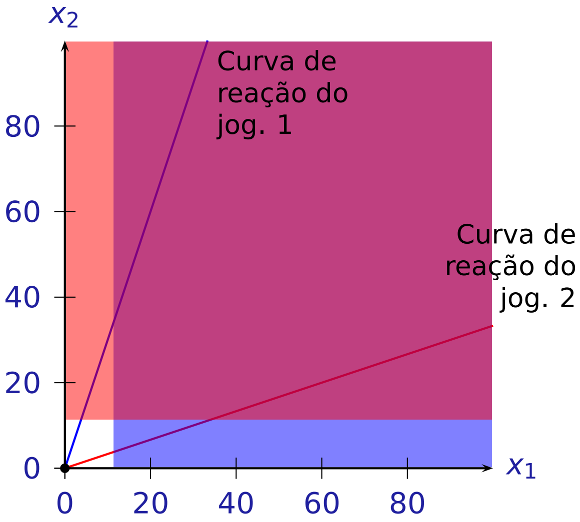
Racionalização do equilíbrio



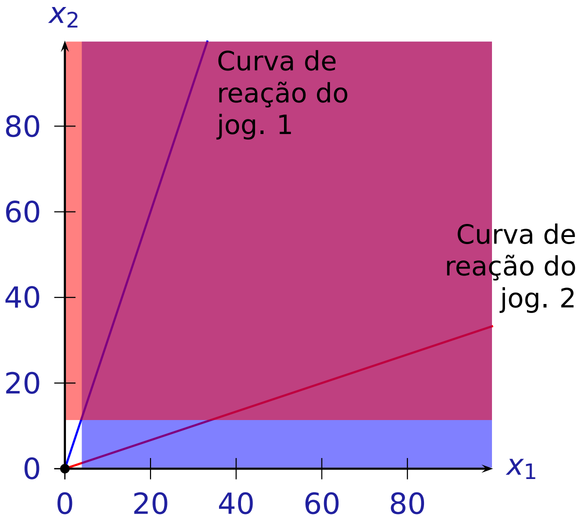
Racionalização do equilíbrio



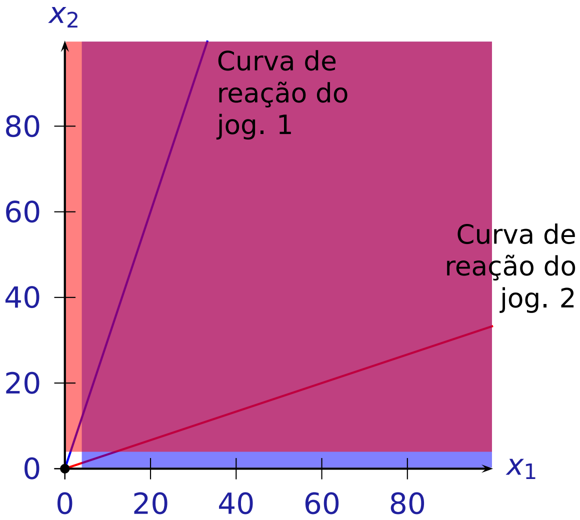
Racionalização do equilíbrio



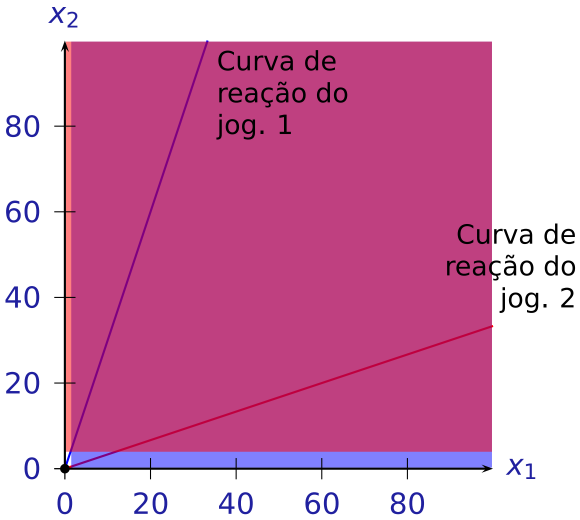
Racionalização do equilíbrio



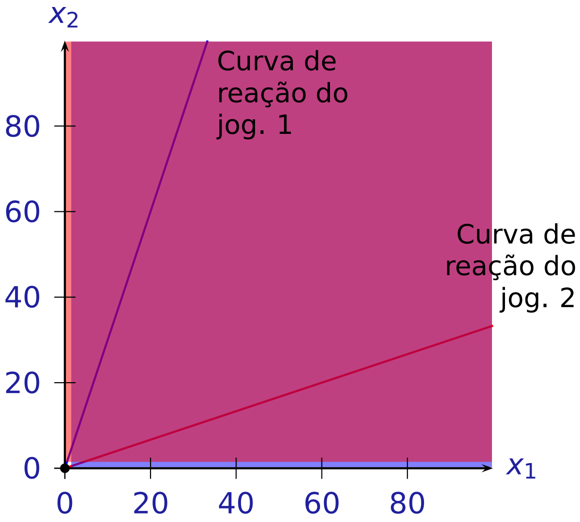
Racionalização do equilíbrio



Racionalização do equilíbrio



Racionalização do equilíbrio



O Modelo de Cournot

Duopólio de Cournot com custo marginal constante e demanda linear.

Duas empresas são as únicas a produzir um determinado bem. Cada uma delas produz com um custo médio constante igual a c. A função de demanda por esse bem é dada por $p = a - b(y_1 + y_2)$ na qual p é o preço de demanda e y_1 e y_2 são as quantidades produzidas pelas empresas 1 e 2, respectivamente.

Solução: equilíbrio de Nash

Os lucros da empresa 1, π_1, e da empresa 2, π_2, são iguais a

$$\pi_1 = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - c\,y_1$$

Solução: equilíbrio de Nash

Os lucros da empresa 1, π_1, e da empresa 2, π_2, são iguais a

$$\pi_1 = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - c\,y_1$$
$$\pi_2 = [a - b(y_1 + y_2)]y_2 - c\,y_2$$

Solução: equilíbrio de Nash

Os lucros da empresa 1, π_1, e da empresa 2, π_2, são iguais a

$$\pi_1 = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - c\,y_1$$
$$\pi_2 = [a - b(y_1 + y_2)]y_2 - c\,y_2$$

As funções de melhor resposta dessas empresas serão, portanto

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_2}{2} \tag{3}$$

Solução: equilíbrio de Nash

Os lucros da empresa 1, π_1, e da empresa 2, π_2, são iguais a

$$\pi_1 = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - c\,y_1$$
$$\pi_2 = [a - b(y_1 + y_2)]y_2 - c\,y_2$$

As funções de melhor resposta dessas empresas serão, portanto

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_2}{2} \tag{3}$$
$$y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2} \tag{4}$$

Solução: equilíbrio de Nash

Os lucros da empresa 1, π_1, e da empresa 2, π_2, são iguais a

$$\pi_1 = [a - b(y_1 + y_2)]y_1 - c\,y_1$$
$$\pi_2 = [a - b(y_1 + y_2)]y_2 - c\,y_2$$

As funções de melhor resposta dessas empresas serão, portanto

$$y_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_2}{2} \tag{3}$$
$$y_2 = \frac{a-c}{2b} - \frac{y_1}{2} \tag{4}$$

O equilíbrio de Nash é obtido quando (3) e (4) são simultaneamente verdadeiros, ou seja, quando

$$y_1 = y_2 = \frac{a-c}{3b}$$

Solução: equilíbrio de Nash (cont.)

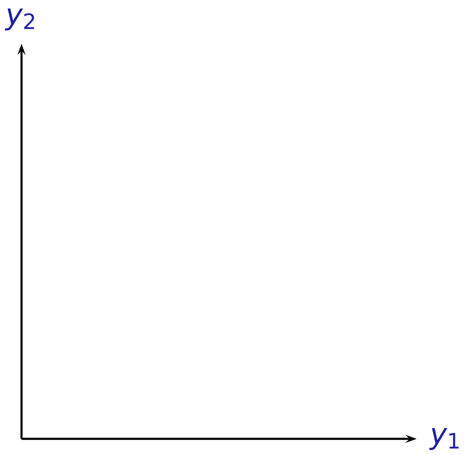
Substituindo $q_a = 3$ e $q_b = 3$ na função de demanda, obtemos o preço de equilíbrio.

$$p = a - b(y_1 + y_2) = a - 2b\frac{a-c}{3b} = \frac{a+2c}{3}$$

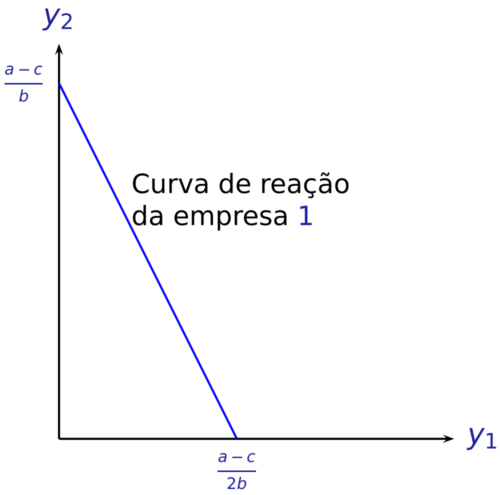
Substituindo essas valores nas expressões do lucro de cada empresa, obtemos

$$\pi_1 = \frac{a+2c}{3}\frac{a-c}{3b} - c\frac{a-c}{3b} = \frac{1}{9b}(a-c)^2$$
$$\pi_2 = \frac{a+2c}{3}\frac{a-c}{3b} - c\frac{a-c}{3b} = \frac{1}{9b}(a-c)^2$$

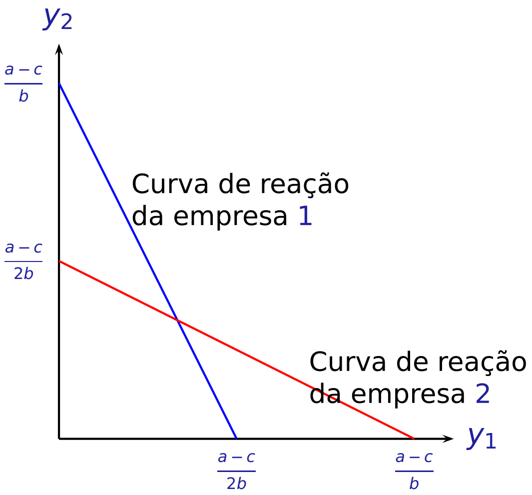
Equilíbrio de Nash: Solução Gráfica



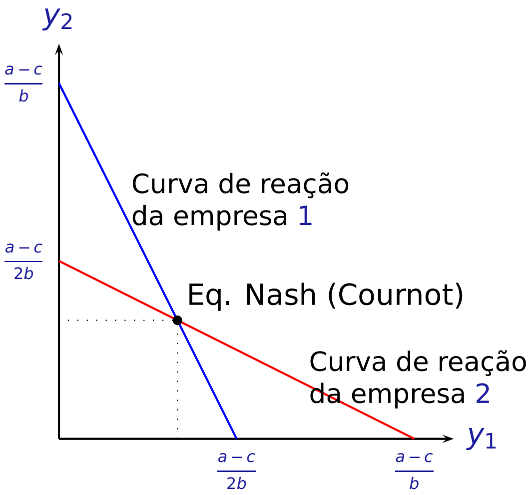
Equilíbrio de Nash: Solução Gráfica



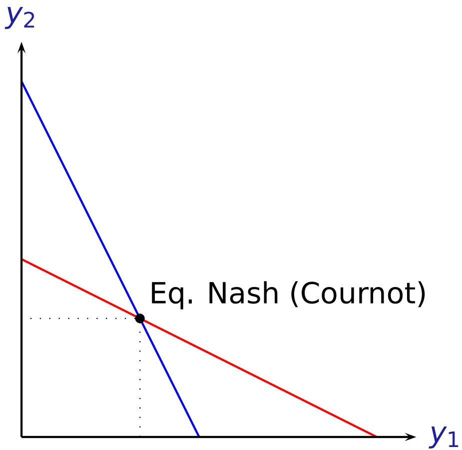
Equilíbrio de Nash: Solução Gráfica



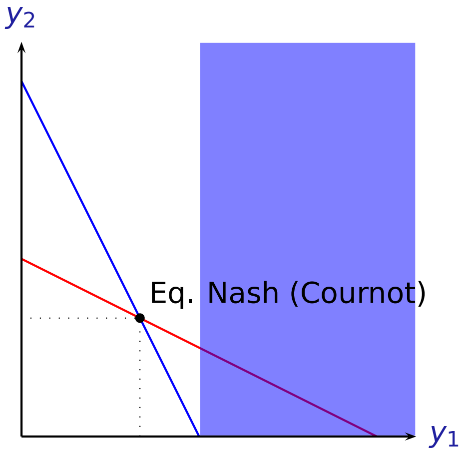
Equilíbrio de Nash: Solução Gráfica



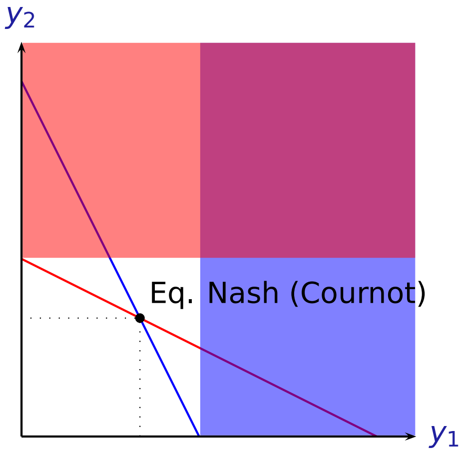
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



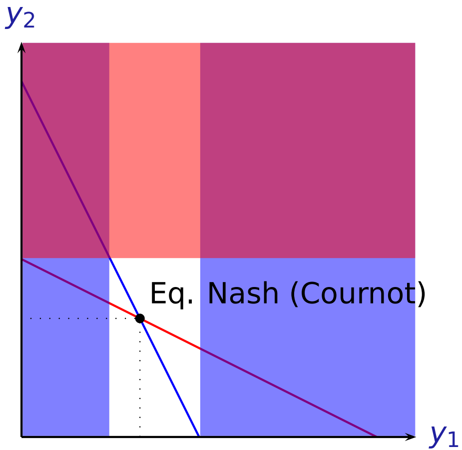
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



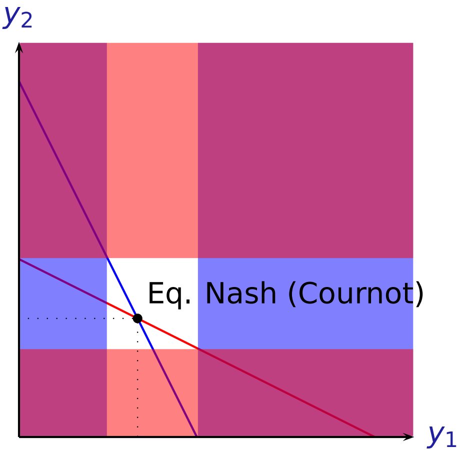
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



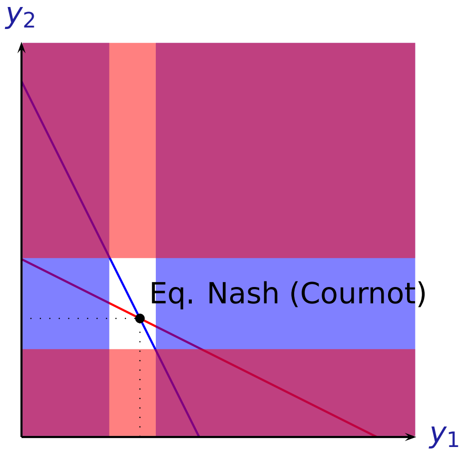
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



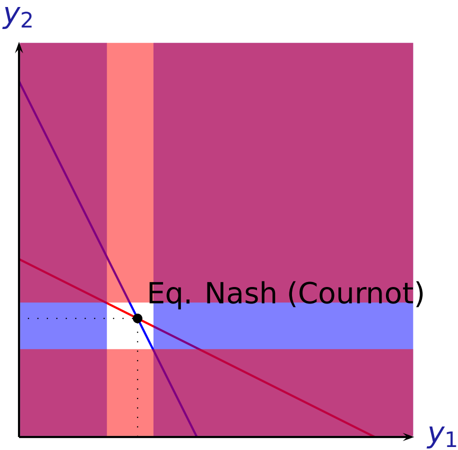
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



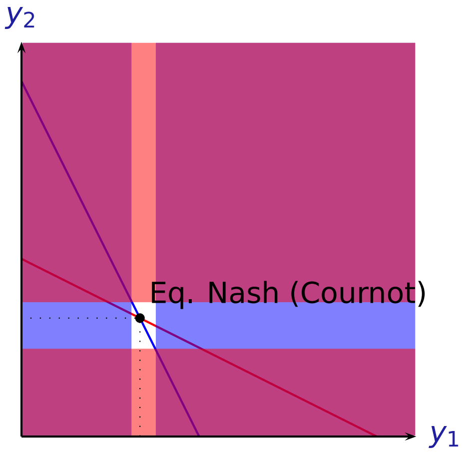
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



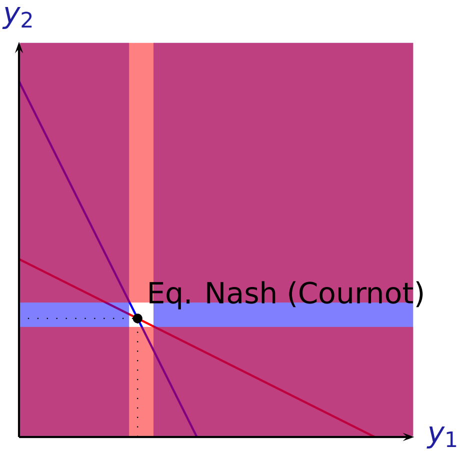
Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



Equilíbrio de Nash: racionalizando o equilíbrio



Modelo de Cournot: o caso geral

Considere agora o caso em que há n empresas, produzindo um bem homogêneo cuja função de demanda inversa é dada por

$$p = p(y)$$

com

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

sendo y_i é o produto da empresa i e a função de custo da empresa i é

$$c_i(y_i), \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Modelo de Cournot: o caso geral

Condição de equilíbrio

A empresa i deve escolher y_i de modo a maximizar seu lucro

$$p\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) y_i - c_i(y_i)$$

dado quanto é produzido pelas outras empresas. A condição de máximo de primeira ordem é

$$p + \frac{dp}{dy} y_i = c_i'(y_i)$$

Modelo de Cournot: o caso geral

Condição de equilíbrio

A empresa i deve escolher y_i de modo a maximizar seu lucro

$$p\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) y_i - c_i(y_i)$$

dado quanto é produzido pelas outras empresas. A condição de máximo de primeira ordem é

$$p + \frac{dp}{dy} y_i = c_i'(y_i)$$

$$p\left(1 + \frac{dp}{dy}\frac{y}{p}\frac{y_i}{y}\right) = c_i'(y_i)$$

Modelo de Cournot: o caso geral

Condição de equilíbrio

A empresa i deve escolher y_i de modo a maximizar seu lucro

$$p\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right) y_i - c_i(y_i)$$

dado quanto é produzido pelas outras empresas. A condição de máximo de primeira ordem é

$$p + \frac{dp}{dy} y_i = c_i'(y_i)$$

$$p\left(1 + \frac{dp}{dy}\frac{y}{p}\frac{y_i}{y}\right) = c_i'(y_i)$$

$$p = CMg_i \frac{1}{1 - \frac{s_i}{|\epsilon|}}$$

Exemplo: ANPEC 2010 – Questão 11

Considere o modelo de Cournot, em que 49 empresas produzem um produto homogêneo. A empresa i produz de acordo com a função de custo $C(q_i) = 2q_i$, em que q_i é a quantidade produzida pela empresa i, com $i = 1, \ldots, 49$. Suponha uma demanda de mercado dada por $p = 402 - 2Q$, em que p é o preço e $Q = \sum_{i=1}^{49} q_i$ é a quantidade total produzida pelas 49 empresas. Calcule a quantidade que cada empresa irá produzir no equilíbrio de Cournot.

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$
$$402 - 2Q - 2q_i = 2$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa $i, \; i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$

$$402 - 2Q - 2q_i = 2$$

$$q_i = 200 - Q$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa $i,\ i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$
\begin{aligned}
p + \frac{dp}{dQ} q_i &= CMg_i \\
402 - 2Q - 2q_i &= 2 \\
q_i &= 200 - Q
\end{aligned}
$$

Isso implica $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q^* = 200 - Q$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa $i,\ i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$
$$402 - 2Q - 2q_i = 2$$
$$q_i = 200 - Q$$

Isso implica $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q^* = 200 - Q$ e

$$Q = \sum_{i=1}^{49} q_i = 49\, q^*.$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa $i,\ i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$
$$402 - 2Q - 2q_i = 2$$
$$q_i = 200 - Q$$

Isso implica $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q^* = 200 - Q$ e

$$Q = \sum_{i=1}^{49} q_i = 49\, q^*.$$

Assim,

$$q^* = 200 - 49\, q^*$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa $i,\ i = 1, 2, \ldots, 49$, é

$$
\begin{aligned}
p + \frac{dp}{dQ} q_i &= CMg_i \\
402 - 2Q - 2q_i &= 2 \\
q_i &= 200 - Q
\end{aligned}
$$

Isso implica $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q^* = 200 - Q$ e

$$Q = \sum_{i=1}^{49} q_i = 49\, q^*.$$

Assim,

$$q^* = 200 - 49\, q^* \Rightarrow q^* = 4$$

Exemplo: ANPEC 2009 – Questão 13

Considere uma indústria com 35 firmas, todas com a mesma função de custo dada por $c(q_i) = 2q_i$, em que q_i é a produção da firma i ($i = 1, \ldots, 35$). Defina $Q = \sum_{i=1}^{3} 5q_i$. A demanda de mercado é dada por $p(Q) = 362 - 2Q$. Supondo que as firmas se comportam como no modelo de Cournot e dado que elas são idênticas, cada firma produzirá a mesma quantidade q^*. Determine q^*.

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 35$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 35$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$
$$362 - 2Q - 2q_i = 2$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 35$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$
$$362 - 2Q - 2q_i = 2$$
$$q_i = 180 - Q$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \dots, 35$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$
$$362 - 2Q - 2q_i = 2$$
$$q_i = 180 - Q$$

Isso implica $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q^* = 180 - Q$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa i, $i = 1, 2, \ldots, 35$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$
$$362 - 2Q - 2q_i = 2$$
$$q_i = 180 - Q$$

Isso implica $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q^* = 180 - Q$ e

$$Q = \sum_{i=1}^{35} q_i = 35\, q^*.$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa $i,\ i = 1, 2, \ldots, 35$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$
$$362 - 2Q - 2q_i = 2$$
$$q_i = 180 - Q$$

Isso implica $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q^* = 180 - Q$ e

$$Q = \sum_{i=1}^{35} q_i = 35\, q^*.$$

Assim,

$$q^* = 180 - 35\, q^*$$

Solução

A condição de equilíbrio da empresa $i,\ i = 1, 2, \dots, 35$, é

$$p + \frac{dp}{dQ} q_i = CMg_i$$
$$362 - 2Q - 2q_i = 2$$
$$q_i = 180 - Q$$

Isso implica $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q^* = 180 - Q$ e

$$Q = \sum_{i=1}^{35} q_i = 35\, q^*.$$

Assim,

$$q^* = 180 - 35\, q^* \Rightarrow q^* = 5$$

O Modelo de Bertrand

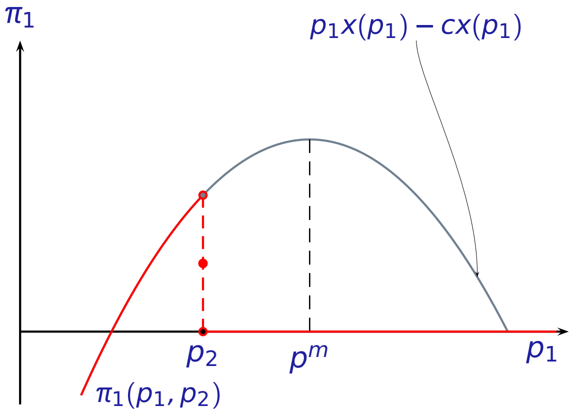
Hipóteses

- Duas empresas (1 e 2), cada uma deve escolher o preço de seu produto (p_1 e p_2).
- Produto Homogêneo
- Produção com rendimentos constantes de escala e custo médio constante igual a c
- Funções de demanda

$$\begin{bmatrix} x_1(p_1,p_2) \\ x_2(p_1,p_2) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} x(p_1) \\ 0 \end{bmatrix} & \text{caso} \quad p_1 < p_2 \\ \begin{bmatrix} x(p_1)/2 \\ x(p_2)/2 \end{bmatrix} & \text{caso} \quad p_1 = p_2 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ x(p_2) \end{bmatrix} & \text{caso} \quad p_1 > p_2 \end{cases}$$

O Modelo de Bertrand

A função de lucro da empresa 1



Modelo de Bertrand

"Funções" de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) =$$

$$\begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ & \\ & \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

“Funções” de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) =$$

$$\begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ & \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

“Funções” de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) =$$
$$\begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

"Funções" de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

“Funções” de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) =$$

$$\begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Empresa 2

$$p_2(p_1) =$$

$$\begin{cases} \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

“Funções” de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Empresa 2

$$p_2(p_1) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_1 > p_m \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

“Funções” de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Empresa 2

$$p_2(p_1) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_1 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_1 \leq p_m \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

"Funções" de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Empresa 2

$$p_2(p_1) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_1 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_1 \leq p_m \\ p_2 \geq c & \text{se } p_1 = c \\ & \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

“Funções” de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Empresa 2

$$p_2(p_1) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_1 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_1 \leq p_m \\ p_2 \geq c & \text{se } p_1 = c \\ p_2 > p_1 & \text{se } p_1 < c \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

“Funções” de reação e equilíbrio de Nash

Empresa 1

$$p_1(p_2) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_2 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_2 \leq p_m \\ p_1 \geq c & \text{se } p_2 = c \\ p_1 > p_2 & \text{se } p_2 < c \end{cases}$$

Empresa 2

$$p_2(p_1) = \begin{cases} p_m & \text{se } p_1 > p_m \\ ? & \text{se } c < p_1 \leq p_m \\ p_2 \geq c & \text{se } p_1 = c \\ p_2 > p_1 & \text{se } p_1 < c \end{cases}$$

Equilíbrio de Nash

$$p_1 = p_2 = c$$

Bertrand com diferenciação de produto

Exemplo: ANPEC 2006 – Questão 14

Duopolistas, denominados A e B, concorrem em um mercado com produtos diferenciados por meio da escolha de preços. Os dois determinam seus preços simultaneamente, configurando um equilíbrio de Nash. São dadas as funções:
Demanda: $q_A = 21 - p_A + p_B \quad \text{e} \quad q_B = 20 - 2p_B + p_A$ Custos:
$C_A(q_A) = q_A + 175 \quad \text{e} \quad C_B(q_B) = 2q_B + 100$
em que q_A e q_B são as quantidades e p_A e p_B os preços dos produtos de A e B, respectivamente. Pede-se: o somatório dos lucros das duas empresas.

Bertrand com diferenciação de produto

Exemplo: ANPEC 2006 – Questão 14

Duopolistas, denominados A e B, concorrem em um mercado com produtos diferenciados por meio da escolha de preços. Os dois determinam seus preços simultaneamente, configurando um equilíbrio de Nash. São dadas as funções: Demanda: $q_A = 21 - p_A + p_B \quad \text{e} \quad q_B = 20 - 2p_B + p_A$ Custos: $C_A(q_A) = q_A + 175 \quad \text{e} \quad C_B(q_B) = 2q_B + 100$
em que q_A e q_B são as quantidades e p_A e p_B os preços dos produtos de A e B, respectivamente. Pede-se: o somatório dos lucros das duas empresas.

Resposta: 78

Sumário

1 Introdução

2 Jogos na forma extensiva

3 Jogos na forma estratégica

4 Equilíbrio de Nash e jogos sequenciais
- Subjogos

5 Jogos com repetição

6 Estratégias mistas

7 Exercícios

Exemplo: jogo da escolha de capacidade.

Ver forma extensiva

Representação estratégica

A \ B	GG	GP	PP	PG
G	−100, −100	−100, −100	600, 100	600, 100
P	100, 600	200, 200	200, 200	100, 600

Exemplo: jogo da escolha de capacidade.

Ver forma extensiva

Representação estratégica

B

A		GG	GP	PP	PG
	G	−100, −100	−100, −100	600, 100	600, 100
	P	100, 600 (*A*)	200, 200	200, 200	100, 600

Exemplo: jogo da escolha de capacidade.

Ver forma extensiva

Representação estratégica

		B			
		GG	**GP**	**PP**	**PG**
A	**G**	$-100, -100$	$-100, -100$	$600, 100$	$600, 100$
	P	$100, \overset{A}{600}$	$200, \overset{A}{200}$	$200, 200$	$100, 600$

Exemplo: jogo da escolha de capacidade.

Ver forma extensiva

Representação estratégica

A \ B	GG	GP	PP	PG
G	−100, −100	−100, −100	600, $\overset{A}{100}$	600, 100
P	100, $\overset{A}{600}$	200, $\overset{A}{200}$	200, 200	100, 600

Exemplo: jogo da escolha de capacidade.

Ver forma extensiva

Representação estratégica

		B			
		GG	**GP**	**PP**	**PG**
A	**G**	−100, −100	−100, −100	600, $\overset{A}{100}$	600, $\overset{A}{100}$
	P	100, $\overset{A}{600}$	200, $\overset{A}{200}$	200, 200	100, 600

Exemplo: jogo da escolha de capacidade.

Ver forma extensiva

Representação estratégica

		B			
		GG	GP	PP	PG
A	G	$-100, -100$	$-100, -100$	$600, \overset{A,B}{100}$	$600, \overset{A,B}{100}$
	P	$100, \overset{A}{600}$	$200, \overset{A}{200}$	$200, 200$	$100, 600$

Exemplo: jogo da escolha de capacidade.

Ver forma extensiva

Representação estratégica

		B			
		GG	**GP**	**PP**	**PG**
A	**G**	−100, −100	−100, −100	*A,B* 600, 100	*A,B* 600, 100
	P	*A,B* 100, 600	*A* 200, 200	200, 200	*B* 100, 600

Exemplo: jogo da escolha de capacidade.

Ver forma extensiva

Representação estratégica

		B: GG	GP	PP	PG
A	G	−100, −100	−100, −100	600, 100 [A,B]	600, 100 [A,B]
	P	100, 600 [A,B]	200, 200 [A]	200, 200	100, 600 [B]

Equilíbrios de Nash

São três: $\{G, PP\}$, $\{G, PG\}$ e $\{P, GG\}$, mas apenas $\{G, PG\}$ é compatível com o princípio de indução retroativa.

Rever a solução por ind. retroativa.

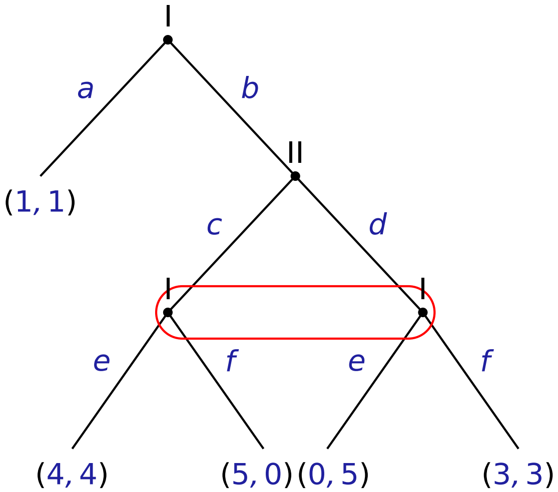
Subjogos

Definição:

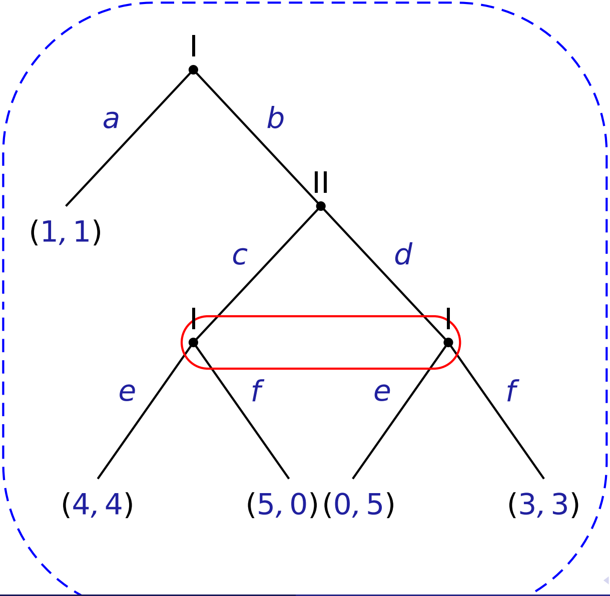
Um subjogo é uma parte de um jogo em forma extensiva com as seguintes propriedades:

1. Começa com um conjunto de informação contendo um único nó de decisão e contém todos os nós que são seus sucessores (imediatos ou não) e apenas esses nós.
2. Se um nó x faz parte de um conjunto de informação H e também faz parte de um subjogo, então todos os nodos de H também fazem parte desse subjogo.

Exemplo

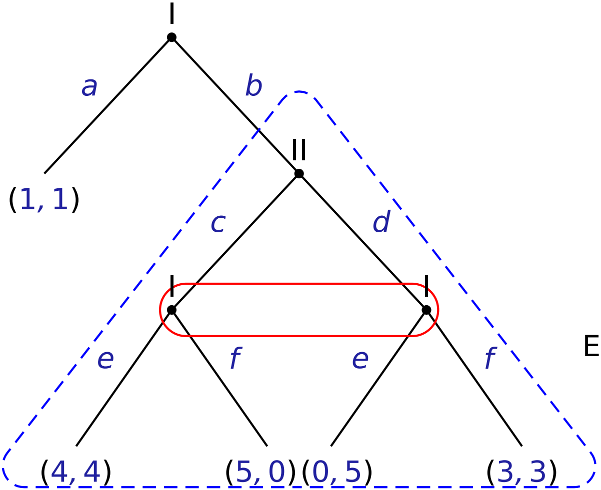


Exemplo



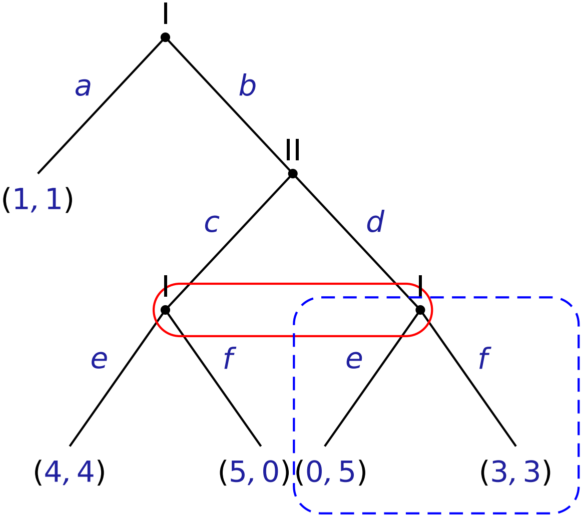
O jogo todo é um subjogo

Exemplo



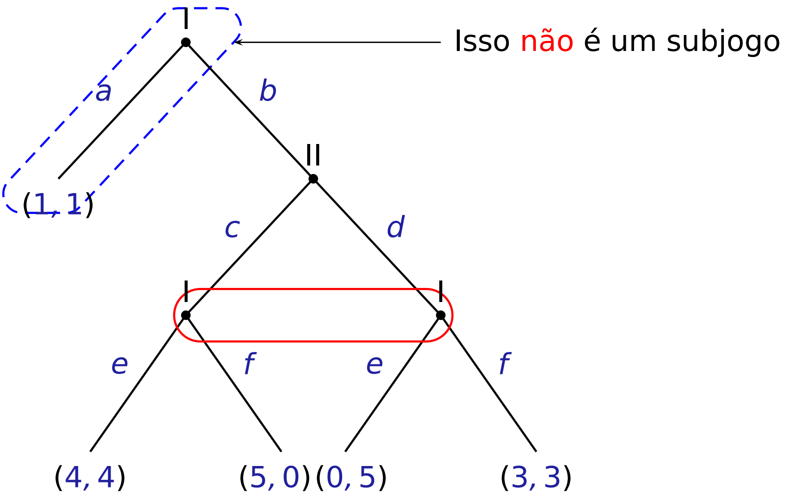
Esse é outro subjogo

Exemplo



Isso não é um subjogo

Exemplo

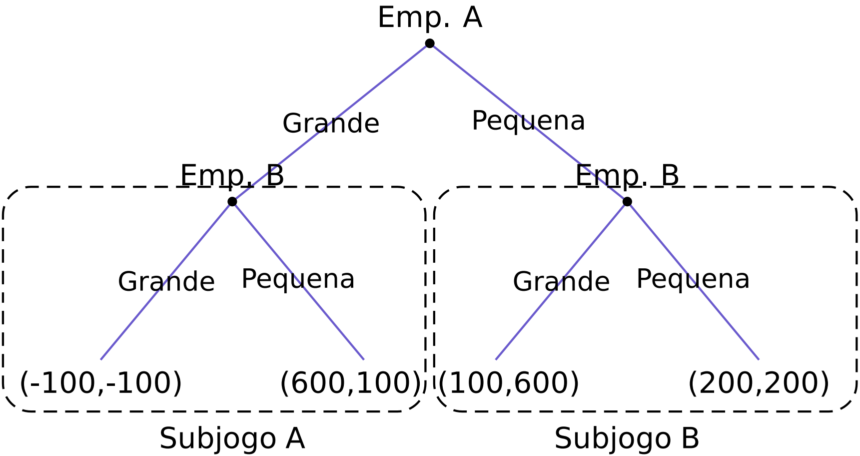


Equilíbrio de Nash perfeito de subjogos

Definição

Uma combinação de estratégias é um equilíbrio de Nash perfeito de subjogos de um jogo caso ela induza um equilíbrio de Nash em todos os subjogos desse jogo.

Exemplo:
O Jogo da escolha de capacidade



Exemplo

Análise dos equilíbrios de Nash

P & GG Induz equilíbrio de Nash no jogo e no subjogo B, mas não no subjogo A.

Exemplo

Análise dos equilíbrios de Nash

P & GG Induz equilíbrio de Nash no jogo e no subjogo B, mas não no subjogo A.

G & PP Induz equilíbrio de Nash no jogo e no subjogo A, mas não no subjogo B.

Exemplo

Análise dos equilíbrios de Nash

P & GG Induz equilíbrio de Nash no jogo e no subjogo B, mas não no subjogo A.

G & PP Induz equilíbrio de Nash no jogo e no subjogo A, mas não no subjogo B.

G & PG Induz equilíbrio de Nash no jogo, no subjogo A e no subjogo B. Logo, é o único equilíbrio de Nash perfeito de subjogos.

Sumário

1. Introdução
2. Jogos na forma extensiva
3. Jogos na forma estratégica
4. Equilíbrio de Nash e jogos sequenciais
5. **Jogos com repetição**
   - Cartel
6. Estratégias mistas
7. Exercícios

Exemplo:Dilema dos prisioneiros com repetição

- Considere um jogo do tipo dilema dos prisioneiros jogado mais de uma vez.

Exemplo:Dilema dos prisioneiros com repetição

- Considere um jogo do tipo dilema dos prisioneiros jogado mais de uma vez.
- A repetição do jogo pode induzir à cooperação entre os jogadores, pois possibilita que o comportamento não cooperativo por parte de um jogador em uma repetição seja punido pelo outro jogador na repetição seguinte.

Exemplo:Dilema dos prisioneiros com repetição

- Considere um jogo do tipo dilema dos prisioneiros jogado mais de uma vez.
- A repetição do jogo pode induzir à cooperação entre os jogadores, pois possibilita que o comportamento não cooperativo por parte de um jogador em uma repetição seja punido pelo outro jogador na repetição seguinte.
- Se o jogo é jogado um número finito e definido de vezes, pelo princípio da indução retroativa, não haverá cooperação.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Algumas possíveis estratégias

- Estratégia **bonzinho**: sempre cooperar.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Algumas possíveis estratégias

- Estratégia **bonzinho**: sempre cooperar.
- Estratégia **malvado**: nunca cooperar.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Algumas possíveis estratégias

- Estratégia **bonzinho**: sempre cooperar.
- Estratégia **malvado**: nunca cooperar.
- Estratégia **trigger**: começar cooperando. Se o outro jogador deixar de cooperar em algum momento, nunca mais cooperar.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Algumas possíveis estratégias

- Estratégia **bonzinho**: sempre cooperar.
- Estratégia **malvado**: nunca cooperar.
- Estratégia **trigger**: começar cooperando. Se o outro jogador deixar de cooperar em algum momento, nunca mais cooperar.
- Estratégia **tit-for-tat**: cooperar na primeira rodada. Nas outras rodadas repetir a estratégia do outro jogador na rodada anterior.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.
- Ambos escolhem a estratégia trigger.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.
- Ambos escolhem a estratégia trigger.
- Ambos escolhem a estratégia tit-for-tat.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.
- Ambos escolhem a estratégia trigger.
- Ambos escolhem a estratégia tit-for-tat.
- Um jogador escolhe tit-for-tat e o outro escolhe trigger.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.
- Ambos escolhem a estratégia trigger.
- Ambos escolhem a estratégia tit-for-tat.
- Um jogador escolhe tit-for-tat e o outro escolhe trigger.

Não são equilíbrios de Nash

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.
- Ambos escolhem a estratégia trigger.
- Ambos escolhem a estratégia tit-for-tat.
- Um jogador escolhe tit-for-tat e o outro escolhe trigger.

Não são equilíbrios de Nash

- Ambos escolhem a estratégia bonzinho.

Exemplo: dilema dos prisioneiros com repetição

Alguns equilíbrios de Nash (supondo baixa taxa de desconto):

- Ambos escolhem a estratégia malvado.
- Ambos escolhem a estratégia trigger.
- Ambos escolhem a estratégia tit-for-tat.
- Um jogador escolhe tit-for-tat e o outro escolhe trigger.

Não são equilíbrios de Nash

- Ambos escolhem a estratégia bonzinho.
- Um jogador joga tit-for-tat (ou trigger) e o outro malvado.

O experimento de Robert Axelrod

Robert Axelrod é um cientista político da Universidade de Michigan. Ele pediu a diversos especialistas em teoria dos jogos que enviassem suas estratégias favoritas em um jogo do tipo dilema dos prisioneiros com repetição. Em um computador, ele simulou os resultados desse jogo confrontando todas as estratégias duas a duas. A estratégia com melhor performance foi a tit-for-tat.

Cartel em um jogo sem repetição

Um modelo

- n empresas produzem um produto homogêneo. As quantidades produzidas são y_i e as funções de custo são $c_i(y_i)$ ($i = 1, \dots, n$).
- A demanda inversa pelo produto é dada por $p(y)$ na qual $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$

Cartel em um jogo sem repetição

Um modelo

- n empresas produzem um produto homogêneo. As quantidades produzidas são y_i e as funções de custo são $c_i(y_i)$ ($i = 1, \ldots, n$).
- A demanda inversa pelo produto é dada por $p(y)$ na qual $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$

Objetivo do Cartel

$$\max_{y_1,\ldots,y_n} p(y)y - \sum_{i=1}^{n} c_i(y_i)$$

$$\text{com} \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Cartel em um jogo sem repetição

Condição de lucro máximo

$$p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy} y^* \leq \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} \quad j = 1, \ldots, n$$

Com igualdade caso $y_i^* > 0$, sendo $y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^*$

Cartel em um jogo sem repetição

Condição de lucro máximo

$$p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy} y^* \leq \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} \quad j = 1, \ldots, n$$

Com igualdade caso $y_i^* > 0$, sendo $y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^*$

Uma interpretação

Caso tenhamos $y_j^* > 0$ e $y_k^* > 0$, então

$$\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = \frac{dc_k(y_k^*)}{dy_k}$$

Cartel em um jogo sem repetição

Condição de lucro máximo

$$p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy} y^* \leq \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} \quad j = 1, \ldots, n$$

Com igualdade caso $y_i^* > 0$, sendo $y^* = \sum_{i=1}^{n} y_i^*$

Uma interpretação

Caso tenhamos $y_j^* > 0$ e $y_k^* > 0$, então

$$\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = \frac{dc_k(y_k^*)}{dy_k} \quad \text{ou} \quad CMg_j(y_j^*) = CMg_k(y_k^*)$$

Cartel em um jogo sem repetição
Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

Cartel em um jogo sem repetição
Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

$$\frac{\partial \pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy} y_j^* - \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j}$$

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

$$\frac{\partial\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy} y_j^* - \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j}$$

A condição de ótimo é $\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy} y^*$. Logo,

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

$$\frac{\partial\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y_j^* - \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j}$$

A condição de ótimo é $\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y^*$. Logo,

$$\frac{\partial\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = \frac{dp(y^*)}{dy}(y_j^* - y^*)$$

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

$$\frac{\partial\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y_j^* - \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j}$$

A condição de ótimo é $\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y^*$. Logo,

$$\frac{\partial\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = \underbrace{\frac{dp(y^*)}{dy}}_{<0}(y_j^* - y^*)$$

Cartel em um jogo sem repetição

Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

$$\frac{\partial\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y_j^* - \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j}$$

A condição de ótimo é $\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y^*$. Logo,

$$\frac{\partial\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = \underbrace{\frac{dp(y^*)}{dy}}_{<0}\underbrace{(y_j^* - y^*)}_{<0}$$

Cartel em um jogo sem repetição
Instabilidade do Cartel

O lucro da empresa j no cartel é

$$\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*) = p(y^*)y_j^* - c_j(y_j^*)$$

Será vantajoso burlar o cartel caso $\partial\pi(y_1^*, \ldots, y_n^*)/\partial y_j > 0$.

$$\frac{\partial\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y_j^* - \frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j}$$

A condição de ótimo é $\frac{dc_j(y_j^*)}{dy_j} = p(y^*) + \frac{dp(y^*)}{dy}y^*$. Logo,

$$\frac{\partial\pi_j(y_1^*, \ldots, y_n^*)}{\partial y_j} = \underbrace{\frac{dp(y^*)}{dy}}_{<0}\underbrace{(y_j^* - y^*)}_{<0} > 0$$

Formação de cartel em um jogo com repetição

Termos

- $\pi_i^* =$ lucro da empresa i no cartel.
- $\widehat{\pi}_{i0} =$ Lucro imediato da empresa i caso ela abandone o cartel.
- $\widehat{\pi}_i =$ Lucro posterior da empresa i caso ela abandone o cartel.
- $r_i =$ taxa de desconto da empresa i

Formação de cartel em um jogo com repetição

Termos

- $\pi_i^* =$ lucro da empresa i no cartel.
- $\widehat{\pi}_{i0} =$ Lucro imediato da empresa i caso ela abandone o cartel.
- $\widehat{\pi}_i =$ Lucro posterior da empresa i caso ela abandone o cartel.
- $r_i =$ taxa de desconto da empresa i

Condição para a estabilidade do cartel

$$\widehat{\pi}_{i0} - \pi_i^* \leq \frac{\pi_i^* - \widehat{\pi}_i}{r_i}$$

Exemplo:

- Duas empresas produzem um produto homogêneo com custo médio constante igual a c. Suas produções serão notadas por y_1 e y_2.
- A função de demanda é dada por $p(y) = a - by$ na qual $y = y_1 + y_2$.

Exemplo:

- Duas empresas produzem um produto homogêneo com custo médio constante igual a c. Suas produções serão notadas por y_1 e y_2.
- A função de demanda é dada por $p(y) = a - by$ na qual $y = y_1 + y_2$.

Equilíbrio de Cournot

Em cada período teremos

$$y_1 = y_2 = \frac{a-c}{3b}$$

e

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{9}\frac{(a-c)^2}{b}$$

Exemplo:

- Duas empresas produzem um produto homogêneo com custo médio constante igual a c. Suas produções serão notadas por y_1 e y_2.
- A função de demanda é dada por $p(y) = a - by$ na qual $y = y_1 + y_2$.

Equilíbrio de Cournot

Em cada período teremos

$$y_1 = y_2 = \frac{a-c}{3b}$$

e

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{9}\frac{(a-c)^2}{b}$$

Solução de Cartel

Em cada período teremos

$$y_1 = y_2 = \frac{a-c}{4b}$$

e

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b}$$

Exemplo (cont)

Melhor ganho ao burlar o cartel

$$\max_{y_1} \left[a - b \left(y_1 + \frac{a-c}{4b} \right) \right] y_1 - c y_1$$

Exemplo (cont)

Melhor ganho ao burlar o cartel

$$\max_{y_1}\left[a-b\left(y_1+\frac{a-c}{4b}\right)\right]y_1-cy_1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\widehat{y_1}_0=\dfrac{5}{8}\dfrac{a-c}{b}\\[2ex]\widehat{\pi_1}_0=\dfrac{9}{64}\dfrac{(a-c)^2}{b}\end{cases}$$

Exemplo (cont)

Estabilidade do cartel

Suponha que a empresa 2 jogue a seguinte estratégia do gatilho: começa produzindo a quantidade de Cartel. Caso a empresa 1 não faça o mesmo, ela passa a produzir a quantidade de Cournot. Nesse caso a condição de estabilidade do cartel será

$$\frac{9}{64}\frac{(a-c)^2}{b} - \frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b} \leq \frac{1}{r}\left(\frac{1}{8}\frac{(a-c)^2}{b} - \frac{1}{9}\frac{(a-c)^2}{b}\right)$$

Isso ocorrerá caso

$$r \leq \frac{8}{9} \approx 88,89\%$$

Sumário

1. Introdução
2. Jogos na forma extensiva
3. Jogos na forma estratégica
4. Equilíbrio de Nash e jogos sequenciais
5. Jogos com repetição
6. **Estratégias mistas**
7. Exercícios

Estratégias mistas

Definição

Dizemos que um jogador escolhe uma estratégia mista quando ele sorteia a estratégia que irá adotar com probabilidades por ele definida.

Estratégias mistas

Definição

Dizemos que um jogador escolhe uma estratégia mista quando ele sorteia a estratégia que irá adotar com probabilidades por ele definida.

Equilíbrio de Nash com estratégias mistas

Quando cada jogador escolheu uma estratégia mista que maximiza seu payoff esperado dada estratégia mista adotada pelo outro jogador, dizemos que ocorreu um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Exemplo

Exemplo: Batalha dos Sexos

Ele

		Ballet	Futebol
Ela	**Ballet**	2, 1	0, 0
	Futebol	0, 0	1, 2

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Exemplo

Exemplo: Batalha dos Sexos

		Ele	
		Ballet	**Futebol**
Ela	**Ballet**	$2, 1^{♀}$	$0, 0$
	Futebol	$0, 0$	$1, 2$

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Exemplo

Exemplo: Batalha dos Sexos

Ele

		Ballet	Futebol
Ela	**Ballet**	2, 1 ♀	0, 0
	Futebol	0, 0	1, 2 ♀

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Exemplo

Exemplo: Batalha dos Sexos

		Ele	
		Ballet	**Futebol**
Ela	**Ballet**	$2, 1^{♀, ♂}$	$0, 0$
	Futebol	$0, 0$	$1, 2^{♀}$

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Exemplo

Exemplo: Batalha dos Sexos

		Ele	
		Ballet	**Futebol**
Ela	**Ballet**	2, 1 ♀, ♂	0, 0
	Futebol	0, 0	1, 2 ♀, ♂

♀ **Escolha dela é melhor resposta.**

♂ **Escolha dele é melhor resposta.**

Exemplo (continuação)

payoffs esperados

- Sejam π_1 e π_2 as probabilidades com que ela e ele, respectivamente escolhem ballet.
- O *payoff* esperado dela será

$$2\pi_1\pi_2 + (1-\pi_1)(1-\pi_2) = (3\pi_2 - 1)\pi_1 + 1 - \pi_2$$

- O *payoff* esperado dele será

$$\pi_1\pi_2 + 2(1-\pi_1)(1-\pi_2) = (3\pi_1 - 2)\pi_2 + 2 - 2\pi_1$$

Exemplo (continuação)

Funções de melhor resposta

Ela: $\pi_1(\pi_2)$

Exemplo (continuação)

Funções de melhor resposta

$$\text{Ela:} \quad \pi_1(\pi_2) = \begin{cases} 0 & \text{caso} \quad \pi_2 < \frac{1}{3} \\ & \\ & \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Funções de melhor resposta

$$\text{Ela:} \quad \pi_1(\pi_2) = \begin{cases} 0 & \text{caso} \quad \pi_2 < \frac{1}{3} \\ [0,1] & \text{caso} \quad \pi_2 = \frac{1}{3} \\ & \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Funções de melhor resposta

$$\text{Ela:} \quad \pi_1(\pi_2) = \begin{cases} 0 & \text{caso} \quad \pi_2 < \frac{1}{3} \\ [0,1] & \text{caso} \quad \pi_2 = \frac{1}{3} \\ 1 & \text{caso} \quad \pi_2 > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Funções de melhor resposta

$$\text{Ela:}\quad \pi_1(\pi_2) = \begin{cases} 0 & \text{caso} \quad \pi_2 < \dfrac{1}{3} \\ [0,1] & \text{caso} \quad \pi_2 = \dfrac{1}{3} \\ 1 & \text{caso} \quad \pi_2 > \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ele:}\quad \pi_2(\pi_1) =$$

Exemplo (continuação)
Funções de melhor resposta

$$\text{Ela:} \quad \pi_1(\pi_2) = \begin{cases} 0 & \text{caso} \quad \pi_2 < \dfrac{1}{3} \\ [0,1] & \text{caso} \quad \pi_2 = \dfrac{1}{3} \\ 1 & \text{caso} \quad \pi_2 > \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ele:} \quad \pi_2(\pi_1) = \begin{cases} 0 & \text{caso} \quad \pi_1 < \dfrac{2}{3} \\ & \\ & \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Funções de melhor resposta

$$\text{Ela:} \quad \pi_1(\pi_2) = \begin{cases} 0 & \text{caso} \quad \pi_2 < \frac{1}{3} \\ [0,1] & \text{caso} \quad \pi_2 = \frac{1}{3} \\ 1 & \text{caso} \quad \pi_2 > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ele:} \quad \pi_2(\pi_1) = \begin{cases} 0 & \text{caso} \quad \pi_1 < \frac{2}{3} \\ [0,1] & \text{caso} \quad \pi_1 = \frac{2}{3} \\ & \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

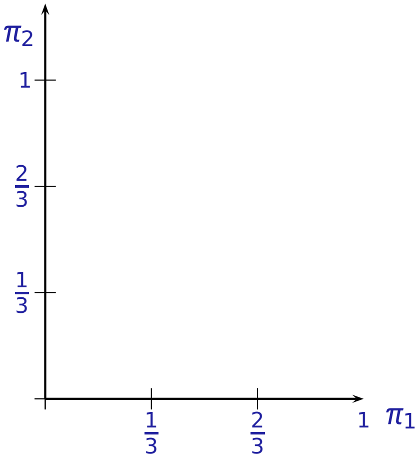
Funções de melhor resposta

$$\text{Ela:} \quad \pi_1(\pi_2) = \begin{cases} 0 & \text{caso} \quad \pi_2 < \frac{1}{3} \\ [0,1] & \text{caso} \quad \pi_2 = \frac{1}{3} \\ 1 & \text{caso} \quad \pi_2 > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ele:} \quad \pi_2(\pi_1) = \begin{cases} 0 & \text{caso} \quad \pi_1 < \frac{2}{3} \\ [0,1] & \text{caso} \quad \pi_1 = \frac{2}{3} \\ 1 & \text{caso} \quad \pi_1 > \frac{2}{3} \end{cases}$$

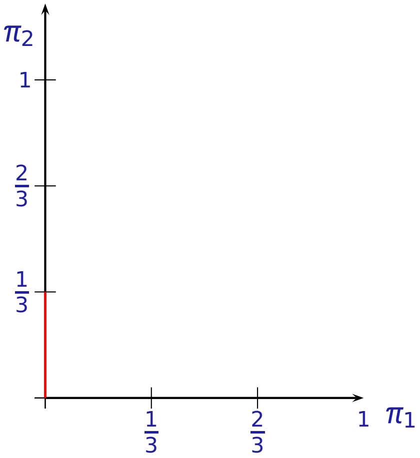
Exemplo

Equilíbrios de Nash c/ estratégias mistas



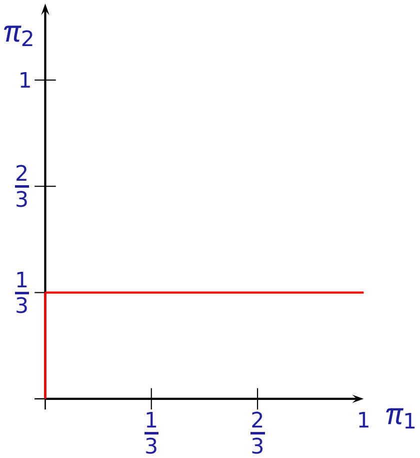
Exemplo

Equilíbrios de Nash c/ estratégias mistas



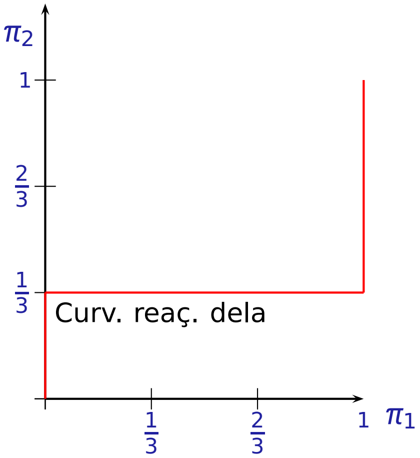
Exemplo

Equilíbrios de Nash c/ estratégias mistas



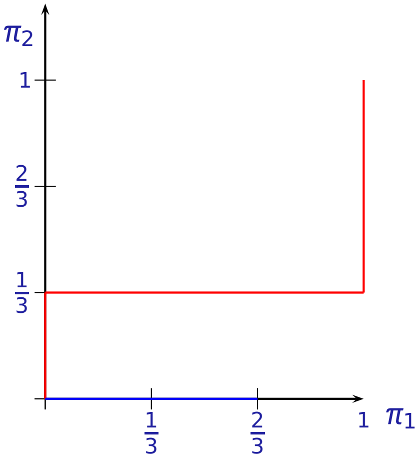
Exemplo

Equilíbrios de Nash c/ estratégias mistas



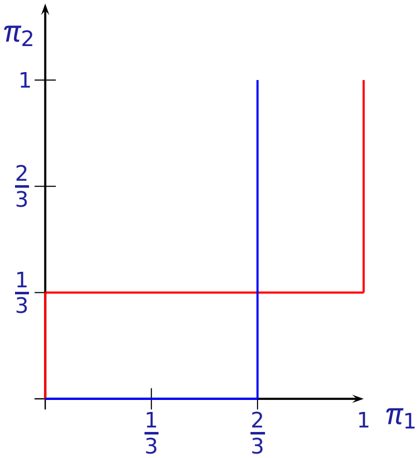
Exemplo

Equilíbrios de Nash c/ estratégias mistas



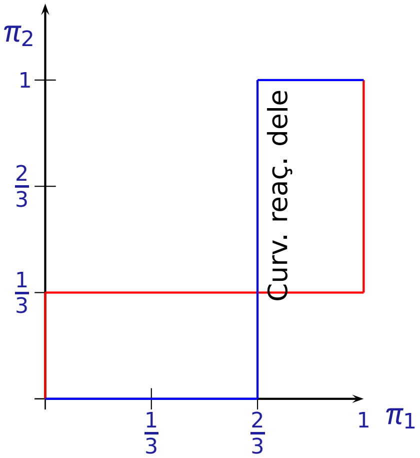
Exemplo

Equilíbrios de Nash c/ estratégias mistas



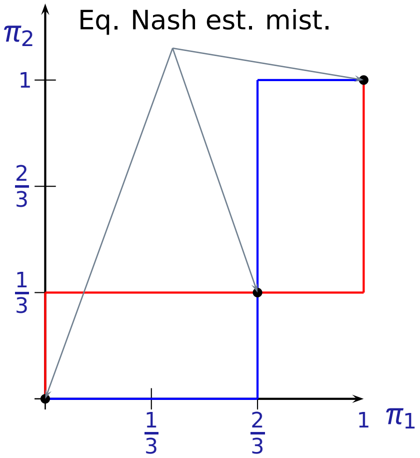
Exemplo

Equilíbrios de Nash c/ estratégias mistas



Exemplo

Equilíbrios de Nash c/ estratégias mistas



Exemplo

Dois jogadores e duas estratégias: o caso geral

		B	
		$B1$	$B2$
A	$A1$	a_{11}, b_{11}	a_{12}, b_{12}
	$A2$	a_{21}, b_{21}	a_{22}, b_{22}

Sejam π_A probabilidade com que A escolhe $A1$ e π_B a probabilidade com que B escolhe B_1, os ganhos esperados serão:

A: $\pi_A[\pi_B a_{11} + (1 - \pi_B)a_{12}] + (1 - \pi_A)[\pi_B a_{21} + (1 - \pi_B)a_{22}]$

B: $\pi_B[\pi_A b_{11} + (1 - \pi_A)b_{21}] + (1 - \pi_B)[\pi_A b_{12} + (1 - \pi_A)b_{22}]$

Exemplo

Dois jogadores e duas estratégias: o caso geral (cont)

- se $\pi_B a_{11} + (1 - \pi_B) a_{12} > \pi_B a_{21} + (1 - \pi_B) a_{22}$, a melhor resposta do jogador A será escolher $\pi_A = 1$.

Exemplo

Dois jogadores e duas estratégias: o caso geral (cont)

- se $\pi_B a_{11} + (1 - \pi_B)a_{12} > \pi_B a_{21} + (1 - \pi_B)a_{22}$, a melhor resposta do jogador A será escolher $\pi_A = 1$.
- se $\pi_B a_{11} + (1 - \pi_B)a_{12} < \pi_B a_{21} + (1 - \pi_B)a_{22}$, a melhor resposta do jogador A será escolher $\pi_A = 1$.

Exemplo

Dois jogadores e duas estratégias: o caso geral (cont)

- se $\pi_B a_{11} + (1 - \pi_B)a_{12} > \pi_B a_{21} + (1 - \pi_B)a_{22}$, a melhor resposta do jogador A será escolher $\pi_A = 1$.
- se $\pi_B a_{11} + (1 - \pi_B)a_{12} < \pi_B a_{21} + (1 - \pi_B)a_{22}$, a melhor resposta do jogador A será escolher $\pi_A = 1$.

Assim, A terá como melhor resposta uma estratégia mista não degenerada (com $\pi_A \neq 0$ e $\pi_A \neq 1$) apenas caso.

$$\pi_B a_{11} + (1 - \pi_B)a_{12} = \pi_B a_{21} + (1 - \pi_B)a_{22}$$

Exemplo

Dois jogadores e duas estratégias: o caso geral (cont)

- se $\pi_B a_{11} + (1 - \pi_B)a_{12} > \pi_B a_{21} + (1 - \pi_B)a_{22}$, a melhor resposta do jogador A será escolher $\pi_A = 1$.
- se $\pi_B a_{11} + (1 - \pi_B)a_{12} < \pi_B a_{21} + (1 - \pi_B)a_{22}$, a melhor resposta do jogador A será escolher $\pi_A = 1$.

Assim, A terá como melhor resposta uma estratégia mista não degenerada (com $\pi_A \neq 0$ e $\pi_A \neq 1$) apenas caso.

$$\pi_B a_{11} + (1 - \pi_B)a_{12} = \pi_B a_{21} + (1 - \pi_B)a_{22}$$

De modo análogo, B terá como melhor resposta uma estratégia mista não degenerada apenás no caso que

$$\pi_A b_{11} + (1 - \pi_A)b_{21} = \pi_A b_{12} + (1 - \pi_A)b_{22}$$

Exemplo

Dois jogadores e duas estratégias: o caso geral (cont)

O equilíbrio de Nash com estratégias mistas não degeneradas é encontrado resolvendo para π_A e π_B o sistema

$$\begin{cases} \pi_B a_{11} + (1-\pi_B)a_{12} = \pi_B a_{21} + (1-\pi_B)a_{22} \\ \pi_A b_{11} + (1-\pi_A)b_{21} = \pi_A b_{12} + (1-\pi_A)b_{22} \end{cases}$$

obtendo-se as probabilidades de equilíbrio de Nash:

$$\pi_A = \frac{b_{22}-b_{21}}{b_{11}+b_{22}-(b_{12}+b_{21})} \quad \text{e} \quad \pi_B = \frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-(a_{12}+a_{21})}$$

Exemplo

Dois jogadores e duas estratégias: um exemplo numérico

A \ B	$B1$	$B2$
$A1$	$10, 2$	$2, 10$
$A2$	$5, 5$	$10, 2$

Sejam π_A probabilidade com que A escolhe $A1$ e π_B a probabilidade com que B escolhe B_1

Exemplo

Dois jogadores e duas estratégias: um exemplo numérico

B

A		$B1$	$B2$
	$A1$	$10, 2$	$2, 10$
	$A2$	$5, 5$	$10, 2$

Sejam π_A probabilidade com que A escolhe $A1$ e π_B a probabilidade com que B escolhe B_1, no equilíbrio de Nash em estratégias mistas essas probabilidades serão:

$$\pi_B = \frac{10 - 2}{10 + 10 - (2 + 5)}$$

Exemplo

Dois jogadores e duas estratégias: um exemplo numérico

B

A		$B1$	$B2$
	$A1$	$10, 2$	$2, 10$
	$A2$	$5, 5$	$10, 2$

Sejam π_A probabilidade com que A escolhe $A1$ e π_B a probabilidade com que B escolhe B_1, no equilíbrio de Nash em estratégias mistas essas probabilidades serão:

$$\pi_B = \frac{10-2}{10+10-(2+5)} = \frac{8}{13}$$

Exemplo

Dois jogadores e duas estratégias: um exemplo numérico

B

A		$B1$	$B2$
	$A1$	$10, 2$	$2, 10$
	$A2$	$5, 5$	$10, 2$

Sejam π_A probabilidade com que A escolhe $A1$ e π_B a probabilidade com que B escolhe B_1, no equilíbrio de Nash em estratégias mistas essas probabilidades serão:

$$\pi_B = \frac{10-2}{10+10-(2+5)} = \frac{8}{13} \quad \text{e} \quad \pi_A = \frac{2-5}{2+2-(10+5)}$$

Exemplo

Dois jogadores e duas estratégias: um exemplo numérico

B

		$B1$	$B2$
A	$A1$	$10, 2$	$2, 10$
	$A2$	$5, 5$	$10, 2$

Sejam π_A probabilidade com que A escolhe $A1$ e π_B a probabilidade com que B escolhe B_1, no equilíbrio de Nash em estratégias mistas essas probabilidades serão:

$$\pi_B = \frac{10-2}{10+10-(2+5)} = \frac{8}{13} \quad \text{e} \quad \pi_A = \frac{2-5}{2+2-(10+5)} = \frac{3}{11}$$

Sumário

1. Introdução
2. Jogos na forma extensiva
3. Jogos na forma estratégica
4. Equilíbrio de Nash e jogos sequenciais
5. Jogos com repetição
6. Estratégias mistas
7. Exercícios

ANPEC 2010 – Questão 10

Considere o jogo conhecido como “caça ao cervo”, abaixo:

		Caçador 2	
		Cervo	**Lebre**
Caçador 1	**Cervo**	$3, 3$	$x, 1$
	Lebre	$1, x$	$1, 1$

Em que $0 \leq x < 1$ é constante. Com base nesse jogo, avalie as afirmações abaixo:

0. Trata-se de um jogo de informação imperfeita;

ANPEC 2010 – Questão 10

Considere o jogo conhecido como "caça ao cervo", abaixo:

		Caçador 2	
		Cervo	**Lebre**
Caçador 1	**Cervo**	$3, 3$	$x, 1$
	Lebre	$1, x$	$1, 1$

Em que $0 \leq x < 1$ é constante. Com base nesse jogo, avalie as afirmações abaixo:

0. Trata-se de um jogo de informação imperfeita; V

ANPEC 2010 – Questão 10

Considere o jogo conhecido como "caça ao cervo", abaixo:

		Caçador 2	
		Cervo	**Lebre**
Caçador 1	**Cervo**	$3, 3$	$x, 1$
	Lebre	$1, x$	$1, 1$

Em que $0 \leq x < 1$ é constante. Com base nesse jogo, avalie as afirmações abaixo:

0. Trata-se de um jogo de informação imperfeita; V
1. Há dois equilíbrios de Nash;

ANPEC 2010 – Questão 10

Considere o jogo conhecido como “caça ao cervo”, abaixo:

		Caçador 2: **Cervo**	Caçador 2: **Lebre**
Caçador 1	**Cervo**	$3, 3$	$x, 1$
	Lebre	$1, x$	$1, 1$

Em que $0 \leq x < 1$ é constante. Com base nesse jogo, avalie as afirmações abaixo:

0. Trata-se de um jogo de informação imperfeita; V
1. Há dois equilíbrios de Nash; F

ANPEC 2010 – Questão 10

Considere o jogo conhecido como "caça ao cervo", abaixo:

		Caçador 2	
		Cervo	**Lebre**
Caçador 1	**Cervo**	$3, 3$	$x, 1$
	Lebre	$1, x$	$1, 1$

Em que $0 \leq x < 1$ é constante. Com base nesse jogo, avalie as afirmações abaixo:

0. Trata-se de um jogo de informação imperfeita; V
1. Há dois equilíbrios de Nash; F
2. Os dois caçadores possuem estratégias fracamente dominantes

ANPEC 2010 – Questão 10

Considere o jogo conhecido como “caça ao cervo”, abaixo:

		Caçador 2	
		Cervo	**Lebre**
Caçador 1	**Cervo**	$3, 3$	$x, 1$
	Lebre	$1, x$	$1, 1$

Em que $0 \leq x < 1$ é constante. Com base nesse jogo, avalie as afirmações abaixo:

0. Trata-se de um jogo de informação imperfeita; V
1. Há dois equilíbrios de Nash; F
2. Os dois caçadores possuem estratégias fracamente dominantes F

ANPEC 2010 – Questão 10 (continuação)

		Caçador 2 Cervo	Caçador 2 Lebre
Caçador 1	**Cervo**	$3, 3$	$x, 1$
	Lebre	$1, x$	$1, 1$

3. Suponha que $x = 0$. Então o equilíbrio em estratégias mistas prescreve que cada caçador cace Cervo com probabilidade $1/3$ e cace Lebre com probabilidade $2/3$;

ANPEC 2010 – Questão 10 (continuação)

		Caçador 2	
		Cervo	**Lebre**
Caçador 1	**Cervo**	$3,3$	$x,1$
	Lebre	$1,x$	$1,1$

3. Suponha que $x = 0$. Então o equilíbrio em estratégias mistas prescreve que cada caçador cace Cervo com probabilidade $1/3$ e cace Lebre com probabilidade $2/3$; V

ANPEC 2010 – Questão 10 (continuação)

		Caçador 2	
		Cervo	**Lebre**
Caçador 1	**Cervo**	$3, 3$	$x, 1$
	Lebre	$1, x$	$1, 1$

3. Suponha que $x = 0$. Então o equilíbrio em estratégias mistas prescreve que cada caçador cace Cervo com probabilidade $1/3$ e cace Lebre com probabilidade $2/3$; V
4. Suponha que $0 \leq x < 1$. Se x converge para 1, então o equilíbrio em estratégias mistas converge para o equilíbrio de Nash Pareto-dominado em estratégias puras.

ANPEC 2010 – Questão 10 (continuação)

		Caçador 2 Cervo	Caçador 2 Lebre
Caçador 1	**Cervo**	$3, 3$	$x, 1$
	Lebre	$1, x$	$1, 1$

3. Suponha que $x = 0$. Então o equilíbrio em estratégias mistas prescreve que cada caçador cace Cervo com probabilidade $1/3$ e cace Lebre com probabilidade $2/3$; V
4. Suponha que $0 \leq x < 1$. Se x converge para 1, então o equilíbrio em estratégias mistas converge para o equilíbrio de Nash Pareto-dominado em estratégias puras. V

ANPEC 2009 – Questão 12

Considere o jogo simultâneo na forma estratégica abaixo e julgue as afirmativas a seguir:

		Jogador 2	
		Estratégia A	**Estratégia B**
Jogador 1	**Estratégia A**	2,1	0,0
	Estratégia B	0,0	1,2

0. Trata-se de um jogo seqüencial.

ANPEC 2009 – Questão 12

Considere o jogo simultâneo na forma estratégica abaixo e julgue as afirmativas a seguir:

		Jogador 2	
		Estratégia A	**Estratégia B**
Jogador 1	**Estratégia A**	2,1	0,0
	Estratégia B	0,0	1,2

0. Trata-se de um jogo seqüencial. F

ANPEC 2009 – Questão 12

Considere o jogo simultâneo na forma estratégica abaixo e julgue as afirmativas a seguir:

		Jogador 2	
		Estratégia A	**Estratégia B**
Jogador 1	**Estratégia A**	2,1	0,0
	Estratégia B	0,0	1,2

0. Trata-se de um jogo seqüencial. F
1. Há apenas um equilíbrio de Nash, formado pelo par de estratégias (A,A).

ANPEC 2009 – Questão 12

Considere o jogo simultâneo na forma estratégica abaixo e julgue as afirmativas a seguir:

		Jogador 2	
		Estratégia A	**Estratégia B**
Jogador 1	**Estratégia A**	2,1	0,0
	Estratégia B	0,0	1,2

0. Trata-se de um jogo seqüencial. F
1. Há apenas um equilíbrio de Nash, formado pelo par de estratégias (A,A). F

ANPEC 2009 – Questão 12

Considere o jogo simultâneo na forma estratégica abaixo e julgue as afirmativas a seguir:

		Jogador 2	
		Estratégia A	**Estratégia B**
Jogador 1	**Estratégia A**	2,1	0,0
	Estratégia B	0,0	1,2

0. Trata-se de um jogo seqüencial. F
1. Há apenas um equilíbrio de Nash, formado pelo par de estratégias (A,A). F
2. A estratégia A é estritamente dominante para o jogador 2.

ANPEC 2009 – Questão 12

Considere o jogo simultâneo na forma estratégica abaixo e julgue as afirmativas a seguir:

		Jogador 2	
		Estratégia A	**Estratégia B**
Jogador 1	**Estratégia A**	2,1	0,0
	Estratégia B	0,0	1,2

0. Trata-se de um jogo seqüencial. F
1. Há apenas um equilíbrio de Nash, formado pelo par de estratégias (A,A). F
2. A estratégia A é estritamente dominante para o jogador 2. F

ANPEC 2009 – Questão 12

Considere o jogo simultâneo na forma estratégica abaixo e julgue as afirmativas a seguir:

		Jogador 2	
		Estratégia A	**Estratégia B**
Jogador 1	**Estratégia A**	2,1	0,0
	Estratégia B	0,0	1,2

0. Trata-se de um jogo seqüencial. F
1. Há apenas um equilíbrio de Nash, formado pelo par de estratégias (A,A). F
2. A estratégia A é estritamente dominante para o jogador 2. F
3. O jogo acima é do tipo "dilema dos prisioneiros".

ANPEC 2009 – Questão 12

Considere o jogo simultâneo na forma estratégica abaixo e julgue as afirmativas a seguir:

		Jogador 2	
		Estratégia A	**Estratégia B**
Jogador 1	**Estratégia A**	2,1	0,0
	Estratégia B	0,0	1,2

0. Trata-se de um jogo seqüencial. F
1. Há apenas um equilíbrio de Nash, formado pelo par de estratégias (A,A). F
2. A estratégia A é estritamente dominante para o jogador 2. F
3. O jogo acima é do tipo “dilema dos prisioneiros”. F

ANPEC 2009 – Questão 12

Considere o jogo simultâneo na forma estratégica abaixo e julgue as afirmativas a seguir:

		Jogador 2	
		Estratégia A	**Estratégia B**
Jogador 1	**Estratégia A**	2,1	0,0
	Estratégia B	0,0	1,2

0. Trata-se de um jogo seqüencial. F
1. Há apenas um equilíbrio de Nash, formado pelo par de estratégias (A,A). F
2. A estratégia A é estritamente dominante para o jogador 2. F
3. O jogo acima é do tipo “dilema dos prisioneiros”. F
4. O jogo acima é do tipo “batalha dos sexos”.

ANPEC 2009 – Questão 12

Considere o jogo simultâneo na forma estratégica abaixo e julgue as afirmativas a seguir:

		Jogador 2	
		Estratégia A	**Estratégia B**
Jogador 1	**Estratégia A**	2,1	0,0
	Estratégia B	0,0	1,2

0. Trata-se de um jogo seqüencial. F
1. Há apenas um equilíbrio de Nash, formado pelo par de estratégias (A,A). F
2. A estratégia A é estritamente dominante para o jogador 2. F
3. O jogo acima é do tipo "dilema dos prisioneiros". F
4. O jogo acima é do tipo "batalha dos sexos". V

ANPEC 2009 – Questão 12

		Jogador 2	
		coopera	**não coopera**
Jogador 1	**coopera**	$1, \quad 1$	$-1, \quad 2$
	não coopera	$2, -1$	$0, \quad 0$

O jogo acima é repetido infinitas vezes. Seja $\delta*$ o menor fator de desconto intertemporal que permite implementar a lista de estratégias Pareto-eficientes como equilíbrio perfeito de subjogo, em que a não-cooperação é punida com o equilíbrio de Nash Pareto- dominado para sempre. Calcule $100 \times \delta*$ (isto é, cem vezes $\delta*$).

ANPEC 2009 – Questão 12

		Jogador 2	
		coopera	**não coopera**
Jogador 1	**coopera**	1, 1	−1, 2
	não coopera	2, −1	0, 0

O jogo acima é repetido infinitas vezes. Seja δ^* o menor fator de desconto intertemporal que permite implementar a lista de estratégias Pareto-eficientes como equilíbrio perfeito de subjogo, em que a não-cooperação é punida com o equilíbrio de Nash Pareto- dominado para sempre. Calcule $100 \times \delta^*$ (isto é, cem vezes δ^*).

$$\delta^* = \frac{1}{2}$$

ANPEC 2008 – Questão 09

		Jogador 2	
		I	**II**
Jogador 1	**A**	$-1, \quad 1$	$1, -1$
	B	$2, -2$	$0, \quad 0$

Com base no jogo acima, julgue as afirmações:

0. Trata-se de um jogo do tipo dilema dos prisioneiros.

ANPEC 2008 – Questão 09

		Jogador 2	
		I	**II**
Jogador 1	**A**	$-1, \ 1$	$1, -1$
	B	$2, -2$	$0, \ 0$

Com base no jogo acima, julgue as afirmações:

0. Trata-se de um jogo do tipo dilema dos prisioneiros. F

ANPEC 2008 – Questão 09

		Jogador 2	
		I	**II**
Jogador 1	**A**	$-1,\ \ 1$	$1, -1$
	B	$2, -2$	$0,\ \ 0$

Com base no jogo acima, julgue as afirmações:

0. Trata-se de um jogo do tipo dilema dos prisioneiros. F
1. O jogador 1 tem uma estratégia estritamente dominante.

ANPEC 2008 – Questão 09

		Jogador 2	
		I	**II**
Jogador 1	**A**	$-1, \ 1$	$1, -1$
	B	$2, -2$	$0, \ 0$

Com base no jogo acima, julgue as afirmações:

0. Trata-se de um jogo do tipo dilema dos prisioneiros. F
1. O jogador 1 tem uma estratégia estritamente dominante. F

ANPEC 2008 – Questão 09

		Jogador 2	
		I	**II**
Jogador 1	**A**	$-1, \; 1$	$1, -1$
	B	$2, -2$	$0, \; 0$

Com base no jogo acima, julgue as afirmações:

0. Trata-se de um jogo do tipo dilema dos prisioneiros. F
1. O jogador 1 tem uma estratégia estritamente dominante. F
2. O jogo tem um equilíbrio em estratégias mistas em que os participantes jogam cada uma de suas estratégias com 50% de probabilidade.

ANPEC 2008 – Questão 09

		Jogador 2	
		I	**II**
Jogador 1	**A**	$-1, \ 1$	$1, -1$
	B	$2, -2$	$0, \ 0$

Com base no jogo acima, julgue as afirmações:

0. Trata-se de um jogo do tipo dilema dos prisioneiros. F
1. O jogador 1 tem uma estratégia estritamente dominante. F
2. O jogo tem um equilíbrio em estratégias mistas em que os participantes jogam cada uma de suas estratégias com 50% de probabilidade. F

ANPEC 2008 – Questão 09

		Jogador 2	
		I	**II**
Jogador 1	**A**	$-1, \ \ 1$	$1, -1$
	B	$2, -2$	$0, \ \ 0$

Com base no jogo acima, julgue as afirmações:

3. O jogo somente pode ser analisado na forma extensiva.

ANPEC 2008 – Questão 09

		Jogador 2	
		I	**II**
Jogador 1	**A**	−1, 1	1, −1
	B	2, −2	0, 0

Com base no jogo acima, julgue as afirmações:

3. O jogo somente pode ser analisado na forma extensiva. F

ANPEC 2008 – Questão 09

		Jogador 2	
		I	**II**
Jogador 1	**A**	$-1, \quad 1$	$1, -1$
	B	$2, -2$	$0, \quad 0$

Com base no jogo acima, julgue as afirmações:

3. O jogo somente pode ser analisado na forma extensiva. F
4. O jogador 2 não tem estratégia estritamente dominante.

ANPEC 2008 – Questão 09

		Jogador 2	
		I	**II**
Jogador 1	**A**	$-1, \quad 1$	$1, -1$
	B	$2, -2$	$0, \quad 0$

Com base no jogo acima, julgue as afirmações:

3. O jogo somente pode ser analisado na forma extensiva. F
4. O jogador 2 não tem estratégia estritamente dominante. V

ANPEC 2008 – Questão 15

		Jogador 2	
		L	**R**
Jogador 1	**U**	2, 2	6, 1
	D	1, 6	5, 5

O jogo acima é repetido infinitas vezes. Seja δ^* o menor fator de desconto intertemporal que permite implementar a lista de estratégias Pareto-eficientes, como equilíbrio perfeito de subjogo, em que a estratégia de punição é do tipo gatilho (trigger strategy), isto é, se um jogador desvia-se do acordo, ele é punido com o equilíbrio de Nash Pareto-dominado do jogo-estágio para sempre. Calcule $100 \times \delta^*$ (isto é, cem vezes δ^*).

ANPEC 2008 – Questão 15

		Jogador 2	
		L	**R**
Jogador 1	**U**	$2, 2$	$6, 1$
	D	$1, 6$	$5, 5$

O jogo acima é repetido infinitas vezes. Seja δ^* o menor fator de desconto intertemporal que permite implementar a lista de estratégias Pareto-eficientes, como equilíbrio perfeito de subjogo, em que a estratégia de punição é do tipo gatilho (trigger strategy), isto é, se um jogador desvia-se do acordo, ele é punido com o equilíbrio de Nash Pareto-dominado do jogo-estágio para sempre. Calcule $100 \times \delta^*$ (isto é, cem vezes δ^*).

$100\delta^* = 25$

ANPEC 2007 –Questão 11

Considere o jogo simultâneo representado pela matriz de *payoffs*, com os jogadores J1 e J2. Julgue as afirmações:

		J2	
		Esquerda	**Direita**
J1	**Alto**	$4, \quad 2$	$-1, 0$
	Baixo	$0, -1$	$1, 3$

0. Jogar Alto é estratégia dominante para J1.

ANPEC 2007 –Questão 11

Considere o jogo simultâneo representado pela matriz de *payoffs*, com os jogadores J1 e J2. Julgue as afirmações:

		J2	
		Esquerda	**Direita**
J1	**Alto**	$4, \quad 2$	$-1, 0$
	Baixo	$0, -1$	$1, 3$

0. Jogar Alto é estratégia dominante para J1. F

ANPEC 2007 –Questão 11

Considere o jogo simultâneo representado pela matriz de *payoffs*, com os jogadores J1 e J2. Julgue as afirmações:

		J2	
		Esquerda	**Direita**
J1	**Alto**	4, 2	$-1, 0$
	Baixo	$0, -1$	$1, 3$

0. Jogar Alto é estratégia dominante para J1. F
1. O jogo possui pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias puras.

ANPEC 2007 –Questão 11

Considere o jogo simultâneo representado pela matriz de *payoffs*, com os jogadores J1 e J2. Julgue as afirmações:

		J2	
		Esquerda	**Direita**
J1	**Alto**	$4, \quad 2$	$-1, 0$
	Baixo	$0, -1$	$1, 3$

0. Jogar Alto é estratégia dominante para J1. F
1. O jogo possui pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias puras. V

ANPEC 2007 –Questão 11

2. Jogar Alto com probabilidade $2/3$ e jogar Esquerda com probabilidade $1/3$ é equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

ANPEC 2007 –Questão 11

2. Jogar Alto com probabilidade $2/3$ e jogar Esquerda com probabilidade $1/3$ é equilíbrio de Nash em estratégias mistas. V

ANPEC 2007 –Questão 11

2. Jogar Alto com probabilidade $2/3$ e jogar Esquerda com probabilidade $1/3$ é equilíbrio de Nash em estratégias mistas. V
3. Em caso de jogo seqüencial, se J1 iniciar o jogo, o equilíbrio perfeito de sub-jogo em estratégia pura será {Alto, (Esquerda se J1 joga Alto, Direita se J1 joga Baixo)}.

ANPEC 2007 –Questão 11

2. Jogar Alto com probabilidade $2/3$ e jogar Esquerda com probabilidade $1/3$ é equilíbrio de Nash em estratégias mistas. V
3. Em caso de jogo seqüencial, se J1 iniciar o jogo, o equilíbrio perfeito de sub-jogo em estratégia pura será {Alto, (Esquerda se J1 joga Alto, Direita se J1 joga Baixo)}. V

ANPEC 2007 –Questão 11

2. Jogar Alto com probabilidade $2/3$ e jogar Esquerda com probabilidade $1/3$ é equilíbrio de Nash em estratégias mistas. V
3. Em caso de jogo seqüencial, se J1 iniciar o jogo, o equilíbrio perfeito de sub-jogo em estratégia pura será {Alto, (Esquerda se J1 joga Alto, Direita se J1 joga Baixo)}. V
4. Se o jogo for transformado em seqüencial com J2 jogando primeiro, haverá um único equilíbrio de Nash em estratégia pura, mas não haverá equilíbrio perfeito de sub-jogo em estratégia pura.

ANPEC 2007 –Questão 11

2. Jogar Alto com probabilidade $^2/_3$ e jogar Esquerda com probabilidade $^1/_3$ é equilíbrio de Nash em estratégias mistas. V
3. Em caso de jogo seqüencial, se J1 iniciar o jogo, o equilíbrio perfeito de sub-jogo em estratégia pura será {Alto, (Esquerda se J1 joga Alto, Direita se J1 joga Baixo)}. V
4. Se o jogo for transformado em seqüencial com J2 jogando primeiro, haverá um único equilíbrio de Nash em estratégia pura, mas não haverá equilíbrio perfeito de sub-jogo em estratégia pura. F

ANPEC 2007 – Questão 13

Seja um setor com duas empresas: 1 e 2, ambas produzindo um bem homogêneo. O custo total da empresa 1 é $c_1 = 5q_1$ e o da empresa 2 é $c_2 = 0,5{q_2}^2$. A demanda é dada por $Q = 200 - 2p$. Se as duas empresas resolverem formar um cartel, quanto a empresa 1 produzirá a mais que a empresa 2?

ANPEC 2007 – Questão 13

Seja um setor com duas empresas: 1 e 2, ambas produzindo um bem homogêneo. O custo total da empresa 1 é $c_1 = 5q_1$ e o da empresa 2 é $c_2 = 0,5{q_2}^2$. A demanda é dada por $Q = 200 - 2p$. Se as duas empresas resolverem formar um cartel, quanto a empresa 1 produzirá a mais que a empresa 2?

85

ANPEC 2007 – Questão 14

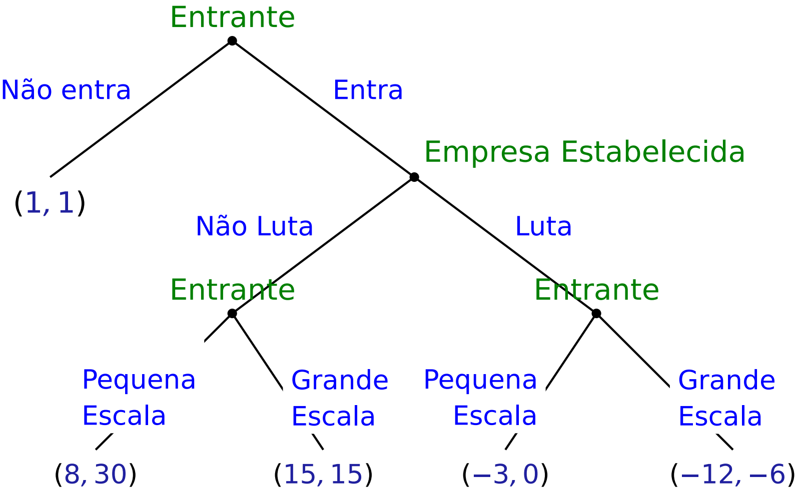
Seja um duopólio diferenciado em que a demanda enfrentada pela empresa 1 é dada por $q_1 = 12 - 2p_1 + p_2$ e a demanda enfrentada pela empresa 2 é dada por $q_2 = 12 - 2p_2 + p_1$, sendo p_1 o preço cobrado pela empresa 1 e p_2 o preço cobrado pela empresa 2. Os custos totais da empresa 1 são dados por $c_1 = q_1$ e os custos totais da empresa 2 são dados por $c_2 = 2q_2$. Encontre a soma das quantidades produzidas pelas duas empresas.

ANPEC 2007 – Questão 14

Seja um duopólio diferenciado em que a demanda enfrentada pela empresa 1 é dada por $q_1 = 12 - 2p_1 + p_2$ e a demanda enfrentada pela empresa 2 é dada por $q_2 = 12 - 2p_2 + p_1$, sendo p_1 o preço cobrado pela empresa 1 e p_2 o preço cobrado pela empresa 2. Os custos totais da empresa 1 são dados por $c_1 = q_1$ e os custos totais da empresa 2 são dados por $c_2 = 2q_2$. Encontre a soma das quantidades produzidas pelas duas empresas.

$$14$$

ANPEC 2006 – Questão 11



ANPEC 2006 – Questão 11

Considere o jogo na forma extensiva apresentado acima. Avalie as afirmativas abaixo, com base em seus conhecimentos de Teoria dos Jogos:

0. Este jogo comporta mais de um equilíbrio de Nash.

ANPEC 2006 – Questão 11

Considere o jogo na forma extensiva apresentado acima. Avalie as afirmativas abaixo, com base em seus conhecimentos de Teoria dos Jogos:

0. Este jogo comporta mais de um equilíbrio de Nash. V

ANPEC 2006 – Questão 11

Considere o jogo na forma extensiva apresentado acima. Avalie as afirmativas abaixo, com base em seus conhecimentos de Teoria dos Jogos:

0. Este jogo comporta mais de um equilíbrio de Nash. V
1. Um equilíbrio perfeito em subjogos sempre implica que a combinação de estratégias selecionadas é ótima de Pareto.

ANPEC 2006 – Questão 11

Considere o jogo na forma extensiva apresentado acima. Avalie as afirmativas abaixo, com base em seus conhecimentos de Teoria dos Jogos:

0. Este jogo comporta mais de um equilíbrio de Nash. V
1. Um equilíbrio perfeito em subjogos sempre implica que a combinação de estratégias selecionadas é ótima de Pareto. F

ANPEC 2006 – Questão 11

Considere o jogo na forma extensiva apresentado acima. Avalie as afirmativas abaixo, com base em seus conhecimentos de Teoria dos Jogos:

0. Este jogo comporta mais de um equilíbrio de Nash. V
1. Um equilíbrio perfeito em subjogos sempre implica que a combinação de estratégias selecionadas é ótima de Pareto. F
2. O perfil de estratégias (Entra; Grande Escala, quando a empresa estabelecida não luta; Pequena Escala, quando a empresa estabelecida luta; Não luta) corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos.

ANPEC 2006 – Questão 11

Considere o jogo na forma extensiva apresentado acima. Avalie as afirmativas abaixo, com base em seus conhecimentos de Teoria dos Jogos:

0. Este jogo comporta mais de um equilíbrio de Nash. V
1. Um equilíbrio perfeito em subjogos sempre implica que a combinação de estratégias selecionadas é ótima de Pareto. F
2. O perfil de estratégias (Entra; Grande Escala, quando a empresa estabelecida não luta; Pequena Escala, quando a empresa estabelecida luta; Não luta) corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos. V

ANPEC 2006 – Questão 11

3. Se antes do jogo ter início, a empresa estabelecida anunciasse sua disposição de adotar a estratégia de luta, a empresa entrante decidiria pela estratégia «não entrar».

ANPEC 2006 – Questão 11

3. Se antes do jogo ter início, a empresa estabelecida anunciasse sua disposição de adotar a estratégia de luta, a empresa entrante decidiria pela estratégia «não entrar». F

ANPEC 2006 – Questão 11

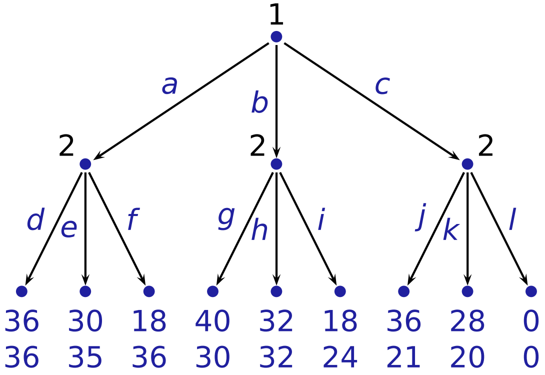
3. Se antes do jogo ter início, a empresa estabelecida anunciasse sua disposição de adotar a estratégia de luta, a empresa entrante decidiria pela estratégia «não entrar». F
4. A Empresa Estabelecida possui uma estratégia dominante no subjogo que tem início quando a Entrante decide entrar.

ANPEC 2006 – Questão 11

3. Se antes do jogo ter início, a empresa estabelecida anunciasse sua disposição de adotar a estratégia de luta, a empresa entrante decidiria pela estratégia «não entrar». F
4. A Empresa Estabelecida possui uma estratégia dominante no subjogo que tem início quando a Entrante decide entrar. V

ANPEC 2005 – Questão 11

Com base no jogo na forma extensiva apresentado abaixo, é correto dizer que:



ANPEC 2005 – Questão 11

0. O perfil de estratégias $(a, (d, h, k))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo.

ANPEC 2005 – Questão 11

0. O perfil de estratégias $(a, (d, h, k))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. F

ANPEC 2005 – Questão 11

0. O perfil de estratégias $(a, (d, h, k))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. F
1. O perfil de estratégias $(b, (f, h, l))$ corresponde a um equilíbrio de Nash desse jogo.

ANPEC 2005 – Questão 11

0. O perfil de estratégias $(a, (d, h, k))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. F
1. O perfil de estratégias $(b, (f, h, l))$ corresponde a um equilíbrio de Nash desse jogo. V

ANPEC 2005 – Questão 11

0. O perfil de estratégias $(a, (d, h, k))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. F
1. O perfil de estratégias $(b, (f, h, l))$ corresponde a um equilíbrio de Nash desse jogo. V
2. Todo equilíbrio de Nash desse jogo é um equilíbrio perfeito em subjogos.

ANPEC 2005 – Questão 11

0. O perfil de estratégias $(a, (d, h, k))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. F
1. O perfil de estratégias $(b, (f, h, l))$ corresponde a um equilíbrio de Nash desse jogo. V
2. Todo equilíbrio de Nash desse jogo é um equilíbrio perfeito em subjogos. F

ANPEC 2005 – Questão 11

0. O perfil de estratégias $(a, (d, h, k))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. F
1. O perfil de estratégias $(b, (f, h, l))$ corresponde a um equilíbrio de Nash desse jogo. V
2. Todo equilíbrio de Nash desse jogo é um equilíbrio perfeito em subjogos. F
3. O perfil de estratégias $(c, (f, h, j))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo.

ANPEC 2005 – Questão 11

0. O perfil de estratégias $(a, (d, h, k))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. F
1. O perfil de estratégias $(b, (f, h, l))$ corresponde a um equilíbrio de Nash desse jogo. V
2. Todo equilíbrio de Nash desse jogo é um equilíbrio perfeito em subjogos. F
3. O perfil de estratégias $(c, (f, h, j))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. V

ANPEC 2005 – Questão 11

0. O perfil de estratégias $(a, (d, h, k))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. F
1. O perfil de estratégias $(b, (f, h, l))$ corresponde a um equilíbrio de Nash desse jogo. V
2. Todo equilíbrio de Nash desse jogo é um equilíbrio perfeito em subjogos. F
3. O perfil de estratégias $(c, (f, h, j))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. V
4. Todo jogo na forma extensiva com informação completa possui um único equilíbrio perfeito em subjogos, que pode ser obtido pelo algoritmo de indução retroativa.

ANPEC 2005 – Questão 11

0. O perfil de estratégias $(a, (d, h, k))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. F
1. O perfil de estratégias $(b, (f, h, l))$ corresponde a um equilíbrio de Nash desse jogo. V
2. Todo equilíbrio de Nash desse jogo é um equilíbrio perfeito em subjogos. F
3. O perfil de estratégias $(c, (f, h, j))$ corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo. V
4. Todo jogo na forma extensiva com informação completa possui um único equilíbrio perfeito em subjogos, que pode ser obtido pelo algoritmo de indução retroativa. F